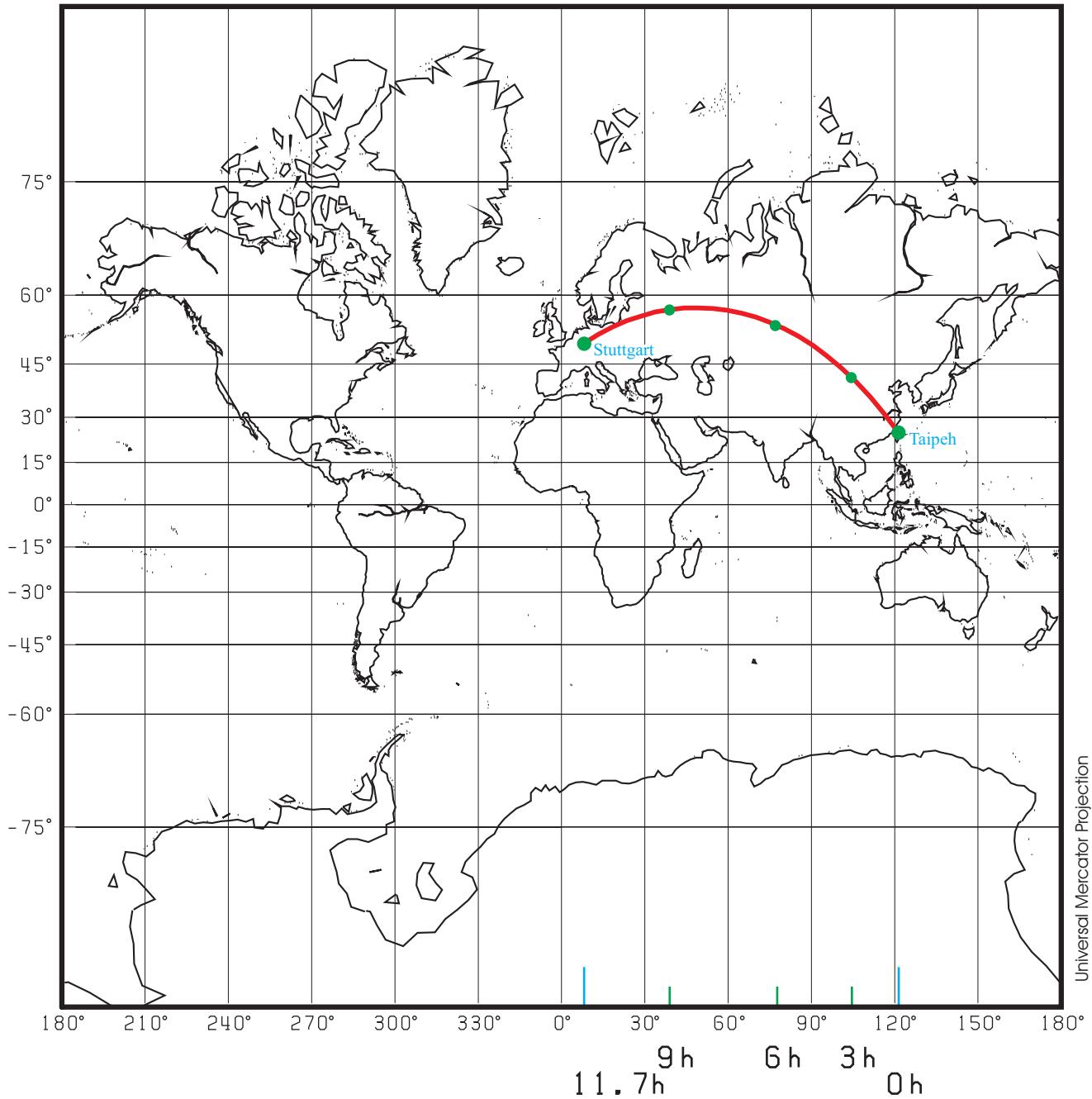


Geodätisches Institut Universität Stuttgart



Lecture Notes Map Projections, Rev. 2.51

Erik W. Grafarend

	Inhaltsverzeichnis	1
1	Klassifikation von Abbildungen von Flächen auf Flächen: Deformationsmaße	5
2	Koordinatensysteme für die im allgemeinen schiefachsigen Kartenprojektionen .	51
3	Azimutale Abbildungen (Abbildungen auf eine Tangentialebene).....	69
3.1	Allgemeine Abbildungsgleichungen und Verzerrungsmaße im Falle der Kugel.....	70
3.2	Spezielle Abbildungen.....	73
3.2.1	Normale Abbildung, äquidistant auf der Schar der Parallelkreise (mittab- standstreue Abbildung) (G. Postel 1581).....	73
3.2.2	Normale konforme Abbildung (stereographische Projektion).....	73
3.2.3	Normale flächentreue Abbildung (J.H. Lambert 1772)	75
3.2.4	Allgemeine perspektivische normale Abbildung.....	76
3.3	Allgemeine Abbildungsgleichungen und Verzerrungsmaße im Falle eines Rotations- ellipsoides	90
3.4	Spezielle Abbildungen.....	92
3.4.1	Normale Abbildung, äquidistant auf der Schar der Parallelkreise (mittab- standstreue azimutale Abbildung).....	92
3.4.2	Normale konforme Abbildung	95
3.4.3	Normale flächentreue Abbildung.....	97
3.5	Pseudoazimutale Abbildungen	99
4	Zylinderabbildungen	113
4.1	Allgemeine Abbildungsgleichungen und Verzerrungsmaße vom Typ äquidistant auf dem Äquator, im Falle der Kugel	115
4.2	Spezielle Zylinderabbildungen, äquidistant auf dem Äquator	117
4.2.1	Normale Zylinderabbildung, zusätzlich äquidistant auf der Schar der Par- allelkreise und konform auf dem Äquator	117
4.2.2	Normale konforme Zylinderabbildung (Mercator Abbildung)	117
4.2.3	Normale flächentreue Zylinderabbildung, zusätzlich konform auf dem Äqua- tor	118
4.3	Spezielle Zylinderabbildung, äquidistant auf zwei Parallelkreisen	119
4.3.1	Normale Zylinderabbildung, zusätzlich äquidistant auf der Schar der Par- allelkreise und konform auf zwei Parallelkreisen.....	120
4.3.2	Normale konforme Zylinderabbildung	120
4.3.3	Normale flächentreue Zylinderabbildung, zusätzlich konform auf zwei Par- allelkreisen	121
4.4	Schiefachsige und transversale Zylinderabbildungen, äquidistant auf dem Grund- kreis	125
4.4.1	Schiefachsige Zylinderabbildung, zusätzlich äquidistant auf der Schar der Hauptkreise und konform auf dem Grundkreis.....	127
4.4.2	Transversale Zylinderabbildung, zusätzlich äquidistant auf der Schar der Hauptkreise und konform auf dem Grundkreis.....	127
4.4.3	Schiefachsige konforme Zylinderabbildung	127
4.4.4	Transversale konforme Zylinderabbildung	128
4.4.5	Schiefachsige flächentreue Zylinderabbildung, zusätzlich konform auf dem Grundkreis.....	129
4.4.6	Transversale flächentreue Zylinderabbildung, zusätzlich konform auf dem Grundkreis.....	129
4.5	Schiefachsige Zylinderabbildung, äquidistant auf zwei Hauptkreisen.....	130
4.5.1	Zylinderabbildung, zusätzlich äquidistant auf der Schar der Hauptkreise und konform auf zwei Hauptkreisen.....	130
4.5.2	Konforme Zylinderabbildung	130

4.5.3	Flächentreue Zylinderabbildung zusätzlich konform auf zwei Hauptkreisen	131
4.6	Allgemeine Abbildungsgleichungen und Verzerrungsmaße für flächentreue Pseudo-zylinderabbildungen der Kugel (unechte Zylinderabbildungen).....	133
4.7	Spezielle flächentreue Pseudozylinderabbildungen der Kugel (unechte Zylinderabbildungen).....	136
4.7.1	Sinusoidale Pseudozylinderabbildung, äquidistant auf der Schar der Parallelkreise	136
4.7.2	Elliptische Pseudozylinderabbildung	137
4.7.3	Parabolische Pseudozylinderabbildung.....	141
4.7.4	Geradlinige (rectilineare) Pseudozylinderabbildung	142
4.7.5	Mischformen	145
4.8	Optimale Zylinderabbildungen der Kugel am Beispiel einer Abbildung vom Typ äquidistant auf zwei Parallelkreisen	146
4.8.1	Winkeltreue Abbildung (vgl. 4.3.2)	146
4.8.2	Flächentreue Abbildung (vgl. 4.3.3)	147
4.8.3	Abstandstreue Abbildung (vgl. 4.3.1)	149
4.9	Allgemeine Abbildungsgleichungen und Verzerrungsmaße für Zylinderabbildungen vom Typ äquidistant auf dem Äquator, im Falle des Rotationsellipsoids	151
4.10	Spezielle Zylinderabbildungen des Rotationsellipsoids, äquidistant auf dem Äquator.....	153
4.10.1	Normale Zylinderabbildung, zusätzlich äquidistant auf der Schar der Parallelkreise und konform auf dem Äquator	153
4.10.2	Normale konforme Zylinderabbildung	155
4.10.3	Normale flächentreue Zylinderabbildung, zusätzlich konform auf dem Äquator	156
4.11	Allgemeine Abbildungsgleichungen und Verzerrungsmaße für Zylinderabbildungen vom Typ äquidistant auf dem Äquator, im Falle einer Drehfläche	158
4.12	Spezielle Zylinderabbildungen einer Drehfläche, äquidistant auf dem Äquator.....	160
4.12.1	Normale Zylinderabbildung, zusätzlich äquidistant auf der Schar der Parallelkreise	160
4.12.2	Normale konforme Zylinderabbildung	161
4.12.3	Normale flächentreue Zylinderabbildung, zusätzlich konform auf dem Äquator	162
5	Kegelabbildungen	169
5.1	Allgemeine Abbildungsgleichungen und Verzerrungsmaße für Kegelabbildungen der Kugel	171
5.1.1	Abbildungsgesetz für die Länge Λ	176
5.1.2	Abbildungsgesetz für die Breite Φ	176
5.2	Spezielle Kegelabbildungen der Kugel	178
5.2.1	Kegelabbildungen vom Typ äquidistant auf der Schar der Parallelkreise	178
5.2.2	Konforme Kegelabbildungen.....	182
5.2.3	Flächentreue Kegelabbildungen.....	188
5.3	Allgemeine Abbildungsgleichungen und Verzerrungsmaße für Kegelabbildungen des Rotationsellipsoids.....	200
5.4	Spezielle Kegelabbildungen des Rotationsellipsoids.....	202
5.4.1	Kegelabbildungen vom Typ äquidistant auf der Schar der Parallelkreise	202
5.4.2	Konforme Kegelabbildungen.....	203
5.4.3	Flächentreue Kegelabbildungen.....	207
5.5	Allgemeine Abbildungsgleichungen und Verzerrungsmaße für pseudo-konische Abbildungen der Kugel.....	211
5.6	Spezielle pseudo-konische Abbildungen der Kugel	213

5.6.1	Stab-Werner Abbildung	213
5.6.2	Bonne Abbildung	215
6	Abbildungen des Rotationsellipsoides auf die Kugel.....	219
6.1	Konforme Abbildung	226
6.2	Flächentreue Abbildung	231
7	Literaturverzeichnis	233
8	Software	235
8.1	Freeware, Shareware	235
8.2	Lizenziert	236
9	Anlagenverzeichnis	236

§1 Classification of the mapping from the left to the right two-dimensional Riemann manifold

“It is vain to do with more what can be done with fewer.”
(entities should not be multiplied without necessity)

WILLIAM OF OCKHAM (1285-1349)

There is no chance to map a curved surface (*left Riemann manifold*) to a plane or to another curved surface (*right Riemann manifold*) without distortion or deformation. Such distortion or deformation measures will be reviewed here as they have been developed in differential geometry, continuum mechanics and mathematical cartography. The classification of various mappings, for instance

*equidistant
equiareal
conformal
geodesic
loxodromic
concircular
harmonic*

from one *Riemann manifold* (called *left*) on another *Riemann manifold* (called *right*) is conventionally based upon a comparison of the *metric* and its dual. In terms of the geometry of surfaces this is taking reference to its *first fundamental form*, the Gaussian differential invariant. In particular, in order to derive certain invariant measures of such *mappings* outlined in the frontline examples, namely called *deformation measures*, a “*canonical formalism*” is applied: The *simultaneous diagonalization of two symmetric matrices* is of focal interest. Such a diagonalization rests on the following *Theorem 1.1*

Theorem 1.1
(simultaneous diagonalization of two symmetric matrices):

If $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ is a symmetric matrix and $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ is a symmetric positive-definite matrix such that \mathbf{AB}^{-1} exists, then there exists a nonsingular matrix \mathbf{X} such that both $\mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ and $\mathbf{X}^T \mathbf{B} \mathbf{X} = \mathbf{I}_n = \text{diag}(1, \dots, 1)$ are diagonal matrices, namely \mathbf{I}_n the n dimensional unit matrix.

According to our understanding it has been intuitively applied by *C.F. Gauß* (1829) when he developed his *theory of curvature* of parameterized surfaces (*twodimensional Riemann manifold*). Here the *second fundamental form* (*Hesse* matrix of second derivatives, symmetric matrix \mathbf{H}) had been analyzed with respect to the *first fundamental form* (product of *Jacobi* matrices of first derivatives, symmetric and positive-definite matrix \mathbf{G}). Equivalent to the simultaneous diagonalization of a symmetric matrix \mathbf{H} and a symmetric and positive-definite matrix \mathbf{G} is the *general eigenvalue problem* $|\mathbf{H} - \lambda\mathbf{G}| = 0$ which corresponds to the *special eigenvalue problem* $|\mathbf{HG}^{-1} - \lambda\mathbf{I}| = 0$ for the *Gaussian curvature matrix* $-\mathbf{K} = \mathbf{HG}^{-1}$.

In comparing two *Riemann manifolds* by a mapping from one (*left*) to the other (*right*) we only concentrate here on the corresponding metric, *first fundamental forms* of two parameterized surfaces. A comparative analysis of *second and third fundamental forms* of two parameterized surfaces related by a mapping will be given elsewhere. *F. Uhlig* (1979) presented us with a historical survey of the above theorem to which we refer. Generalizations to canonically factor two symmetric matrices \mathbf{A} and \mathbf{B} which are only definite - needed for mappings between *pseudo-Riemann* manifolds - can be traced to *A. Bunso-Gerstner et al* (1993), *J.E. Cardoso and A. Souloumac* (1996), *M.T. Chu* (1991a,b), *P. Dewilde* (1988), *P. van Dooren* (1981), *J.T. Jalliffe* (1995), *J. Leeuw, S.K. Mitra and C.R. Rao* (1971), *B. de Moor* (1969,1990), *R.W. Newcomb* (1961), *C.C Paige, C.R. Rao and S.K. Mitra* (1971), *S.K. Mitra and C.R. Rao* (1968, 1971), *S.R. Searle* (1982, p. 312-316), *W. Shougen and Z. Shuqin* (1991), *N. Tsing and F. Uhlig* (1991), *F. Uhlig* (1973a,b,c, 1976, 1979), *J. Vanderwalle et al* (1988). In mathematical cartography the canonical formalism for the analysis of deformation has been introduced by *M.A. Tissot* (1881).

There exists a beautiful *variational formulation* of the *simultaneous diagonalization of two symmetric matrices* which motivates the notation of eigenvalues as *Lagrange multipliers* λ , namely

Corollary 1.2

(variational formulation, simultaneous diagonalization of two symmetric matrices):

If $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ is a symmetric matrix and $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ is a symmetric positive-definite matrix such that \mathbf{AB}^{-1} exists then there exist extremal (semi-)norm solutions of the Lagrange function $\sqrt{\text{tr} \mathbf{X}^T \mathbf{AX}} =: \|\mathbf{X}\|_A$, the \mathbf{A} -weighted Frobenius norm of the nonsingular matrix \mathbf{X} subject to the constraint $\text{tr}(\mathbf{X}^T \mathbf{BX} - \mathbf{I}) = 0$, namely the constraint optimization

$$\|\mathbf{X}\|_A^2 - \lambda \text{tr}(\mathbf{X}^T \mathbf{BX} - \mathbf{I}) = \underset{\mathbf{X}, \lambda}{\text{extr}}$$

solved by the system of normal equations

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{B})\mathbf{X} = 0 \quad \text{subject to} \quad \mathbf{X}^T \mathbf{BX} = \mathbf{I}$$

known as the general eigenvalue- eigenvector problem. The Lagrange multiplier λ is identified as eigenvalue.

1-1 Mapping from a left twodimensional Riemann manifold (surface) to a right twodimensional Riemann manifold (surface)

Let there be given the “left” twodimensional *Riemann manifold* $\{\mathbb{M}_l^2, G_{MN}\}$ and the “right” twodimensional *Riemann manifold* $\{\mathbb{M}_r^2, g_{\mu\nu}\}$ with standard metric $[G_{MN}] = [G_{NM}]$ and $[g_{\mu\nu}] = [g_{\nu\mu}]$, respectively, both symmetric and positive-definite. A subset $U_l \subset \mathbb{M}_l^2$ and $U_r \subset \mathbb{M}_r^2$, respectively, is *covered* by the *chart*

$$V_l \subset \mathbb{E}^2 := \{\mathbb{R}^2, \delta_{IJ}\} \text{ and } V_r \subset \mathbb{E}^2 := \{\mathbb{R}^2, \delta_{ij}\}$$

respectively, w.r.t. the standard “canonical” metric $[\delta_{IJ}]$ and $[\delta_{ij}]$, respectively, of the “left” twodimensional *Euclid space* and the “right” twodimensional *Euclid space*. Such a chart is constituted by *local coordinates* $\{U, V\} \in S_\Omega \subset \mathbb{E}^2$ and $\{u, v\} \in S_\omega \subset \mathbb{E}^2$ over open sets S_Ω and S_ω , respectively. *Figure 1.1* illustrates by a *commutative diagram* the mappings Φ_l, Φ_r and $\bar{\mathbf{f}}, \underline{\mathbf{f}}$. The *left* mapping Φ_l maps a point from the “left” twodimensional *Riemann manifold* (“surface”) to a point of the “left” chart, while Φ_r a point from the “right” twodimensional *Riemann manifold* (“surface”) to a point of the “right” chart. In contrast, the mapping $\bar{\mathbf{f}}$ relates a point of the “left” twodimensional *Riemann manifold* (“surface”) to a point of the “right” twodimensional *Riemann manifold* (“surface”). Analogously $\underline{\mathbf{f}}$ maps a point of the “left” chart to a point of the “right” chart.

$$\bar{\mathbf{f}} : \mathbb{M}_l^2 \rightarrow \mathbb{M}_r^2$$

and

$$\underline{\mathbf{f}} : V_l \rightarrow V_r = \Phi_r \circ \bar{\mathbf{f}} \circ \Phi_l^{-1}$$

All mappings are assumed to be a *diffeomorphism*: The mapping $\{dU, dV\} \rightarrow \{du, dv\}$ is *bijective*. *Example 1.1* is the simple example of an *isoparametric mapping* of a point on an ellipsoid-of-revolution to a point on the sphere. The *isoparametric mapping* of this type is illustrated by the *commutative diagram* of *Figure 1.2*. We take notice that the *differential mappings* conventionally called $\mathbf{f}_*, \mathbf{f}^*$, respectively, between the *bell-shaped surface of revolution* and the *torus* illustrated by *Figure 1.1* does *not* generate a diffeomorphism due to the different *genus* of the two surfaces. While *Figure 1.3* illustrates simply connected regions in \mathbb{R}^2 and \mathbb{R}^3 , respectively, *Figure 1.4* demonstrates regions which are *not* simply connected.

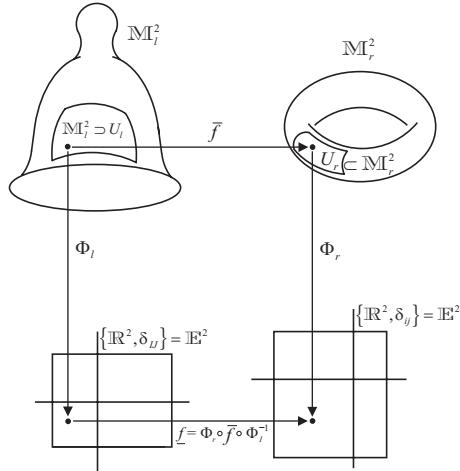


Figure 1.1:
Commutative diagram $(\bar{f}, f, \Phi_l, \Phi_r)$, $f = \Phi_r \circ \bar{f} \circ \Phi_l^{-1}$

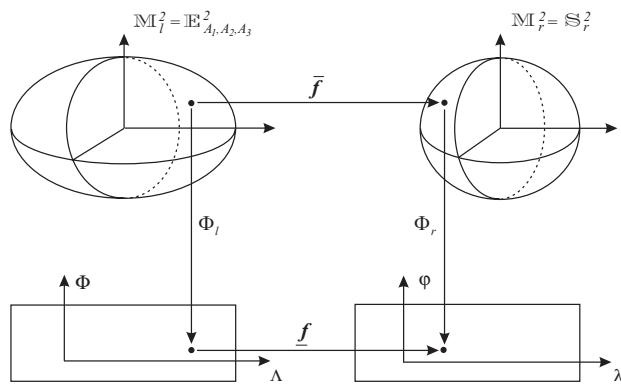


Figure 1.2:
 $\bar{f} : E^2_{A_1, A_1, A_2} \rightarrow S^2_r$, bijective mapping of an ellipsoid-of-revolution $E^2_{A_1, A_1, A_2}$ to a sphere S^2_r ,
 $\Phi_l := \{\Lambda, \Phi\} = \{\arctan Y/X, \arctan A_1^2 A_2^{-2} Z/\sqrt{X^2 + Y^2}\}$, $\Phi_r := \{\lambda, \phi\} = \{\arctan y/x, \arctan z/\sqrt{x^2 + y^2}\}$,
isoparametric mapping $f = \text{id}$, namely $(\Lambda, \Phi) = (\lambda, \phi)$.

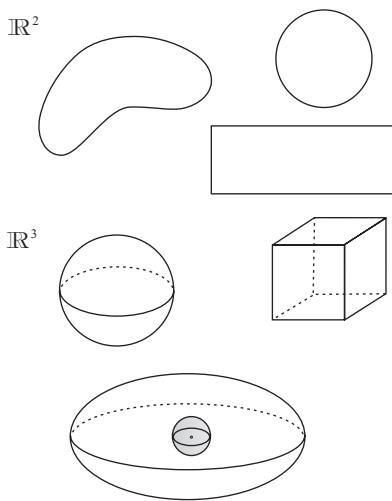


Figure 1.3 : Simply connected regions

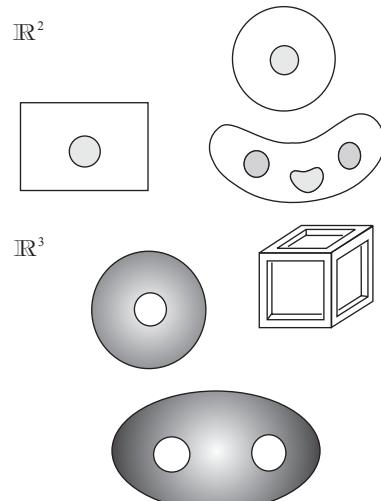


Figure 1.4 : Not simply connected regions

Those regions are characterized by closed curves which can be laid around the inner holes and which *cannot be contracted to a point within the region. The holes are against contraction.*

Example 1.1
 $(\mathbb{E}_{A_1, A_1, A_2}^2 \rightarrow \mathbb{S}_r^2, \text{isoparametric mapping}):$

As an example of the mapping $\bar{\mathbf{f}} : \mathbb{M}_l^2 \rightarrow \mathbb{M}_r^2$ and the commutative diagram $(\bar{\mathbf{f}}, \underline{\mathbf{f}}, \Phi_l, \Phi_r)$ think of an *ellipsoid-of-revolution*

$$\mathbb{E}_{A_1, A_1, A_2}^2 := \{ \mathbf{X} \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{X^2 + Y^2}{A_1^2} + \frac{Z^2}{A_2^2} = 1, \mathbb{R}^+ \ni A_1 > A_2 \in \mathbb{R}^+ \}$$

of semi-major axis A_1 and semi-minor axis A_2 as the *left Riemann manifold* $\mathbb{M}_l^2 = \mathbb{E}_{A_1, A_1, A_2}^2$ and a *sphere*

$$\mathbb{S}_r^2 := \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2, r \in \mathbb{R}^+ \}$$

of radius r as the *right Riemann manifold* $\mathbb{M}_r^2 = \mathbb{S}_r^2$, $\bar{\mathbf{f}}$ being the pointwise mapping of $\mathbb{E}_{A_1, A_1, A_2}^2$ to \mathbb{S}_r^2 *one-to-one*. $\underline{\mathbf{f}}$ could be illustrated by a transformation of $\{ \text{ellipsoidal longitude } \Lambda, \text{ellipsoidal latitude } \Phi \}$ onto $\{ \text{spherical longitude } \lambda, \text{spherical latitude } \phi \}$ one-to-one. The mapping $\underline{\mathbf{f}} = \text{id}$ is called *isoparametric* if $\{\Lambda = \lambda, \Phi = \phi\}$ or $\{U = u, V = v\}$ in general coordinates of the *left and right Riemann manifold*, respectively. Accordingly in an isoparametric mapping $\{ \text{ellipsoidal longitude}, \text{ellipsoidal latitude} \}$ and $\{ \text{spherical longitude}, \text{spherical latitude} \}$ are identical.

$\mathbf{f}_* : \begin{bmatrix} T\mathbb{M}_l^2 & \rightarrow & T\mathbb{M}_r^2 \\ {}^*T\mathbb{M}_r^2 & \rightarrow & {}^*T\mathbb{M}_l^2 \end{bmatrix} \quad (\text{pullback})$	<i>versus</i>	$\mathbf{f}^* : \begin{bmatrix} {}^*T\mathbb{M}_l^2 & \rightarrow & {}^*T\mathbb{M}_r^2 \\ T\mathbb{M}_r^2 & \rightarrow & T\mathbb{M}_l^2 \end{bmatrix} \quad (\text{pushforward})$
---	---------------	--

The mapping $\bar{\mathbf{f}} : \mathbb{M}_l^2 \rightarrow \mathbb{M}_r^2$ is called *deformation*. In addition, the mappings \mathbf{f}_* (pullback) *versus* \mathbf{f}^* (push-forward) of the left *tangent space* $T\mathbb{M}_l^2$ onto the right tangent space $T\mathbb{M}_r^2$ called *pullback* (*right derivative map, Jacobian map* \mathbf{J}_r) and of the right *tangent space* $T\mathbb{M}_r^2$ onto the left tangent map $T\mathbb{M}_l^2$ called *pushforward* (*left derivative map, Jacobian map* \mathbf{J}_l) are of focal interest for the following. Indeed the *pullback map* \mathbf{f}_* coincides with the mapping of the *right cotangent space* ${}^*T\mathbb{M}_r^2 \ni (du, dv)$ onto the *left cotangent space* ${}^*T\mathbb{M}_l^2 \ni (dU, dV)$ as well as the *pushforward map* \mathbf{f}^* with the mapping of the *left cotangent space* ${}^*T\mathbb{M}_l^2 \ni (dU, dV)$ onto the *right cotangent space* ${}^*T\mathbb{M}_r^2 \ni (du, dv)$.

1-11 A first multiplicative measure of deformation: The Cauchy-Green deformation tensor

There are various local *multiplicative* and *additive measures of deformation* being derived from the infinitesimal distance dS^2 of \mathbb{M}_l^2 and ds^2 of \mathbb{M}_r^2 , respectively.

$$dS^2 = G_{MN}(U^L)dU^MdU^N \quad \text{versus} \quad ds^2 = g_{\mu\nu}(u^\lambda)du^\mu du^\nu$$

The mapping $\bar{\mathbf{f}} : \mathbb{M}_l^2 \rightarrow \mathbb{M}_r^2$ of type *deformation* is represented *locally* by $\underline{\mathbf{f}}$, in particular $U^M \rightarrow u^\mu = f^\mu(U^M)$. In contrast, the mapping $\bar{\mathbf{f}}^{-1} : \mathbb{M}_r^2 \rightarrow \mathbb{M}_l^2$ of type inverse deformation is represented *locally* by $\underline{\mathbf{f}}^{-1}$, in particular $u^\mu \rightarrow U^M = F^M(u^\mu)$. In the *left and right tangent bundle* $T\mathbb{M}_l^2 \times \mathbb{M}_l^2$ and $T\mathbb{M}_r^2 \times \mathbb{M}_r^2$ we represent *locally* the *projections* $\pi(T\mathbb{M}_l^2 \times \mathbb{M}_l^2) = T\mathbb{M}_l^2$ and $\pi(T\mathbb{M}_r^2 \times \mathbb{M}_r^2) = T\mathbb{M}_r^2$ by the pullback map and the pushforward map, in particular by

$\mathbf{f}_* : dU^M = \frac{\partial U^M}{\partial u^\mu} du^\mu \quad \text{versus} \quad \mathbf{f}^* : du^\mu = \frac{\partial u^\mu}{\partial U^M} dU^M,$
--

subject to

$$|\frac{\partial U^M}{\partial u^\mu}| > 0, \quad |\frac{\partial u^\mu}{\partial U^M}| > 0 \quad (1)$$

preserving the *orientation* $\frac{\partial}{\partial U} \wedge \frac{\partial}{\partial V}, \frac{\partial}{\partial u} \wedge \frac{\partial}{\partial v}$ of $\mathbb{M}_l^2, \mathbb{M}_r^2$, respectively. The *first multiplicative measure of deformation* has been introduced by A.L. Cauchy (1828) and G. Green (1838) reviewed in Box 1.1.

Box 1.1

left versus right *Cauchy-Green* deformation tensor, pullback versus pushforward:

left *Cauchy-Green* deformation tensor (*l CG*)

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\{f^\lambda(U^L)\} \frac{\partial u^\mu}{\partial U^M} \frac{\partial u^\nu}{\partial U^N} dU^M dU^N$$

or

$$c_{MN}(U^L) dU^M dU^N$$

for all

$$c_{MN}(U^L) := g_{\mu\nu}(U^L) \frac{\partial u^\mu}{\partial U^M}(U^L) \frac{\partial u^\nu}{\partial U^N}(U^L)$$

right *Cauchy-Green* deformation tensor (*r CG*)

$$dS^2 = G_{MN}\{F^L(u^\lambda)\} \frac{\partial U^M}{\partial u^\mu} \frac{\partial U^N}{\partial u^\nu} du^\mu du^\nu$$

or

$$C_{\mu\nu}(u^\lambda) du^\mu du^\nu$$

for all

$$C_{\mu\nu}(u^\lambda) := G_{MN}(u^\lambda) \frac{\partial U^M}{\partial u^\mu}(u^\lambda) \frac{\partial U^N}{\partial u^\nu}(u^\lambda)$$

With respect to the *deformation gradients*, the *Jacobi* matrices in particular

$$\mathbf{J}_l := [\frac{\partial u^\mu}{\partial U^M}] = \mathbf{J}_r^{-1} \quad \text{versus} \quad \mathbf{J}_r := [\frac{\partial U^M}{\partial u^\mu}] = \mathbf{J}_l^{-1}$$

lCG and *rCG* are represented in *matrix algebra* by

$$\mathbf{C}_l := \mathbf{J}_l^T \mathbf{G}_r \mathbf{J}_l \quad \text{versus} \quad \mathbf{C}_r := \mathbf{J}_r^T \mathbf{G}_l \mathbf{J}_r$$

The abstract notation hopefully becomes more concrete when you work yourself through *Example 1.2* where we compute the *Cauchy-Green deformation tensor* for an isoparametric mapping of a point on an ellipsoid-of-revolution to a point on a sphere.

Example 1.2
(Cauchy-Green deformation tensor, $\bar{\mathbf{f}} : \mathbb{E}_{A_1, A_2, A_3}^2 \rightarrow \mathbb{S}_r^2$):

The embedding of an ellipsoid-of-revolution $\mathbb{M}_l^2 = \mathbb{E}_{A_1, A_1, A_2}^2$ and a sphere $\mathbb{M}_r^2 = \mathbb{S}_r^2$ into a threedimensional Euclidean space $\{\mathbb{R}^3, \mathbf{I}_3\}$ with respect to a *standard Euclidean metric* \mathbf{I}_3 (3×3 unit matrix) is governed by

$$\begin{aligned}\mathbf{X}(\Lambda, \Phi) &= \mathbf{E}_1 \frac{A_1 \cos \Phi \cos \Lambda}{\sqrt{1 - E^2 \sin^2 \Phi}} + \mathbf{E}_2 \frac{A_1 \cos \Phi \sin \Lambda}{\sqrt{1 - E^2 \sin^2 \Phi}} + \mathbf{E}_3 \frac{A_1(1 - E^2) \sin \Phi}{\sqrt{1 - E^2 \sin^2 \Phi}} \\ &= [\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3] \frac{A_1}{\sqrt{1 - E^2 \sin^2 \Phi}} \begin{bmatrix} \cos \Phi \cos \Lambda \\ \cos \Phi \sin \Lambda \\ (1 - E^2) \sin \Phi \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$E^2 := (A_1^2 - A_2^2)/A_1^2 = 1 - A_2^2/A_1^2, A_2^2/A_1^2 = 1 - E^2,$$

and

$$\mathbf{x}(\lambda, \phi) = \mathbf{e}_1 r \cos \phi \cos \lambda + \mathbf{e}_2 r \cos \phi \sin \lambda + \mathbf{e}_3 r \sin \phi = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] \begin{bmatrix} r \cos \phi \cos \lambda \\ r \cos \phi \sin \lambda \\ r \sin \phi \end{bmatrix}$$

respectively. The coordinates (X, Y, Z) and (x, y, z) of the placement vector $\mathbf{X}(\Lambda, \Phi) \in \mathbb{E}_{A_1, A_2, A_3}^2$ and $\mathbf{x}(\lambda, \phi) \in \mathbb{S}_r^2$, respectively, are expressed in the *left and right orthonormal fixed frame*

$$\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3 | \mathcal{O}\} \text{ and } \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 | \mathcal{O}\}$$

at their origins \mathcal{O} and \mathcal{O} , respectively. Next we are going to construct the *left as well as the right tangent space* $\mathbb{T}\mathbb{M}_l^2$ and $\mathbb{T}\mathbb{M}_r^2$, respectively. The vector field $\mathbf{X}(\Lambda, \Phi)$ is locally characterized by the *field of tangent vectors*

$$\left\{ \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \Lambda}, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \Phi} \right\},$$

the *Jacobi map* with respect to “surface normal ellipsoidal longitude Λ ” and “surface normal ellipsoidal latitude Φ ”, namely

$$\left\{ \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \Lambda}, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \Phi} \right\} = [\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3] \begin{bmatrix} X_\Lambda & X_\Phi \\ Y_\Lambda & Y_\Phi \\ Z_\Lambda & Z_\Phi \end{bmatrix} = [\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3] \begin{bmatrix} -\frac{A_1 \cos \Phi \sin \Lambda}{\sqrt{1 - E^2 \sin^2 \Phi}} & -\frac{A_1(1 - E^2) \sin \Phi \cos \Lambda}{(1 - E^2 \sin^2 \Phi)^{3/2}} \\ +\frac{A_1 \cos \Phi \cos \Lambda}{\sqrt{1 - E^2 \sin^2 \Phi}} & -\frac{A_1(1 - E^2) \sin \Phi \sin \Lambda}{(1 - E^2 \sin^2 \Phi)^{3/2}} \\ 0 & +\frac{A_1(1 - E^2) \cos \Phi}{(1 - E^2 \sin^2 \Phi)^{3/2}} \end{bmatrix},$$

as well as the vector field $\mathbf{x}(\lambda, \phi)$ by the *field of tangent vectors*

$$\left\{ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \phi} \right\},$$

the *Jacobi map* with respect to “spherical longitude λ ” and “spherical longitude ϕ ”, namely

$$\left\{ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \phi} \right\} = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] \begin{bmatrix} x_\lambda & x_\phi \\ y_\lambda & y_\phi \\ z_\lambda & z_\phi \end{bmatrix} = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] \begin{bmatrix} -r \cos \phi \sin \lambda & -r \sin \phi \cos \lambda \\ +r \cos \phi \cos \lambda & -r \sin \phi \sin \lambda \\ 0 & r \cos \phi \end{bmatrix}$$

Next we are going to identify the coordinates of the left metric tensor \mathbf{G}_l and of the right metric tensor \mathbf{G}_r , in particular from the *inner products*

contd. Example 1.2

$$\begin{aligned}
\langle \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \Lambda} | \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \Lambda} \rangle &= \frac{A_1^2 \cos^2 \Phi}{1 - E^2 \sin^2 \Phi} =: G_{11} & \langle \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \lambda} | \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \lambda} \rangle &= r^2 \cos^2 \phi =: g_{11} \\
\langle \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \Lambda} | \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \Phi} \rangle &= \langle \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \Phi} | \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \Lambda} \rangle =: G_{12} = 0 \quad \text{and} \quad \langle \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \lambda} | \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \phi} \rangle = \langle \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \phi} | \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \lambda} \rangle =: g_{12} = 0 \\
\langle \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \Phi} | \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \Phi} \rangle &= \frac{A_1^2 (1 - E^2)^2}{(1 - E^2 \sin^2 \Phi)^3} =: G_{22} & \langle \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \phi} | \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \phi} \rangle &= r^2 =: g_{22}
\end{aligned}$$

$$dS^2 = \frac{A_1^2 \cos^2 \Phi}{1 - E^2 \sin^2 \Phi} d\Lambda^2 + \frac{A_1^2 (1 - E^2)^2}{(1 - E^2 \sin^2 \Phi)^3} d\Phi^2 \quad \text{and} \quad ds^2 = r^2 \cos^2 \phi d\lambda^2 + r^2 d\phi^2$$

left metric

right metric

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}_l := \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{12} & G_{22} \end{bmatrix} &= [G_{MN}] = & \mathbf{G}_r := \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{bmatrix} &= [g_{\mu\nu}] = \\
\begin{bmatrix} \frac{A_1^2 \cos^2 \Phi}{1 - E^2 \sin^2 \Phi} & 0 \\ 0 & \frac{A_1^2 (1 - E^2)^2}{(1 - E^2 \sin^2 \Phi)^3} \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} r^2 \cos^2 \phi & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix} &
\end{aligned}$$

Finally we implement the *isoparametric mapping* $\underline{\mathbf{f}} = \text{id}$, namely

$$\begin{aligned}
(1.4i) \quad U^M &\rightarrow u^\mu = f^\mu(U^M) & (1.4ii) \quad u^\mu &= \delta_M^\mu U^M \\
&&& \text{(summation convention over repeated indices)} \\
(1.4iii) \quad u^1 &= U^1, u^2 = U^2 & (1.4iv) \quad \lambda &= \Lambda, \phi = \Phi \\
(1.4v) \quad |\frac{\partial U^M}{\partial u^\mu}| &= 1 > 0, |\frac{\partial u^\mu}{\partial U^M}| & (1.4vi) \quad \mathbf{J}_l &= \mathbf{I}_2 = \mathbf{J}_r \\
\mathbf{f}_*: dU^M &= \delta_\mu^M du^\mu, \begin{bmatrix} d\Lambda \\ d\Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\lambda \\ d\phi \end{bmatrix} & \text{versus} & \mathbf{f}^*: du^\mu = \delta_M^\mu dU^M, \begin{bmatrix} d\lambda \\ d\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\Lambda \\ d\Phi \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

left Cauchy-Green

right Cauchy-Green

$$\begin{aligned}
c_{MN} &= g_{\mu\nu} \frac{\partial u^\mu}{\partial U^M} \frac{\partial u^\nu}{\partial U^N} = g_{\mu\nu} \delta_M^\mu \delta_N^\nu \\
\mathbf{C}_l &= [c_{MN}] = \mathbf{J}_l^T \mathbf{G}_r \mathbf{J}_l = & \mathbf{C}_r &= [c_{\mu\nu}] = \mathbf{J}_r^T \mathbf{G}_l \mathbf{J}_r = \\
&\begin{bmatrix} r^2 \cos^2 \Phi & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix} && \begin{bmatrix} \frac{A_1^2 \cos^2 \phi}{1 - E^2 \sin^2 \phi} & 0 \\ 0 & \frac{A_1^2 (1 - E^2)^2}{(1 - E^2 \sin^2 \phi)^3} \end{bmatrix} \\
ds^2 &= r^2 \cos^2 \Phi d\Lambda^2 + r^2 d\Phi^2 & dS^2 &= \frac{A_1^2 \cos^2 \phi}{1 - E^2 \sin^2 \phi} d\lambda^2 + \frac{A_1^2 (1 - E^2)^2}{(1 - E^2 \sin^2 \phi)^3} d\phi^2
\end{aligned}$$

By means of the left *Cauchy-Green tensor* we have succeeded to represent the *right metric* or the metric of the *right manifold* \mathbb{M}_r^2 in the coordinates of the *left manifold* \mathbb{M}_l^2 . Or we may say that we have *pulled back* $(d\lambda, d\phi) \in {}^* \mathbb{T}_{\lambda, \phi} \mathbb{M}_r^2$ to $(d\Lambda, d\Phi) \in {}^* \mathbb{T}_{\Lambda, \Phi} \mathbb{M}_l^2$, namely from the *right cotangent space* to the *left cotangent space*.

By means of the right *Cauchy-Green tensor* we have been able to represent the *left metric* or the metric of the *left manifold* \mathbb{M}_l^2 in the coordinates of the *right manifold* \mathbb{M}_r^2 . Or we may say that we have *pushed forward* $(d\Lambda, d\Phi) \in {}^* \mathbb{T}_{\Lambda, \Phi} \mathbb{M}_l^2$ to $(d\lambda, d\phi) \in {}^* \mathbb{T}_{\lambda, \phi} \mathbb{M}_r^2$, namely from the *left cotangent space* to the *right cotangent space*.

There exists an intriguing representation of the matrix of *deformation gradients* \mathbf{J} as well as of the matrix of *Cauchy-Green deformation* \mathbf{C} , namely the *polar decomposition*. It is a generalization to matrices of the familiar polar representation of a complex number $z = r \exp i\phi, r \geq 0$.

Corollary 1.3
(polar decomposition):

Let $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Then there exists a unique orthonormal matrix $\mathbf{R} \in SO(n)$ called *rotation matrix* and a unique symmetric positive-definite matrix \mathbf{S} called *stretch* such that

$$\mathbf{J} = \mathbf{RS}, \mathbf{R}^* \mathbf{R} = \mathbf{I}_n, \mathbf{S} = \mathbf{S}^*$$

and

$$\mathbf{C}_l = \mathbf{J}_l^* \mathbf{G}_r \mathbf{J}_l = \mathbf{S}_l \mathbf{R}^* \mathbf{G}_r \mathbf{R} \mathbf{S}_l \quad \text{versus} \quad \mathbf{S}_r \mathbf{R}^* \mathbf{G}_l \mathbf{R} \mathbf{S}_r = \mathbf{J}_r^* \mathbf{G}_l \mathbf{J}_r = \mathbf{C}_r$$

is a polar representation of the matrix of Cauchy-Green deformation.

How to compute the polar decomposition of the *Jacobi matrix*? An elegant way of computation is by the *singular value decomposition*.

Corollary 1.4
(polar decomposition by singular value decomposition):

Let $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ have the singular value decomposition

$$\mathbf{J} = \mathbf{U} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{V}^*$$

where $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ are orthonormal (unitary) namely $\mathbf{U}^* \mathbf{U} = \mathbf{I}_2, \mathbf{V}^* \mathbf{V} = \mathbf{I}_2$ and

$$\boldsymbol{\Sigma} = \text{Diag}(\sigma_1, \sigma_2)$$

in descending order $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq 0$ is the diagonal matrix of singular values $\{\sigma_1, \sigma_2\}$. If \mathbf{J} has the polar decomposition $\mathbf{J} = \mathbf{RS}$, then

$$\mathbf{R} = \mathbf{U} \mathbf{V}^* \quad \text{and} \quad \mathbf{S} = \mathbf{V} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{V}^*$$

$\lambda(\mathbf{J})$ and $\sigma(\mathbf{J})$ denote, respectively, the set of eigenvalues and the set of singular values of \mathbf{J} . Then

- (i) the left eigenspace is spanned by the left eigencolumns $[\mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_2]$ generated by
 $(\mathbf{J}\mathbf{J}^* - \lambda_i \mathbf{I}_2)\mathbf{u}_i = (\mathbf{J}\mathbf{J}^* - \sigma_i^2 \mathbf{I}_2)\mathbf{u}_i = \mathbf{0}$
 $\|\mathbf{u}_1\| = \|\mathbf{u}_2\| = 1$
- (ii) the right eigenspace is spanned by the right eigencolumns $[\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2]$ generated by
 $(\mathbf{J}^*\mathbf{J} - \lambda_j \mathbf{I}_2)\mathbf{v}_j = (\mathbf{J}^*\mathbf{J} - \sigma_i^2 \mathbf{I}_2)\mathbf{v}_j = \mathbf{0}$
- (iii) the characteristic equation of the eigenvalues is solved by
 $|\mathbf{J}\mathbf{J}^* - \lambda \mathbf{I}_2| = 0 \quad \text{or} \quad |\mathbf{J}^*\mathbf{J} - \lambda \mathbf{I}_2| = 0 \quad , \quad \lambda^2 - \lambda \mathbf{I} + \mathbf{II} = 0$
relative to the invariants

$$\mathbf{I} := \text{tr} \mathbf{J} \mathbf{J}^* = \text{tr} \mathbf{J}^* \mathbf{J} \quad \text{and} \quad \mathbf{II} := (\det \mathbf{J})^2 = \det \mathbf{J} \mathbf{J}^* = \det \mathbf{J}^* \mathbf{J}$$

$$\lambda_1 = \sigma_1^2 = \frac{1}{2}(\mathbf{I} + \sqrt{\mathbf{I}^2 - 4\mathbf{II}}) \quad , \quad \lambda_2 = \sigma_2^2 = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \sqrt{\mathbf{I}^2 - 4\mathbf{II}})$$

- (iv)
$$\begin{bmatrix} \mathbf{S} = (\mathbf{J}^* \mathbf{J})^{\frac{1}{2}} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2] \text{Diag}(\sigma_1, \sigma_2) [\mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*] \\ \mathbf{R} = \mathbf{J} \mathbf{S}^{-1} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2] [\mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*] \end{bmatrix}$$
- (v) \mathbf{J} is normal if and only if $\mathbf{RS} = \mathbf{SR}$

More details about the polar decomposition related to the singular value decomposition can be found in the classical text by *J. Higham* (1986), *C. Denney and A.J. Laub* (1991) and *T.C.T. Ting* (1985).

Example 1.3 is a numerical example for singular value decomposition and polar decomposition.

Example 1.3
(singular value decomposition, polar decomposition):

Let there be given the Jacobi matrix \mathbf{J} , the product matrices \mathbf{JJ}^* , $\mathbf{J}^*\mathbf{J}$ such that the left and right characteristic equation of eigenvalues read

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{JJ}^* = \begin{bmatrix} 29 & 9 \\ 9 & 50 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}^*\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 29 & 3 \\ 3 & 53 \end{bmatrix}$$

$$\|\mathbf{JJ}^* - \lambda \mathbf{I}_2\| = \begin{vmatrix} 29 - \lambda & 9 \\ 9 & 50 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 79\lambda + 1369 = 0$$

$$\|\mathbf{J}^*\mathbf{J} - \lambda \mathbf{I}_2\| = \begin{vmatrix} 26 - \lambda & 3 \\ 3 & 53 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 79\lambda + 1369 = 0$$

$$\mathbf{I} := \text{tr } \mathbf{JJ}^* = \mathbf{J}^*\mathbf{J} = 12, \quad \mathbf{II} := \det \mathbf{JJ}^* = \det \mathbf{J}^*\mathbf{J} = 1369$$

$$\lambda_1 = 53.329, \quad \sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = 7.303$$

$$\lambda_2 = 25.671, \quad \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = 5.067$$

The left eigenspace is spanned by the left eigenvalues $[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]$, the right eigenspace by the right eigenvalues $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$, namely

$$(\mathbf{JJ}^* - \lambda_1 \mathbf{I}_2) \mathbf{u}_1 = 0, \quad (\mathbf{JJ}^* - \lambda_1 \mathbf{I}_2) \mathbf{u}_2$$

$$(\mathbf{J}^*\mathbf{J} - \lambda_1 \mathbf{I}_2) \mathbf{v}_1 = 0, \quad (\mathbf{J}^*\mathbf{J} - \lambda_1 \mathbf{I}_2) \mathbf{v}_2$$

or

$$\begin{bmatrix} -24.329 & 9 \\ 9 & -3.329 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{bmatrix} = 0, \quad \begin{bmatrix} 3.329 & 9 \\ 9 & 24.329 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -27.329 & 3 \\ 3 & -0.329 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} = 0, \quad \begin{bmatrix} 0.329 & 3 \\ 3 & 27.329 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix} = 0.$$

Note that the matrices $\mathbf{JJ}^* - \lambda \mathbf{I}_2$ and $\mathbf{J}^*\mathbf{J} - \lambda \mathbf{I}_2$ have only rank one. Accordingly, in order to solve the homogenous linear equations uniquely we need an additional constraint. Conventionally this problem is solved by postulating normalized eigencolumns, namely

$$u_{11}^2 + u_{21}^2 = 1, \quad u_{12}^2 + u_{22}^2 = 1, \quad v_{11}^2 + v_{21}^2 = 1, \quad v_{12}^2 + v_{22}^2 = 1$$

$$\|\mathbf{u}_1\| = \|\mathbf{u}_2\| = 1, \quad \|\mathbf{v}_1\| = \|\mathbf{v}_2\| = 1$$

The left eigencolumns $[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]$ are constructed from

$$-24.329u_{11} + 9u_{21} = 0, \quad 3.329u_{12} + 9u_{22} = 0$$

$$u_{11}^2 + u_{21}^2 = 1, \quad u_{12}^2 + u_{22}^2 = 1$$

contd. Example 1.3

leading to two solutions. We have chosen

$$u_{11} = 0.346, 946, \quad u_{12} = 0.937, 665$$

$$u_{21} = 0.937, 665, \quad u_{22} = -0.346, 946$$

In summary, the left and right eigencolumns are collected in the orthonormal matrices

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0.346, 946 & 0.937, 665 \\ 0.937, 665 & -0.346, 946 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0.109, 117 & 0.994, 029 \\ 0.994, 029 & -0.109, 117 \end{bmatrix},$$

The polar decomposition is now straightforward.

$$\mathbf{R} = \mathbf{U}\mathbf{V}^* \quad \text{and} \quad \mathbf{S}\Sigma\mathbf{V}^* = \mathbf{V}, \quad \Sigma = \text{Diag}(\sigma_1, \sigma_2)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0.970, 142 & 0.242, 536 \\ -0.242, 536 & 0.970, 142 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 5.093, 246 & 0.242, 536 \\ 0.242, 536 & 7.276, 069 \end{bmatrix},$$

Indeed \mathbf{R} is an *orthonormal matrix* as well as \mathbf{S} is symmetric.

1-12 A second multiplicative measure of deformation: stretch or length distortion, Tissot portray

The second *multiplicative measure* of deformation is based upon the *scale ratio*, also called *stretch, dilatation factor or length distortion*.

left stretch

right stretch

$$\frac{\Lambda^2 dS^2}{ds^2} = \Lambda^2 =: \Lambda_l^2$$

$$\frac{\lambda^2 ds^2}{dS^2} = dS^2 \quad \Lambda_r^2 := \lambda^2 = \frac{dS^2}{ds^2}$$

subject to *duality*
 $\Lambda^2 \lambda^2 = 1$.

What is the role of *stretch* $\{\Lambda^2, \lambda^2\}$ in the context of the pair of metric matrices

$$\begin{aligned} \{c_{MN}, G_{MN}\} \quad \text{and} \quad \{C_{\mu\nu}, g_{\mu\nu}\} \\ \{\mathbf{C}_l, \mathbf{G}_l\} \quad \quad \quad \{\mathbf{C}_r, \mathbf{G}_r\} \end{aligned}$$

respectively, which are *symmetric, positive definite*? According to a standard lemma of matrix algebra both matrices of the pair can be *simultaneously diagonalized*, one matrix being the unit matrix.

We briefly outline the *simultaneous diagonalization* of the positive-definite, symmetric matrices $\{\mathbf{C}_l, \mathbf{G}_r\}$ and $\{\mathbf{C}_r, \mathbf{G}_l\}$, respectively, which is based upon the transformation, called *Kartenwechsel*

$$T : V_l(U_{\mathbf{M}_l^2}) \rightarrow \tilde{V}_l(U_{\mathbf{M}_l^2}) \quad \text{versus} \quad \tau : V_r(U_{\mathbf{M}_r^2}) \rightarrow \tilde{V}_r(U_{\mathbf{M}_r^2})$$

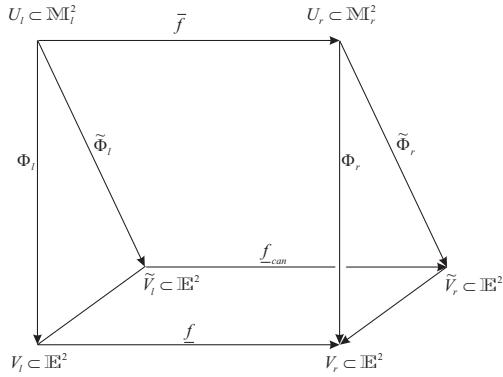
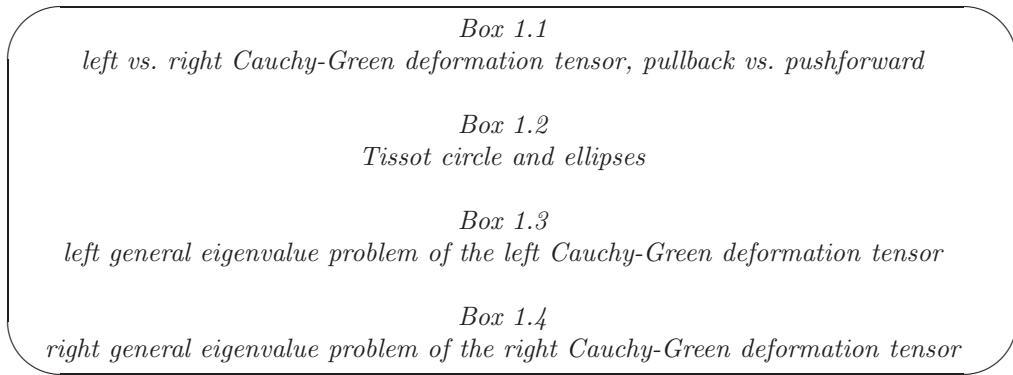


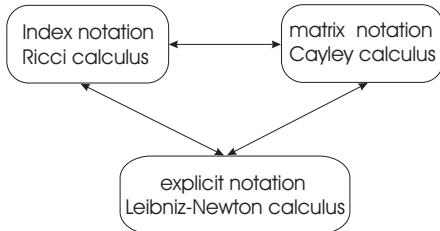
Figure 1.5:

Commutative diagram, canonical representation of pairs of metric tensors, *Kartenwechsel* T and τ , respectively, canonical mapping f_{can} from the left chart \tilde{V}_l to the right chart \tilde{V}_r

Let us pay attention to *Theorem 1.1* and *Corollary 1.2* and present the various transformations like toolboxes as following.



Certainly we agree that the various transformations have to be checked by “paper and pencil”, in particular by means of *Example 1.1, 1.2 and 1.3*. In case that we are led to “nonintegrable differentials” (namely differential forms) we have indicated this result by writing “ dV ” and “ $d\bar{v}$ ” according to the *M. Planck notation*. In this context the *left and right Frobenius matrices*, \mathbf{F}_l and \mathbf{F}_r , respectively, have to be seen. They are used as *matrices of integrating factors* which transform “imperfect differentials” dV^A (namely dV^1, dV^2 or differential forms Ω_1, Ω_2) or dV^α (namely $d\bar{v}^1, d\bar{v}^2$ or differential forms ω_1, ω_2) to “perfect differentials” dU^A (namely dU^1, dU^2) or du^α (namely du^1, du^2). As a sample reference of the theory of differential forms and the *Frobenius Integration Theorem* we direct the interested reader to *J.A. de Azcarraga and J.M. Izquierdo (1995)*, *D. Bleeker (1981)*, *J.P. do Carmo (1994)* and *H. Flanders (1970 p.97)*. Indeed we hope that the reader appreciates the *triple notation*



Box 1.2
Tissot circle and ellipses

left *Tissot* circle \mathbb{S}^1 , left *Tissot* ellipse $\mathbb{E}_{\Lambda_1, \Lambda_2}^1$

right *Tissot* ellipse $\mathbb{E}_{\Lambda_1, \Lambda_2}^1$, right *Tissot* circle \mathbb{S}^1

left Tissot circle \mathbb{S}^1

$$dS^2 = G_{MN} U_A^M U_B^N dV^A dV^B = \\ = \delta_{AB} dV^A dV^B = (dV^1)^2 + (dV^2)^2 = \Omega_1^2 + \Omega_2^2$$

or

$$dS^2 = \boldsymbol{\Omega}^T \mathbf{F}_l^T \mathbf{G}_l \mathbf{F}_l \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}^T \boldsymbol{\Omega}$$

$$\iff \mathbf{F}_l^T \mathbf{G}_l \mathbf{F}_l = \mathbf{I}$$

right Tissot ellipse $\mathbb{E}_{\Lambda_1, \Lambda_2}^1$

$$dS^2 = G_{MN} U_\mu^M U_\nu^N u_\alpha^\mu u_\beta^\nu dV^\alpha dV^\beta = \\ = \frac{1}{\Lambda_1^2} (dV^1)^2 + \frac{1}{\Lambda_2^2} (dV^2)^2 = \lambda_1^2 \omega_1^2 + \lambda_2^2 \omega_2^2$$

or

$$dS^2 = \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{F}_r^T \mathbf{C}_l \mathbf{F}_r \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{D}_\lambda \boldsymbol{\omega}$$

$$\iff \mathbf{F}_r^T \mathbf{C}_l \mathbf{F}_r = \text{Diag}(\lambda_1^2, \lambda_2^2) = \text{Diag}(\frac{1}{\Lambda_1^2}, \frac{1}{\Lambda_2^2})$$

left Tissot ellipse $\mathbb{E}_{\Lambda_1, \Lambda_2}^1$

$$ds^2 = g_{\mu\nu} u_M^\mu u_N^\nu U_A^M U_B^N dV^A dV^B = \\ = \Lambda_1^2 (dV^1)^2 + \Lambda_2^2 (dV^2)^2 = \frac{1}{\lambda_1^2} \Omega_1^2 + \frac{1}{\lambda_2^2} \Omega_2^2$$

or

$$ds^2 = \boldsymbol{\Omega}^T \mathbf{F}_l^T \mathbf{C}_l \mathbf{F}_l \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}^T \mathbf{D}_\Lambda \boldsymbol{\Omega}$$

$$\iff \mathbf{F}_l^T \mathbf{C}_l \mathbf{F}_l = \text{Diag}(\Lambda_1^2, \Lambda_2^2) = \text{Diag}(\frac{1}{\lambda_1^2}, \frac{1}{\lambda_2^2})$$

right Tissot circle \mathbb{S}^1

$$ds^2 = g_{\mu\nu} u_\alpha^\mu u_\beta^\nu dV^\alpha dV^\beta = \\ = \delta_{\alpha\beta} dV^\alpha dV^\beta = (dV^1)^2 + (dV^2)^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2$$

or

$$ds^2 = \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{F}_r^T \mathbf{G}_r \mathbf{F}_r \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega}^T \boldsymbol{\Omega}$$

$$\iff \mathbf{F}_r^T \mathbf{G}_r \mathbf{F}_r = \mathbf{I}$$

Box 1.3

left general eigenvalue problem of the left *Cauchy-Green* deformation tensor

$$\begin{aligned} \Lambda^2 dS^2 &= ds^2 \\ \Lambda^2 G_{MN} U_A^M U_B^N \bar{d} V^A \bar{d} V^B &= g_{\mu\nu} u_M^\mu u_N^\nu U_A^M U_B^N \bar{d} V^A \bar{d} V^B \\ \Lambda^2 \bar{d} \mathbf{V}^T \mathbf{F}_l^T \mathbf{G}_l \mathbf{F}_l \bar{d} \mathbf{V} &= \bar{d} \mathbf{V}^T \mathbf{F}_l^T \mathbf{C}_l \mathbf{F}_l \bar{d} \mathbf{V} \\ \iff \Lambda^2 G_{MN} U_B^N &= c_{MN} U_B^N \quad \text{or} \quad \Lambda^2 \mathbf{G}_l \mathbf{F}_l = \mathbf{C}_l \mathbf{F}_l \\ \iff (c_{MN} - \Lambda^2 G_{MN}) U_B^N &= 0 \quad \text{or} \quad (\mathbf{C}_l - \Lambda^2 \mathbf{G}_l) \mathbf{F}_l = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Box 1.4

right general eigenvalue problem of the right Cauchy-Green deformation tensor

$$\begin{aligned} \lambda^2 ds^2 &= dS^2 \\ \lambda^2 g_{\mu\nu} u_\alpha^\mu u_\beta^\nu \bar{d} v^\alpha \bar{d} v^\beta &= G_{MN} U_\mu^M U_\nu^N u_\alpha^\mu u_\beta^\nu \bar{d} v^\alpha \bar{d} v^\beta \\ \lambda^2 \bar{d} \mathbf{V}^T \mathbf{F}_r^T \mathbf{G}_r \mathbf{F}_r \bar{d} \mathbf{V} &= \bar{d} \mathbf{V}^T \mathbf{F}_r^T \mathbf{C}_r \mathbf{F}_r \bar{d} \mathbf{V} \\ \iff \lambda^2 g_{\mu\nu} u_\beta^\nu &= C_{\mu\nu} u_\beta^\nu \quad \text{or} \quad \lambda^2 \mathbf{G}_r \mathbf{F}_r = \mathbf{C}_r \mathbf{F}_r \\ \iff (C_{\mu\nu} - \lambda^2 g_{\mu\nu}) u_\beta^\nu &= 0 \quad \text{or} \quad (\mathbf{C}_r - \lambda^2 \mathbf{G}_r) \mathbf{F}_r = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Thus we are led to the *general eigenvalue problem* as a result of *simultaneous diagonalization* of two positive-definite symmetric matrices $\{\mathbf{C}_l, \mathbf{G}_l\}$ or $\{\mathbf{C}_r, \mathbf{G}_r\}$ respectively, namely

Lemma 1.3

(left and right general eigenvalue problem of the *Cauchy-Green* deformation tensor):

For the pair of positive-definite, symmetric matrices $\{\mathbf{C}_l, \mathbf{G}_l\}$ or $\{\mathbf{C}_r, \mathbf{G}_r\}$ a simultaneous diagonalization is

$$\mathbf{F}_l^T \mathbf{C}_l \mathbf{F}_l = \text{Diag}(\Lambda_1^2, \Lambda_2^2), \quad \mathbf{F}_l^T \mathbf{G}_l \mathbf{F}_l = \mathbf{I} \quad \text{versus} \quad \mathbf{F}_r^T \mathbf{C}_r \mathbf{F}_r = \text{Diag}(\lambda_1^2, \lambda_2^2), \quad \mathbf{F}_r^T \mathbf{G}_r \mathbf{F}_r = \mathbf{I}$$

obtained from the general eigenvalue - eigenvector problem of type “left eigenvalues”, “left principal stretches”

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_l \mathbf{F}_l - \mathbf{G}_l \mathbf{F}_l \mathbf{D}_\Lambda &= \mathbf{0} \iff (\mathbf{C}_l - \Lambda_i^2 \mathbf{G}_l) f_{li} = \mathbf{0} \\ \iff |\mathbf{C}_l - \Lambda^2 \mathbf{G}_l| &= 0 \end{aligned}$$

$$\Lambda_{1,2}^2 = \Lambda_\pm^2 = \frac{1}{2} \{ \text{tr} \mathbf{C}_l \mathbf{G}_l^{-1} \pm \sqrt{(\text{tr} \mathbf{C}_l \mathbf{G}_l^{-1})^2 - 4 \det \mathbf{C}_l \mathbf{G}_l^{-1}} \}$$

Diese Seite ist absichtlich leer (Fortsetzung des Textes folgt)

Diese Seite ist absichtlich leer

Diese Seite ist absichtlich leer

have been interpreted as pairs

{ left Tissot circle S^1 } versus { left Tissot ellipse $E_{\Lambda_1, \Lambda_2}^1$ }

and

{ right Tissot ellipse $E_{\Lambda_1, \Lambda_2}^1$ } versus { right Tissot circle S^1 }

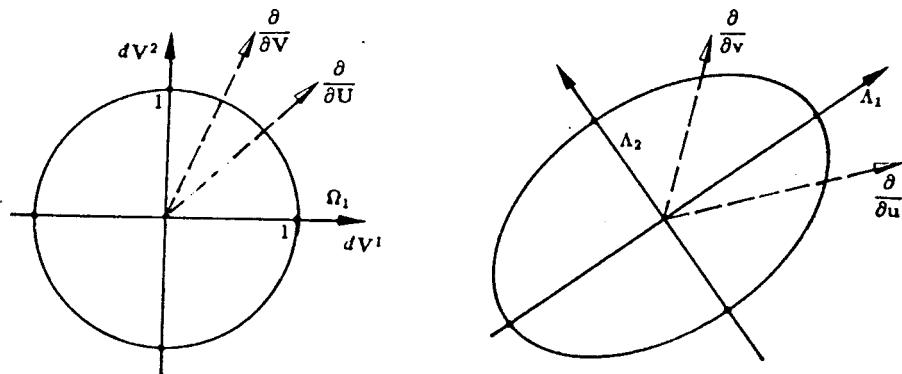


Fig. 1.3 v :

left Cauchy-Green tensor,
left Tissot circle S^1 ,
left Tissot ellipse $E_{\Lambda_1, \Lambda_2}^1$,
on the tangent space left and right

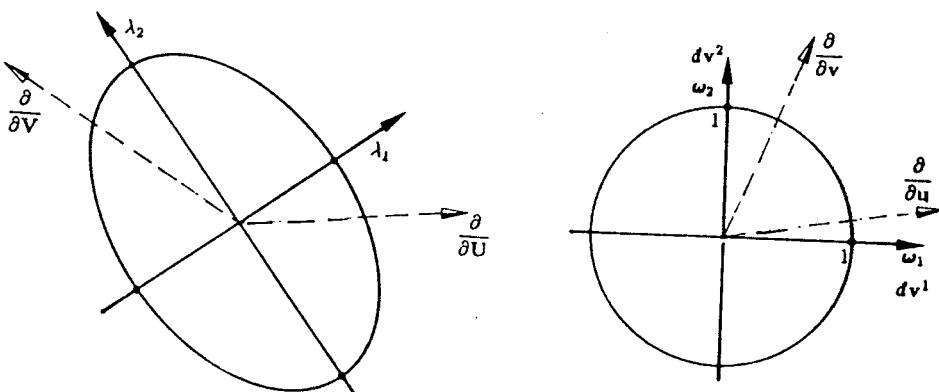


Fig. 1.3 vi :

right Cauchy-Green tensor,
right Tissot ellipse $E_{\lambda_1, \lambda_2}^1$,
right Tissot circle S^1

on the left tangent space $T_U M_l^2$ and right tangent space $T_u M_r^2$, respectively, being illustrated in *Figure 1.8 iii* and *Figure 1.8*. It should be noted that the general eigenvalue problem $|C_l - \Lambda^2 G_l| = 0$, $|C_r - \lambda^2 G_r| = 0$, respectively is equivalent to the *special* eigenvalue problem $|C_l G_l^{-1} - \Lambda^2 I| = 0$, $|C_r G_r^{-1} - \lambda^2 I| = 0$, respectively, but the corresponding eigenvectors differ.

The "left eigenvectors" or "right eigenvectors"

$$U_A^M \frac{\partial}{\partial U^M} \quad \text{versus} \quad u_\alpha^\mu \frac{\partial}{\partial u^\mu} \quad (1.34)$$

$$F_l \frac{\partial}{\partial U} \quad \text{versus} \quad F_r \frac{\partial}{\partial u} \quad (1.35)$$

span canonically the left or right *tangent space* $T_U M_l^2$ or $T_u M_r^2$, respectively. Indeed they are generated from a *dual holonomic base* (coordinate base)

$$\{dU^1, dU^2\} \quad \text{versus} \quad \{du^1, du^2\}$$

to an *anholonomic base*

$$\begin{aligned} \{dV^1, dV^2\} &= \text{versus} \quad \{dv^1, dv^2\} = \\ &= \{\Omega_1, \Omega_2\} \quad \quad \quad = \{\omega_1, \omega_2\} \end{aligned}$$

by a transformation

$\begin{bmatrix} dU^1 \\ dU^2 \end{bmatrix} = F_l \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{bmatrix} \quad \text{versus} \quad \begin{bmatrix} du^1 \\ du^2 \end{bmatrix} = F_r \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix}$

(1.36)

constituting the left and right Frobenius matrix of integrating factors.

A first additive measure of deformation: The Euler–Lagrange deformation tensor

The first *additive measure* of deformation is based upon the *scale difference*

$$ds^2 - dS^2 \quad versus \quad dS^2 - ds^2$$

which are represented by *pullback* $U^M \mapsto u^\mu = f^\mu(U^M)$ or *pushback* $u^\mu \mapsto U^M = F^M(u^\mu)$, in particular



$ds^2 - dS^2 =$ $dU^T(\mathbf{J}_l^T \mathbf{G}_r \mathbf{J}_l - \mathbf{G}_l)dU$	$dS^2 - ds^2 =$ $du^T(\mathbf{J}_r^T \mathbf{G}_l \mathbf{J}_r - \mathbf{G}_r)du$
--	--

(1.37)

Accordingly we are led to the deformation measures of *Box 1.3vii* being introduced by *L. Euler* and *J. L. Lagrange* called strain.

What is the role of *strain* in the context of the pair of matrices

$$\{\mathbf{E}_l, \mathbf{G}_l\} \quad and \quad \{\mathbf{E}_r, \mathbf{G}_r\},$$

respectively? $\{\mathbf{E}_l, \mathbf{E}_r\}$ are symmetric matrices, $\{\mathbf{G}_l, \mathbf{G}_r\}$ symmetric, *positive-definite* matrices. Thus according to a standard lemma of matrix algebra both matrices can be *simultaneously diagonalized*, one matrix being the unit matrix. With reference to the general eigenvalue problem we experienced for the *Cauchy-Green* deformation tensor we arrive at

Box 1.4 : left versus right Euler–Lagrange deformation tensor



left	right
<i>Euler–Lagrange</i>	<i>Euler–Lagrange</i>
deformation tensor	deformation tensor
(lEL)	(rEL)
$ds^2 - dS^2 =$	$dS^2 - ds^2 =$
$= dU^T (J_l^T G_l J_l - G_l) dU$	$= du^T (J_r^T G_r J_r - G_r) du$
$\frac{1}{2}(ds^2 - dS^2) =$	$\frac{1}{2}(dS^2 - ds^2) =$
$= dU^T E_l dU$	$= -du^T E_r du$
<i>for all</i>	<i>for all</i>
$E_l := \frac{1}{2}(J_l^T G_l J_l - G_l)$	<i>versus</i>
$E_r := \frac{1}{2}(G_r - J_r^T G_r J_r)$	



Lemma 1.4 (left and right general eigenvalue problem of the Euler–Lagrange deformation tensor

For the pair of symmetric matrices $\{E_l, G_l\}$ or $\{E_r, G_r\}$ where $\{G_l, G_r\}$ are positive-definite a simultaneous diagonalization is

$$F_l^T E_l F_l = \text{Diag}(K_1, K_2), \quad F_l^T G_l F_l = I \quad (1.36 l)$$

versus

$$F_r^T E_r F_r = \text{Diag}(\kappa_1, \kappa_2), \quad F_r^T G_r F_r = I \quad (1.37 r)$$

obtained from the general eigenvalue – eigenvector problem of type

"left eigenvalues"

$$E_l F_l - G_l F_l D_K = 0 \iff (E_l - K_i G_l) f_{li} = 0 \iff |E_l - K_i G_l| = 0 \quad (1.38 l)$$

$$K_{1,2} = K_{\pm} = \frac{1}{2} \{ \text{tr} E_l G_l^{-1} \pm \sqrt{(\text{tr} E_l G_l^{-1})^2 - 4 \det E_l G_l^{-1}} \} \quad (1.39 l)$$

"left eigenvectors"

$$\mathbf{E}_l \mathbf{F}_l - \mathbf{G}_l \mathbf{F}_l \mathbf{D}_K = 0, \quad \mathbf{F}_l = [f_{l+}, f_{l-}] \quad (1.40 l)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{l+} &= \left[\begin{aligned} &\left(e_{22} - K_1^2 G_{22} \right)^2 G_{11} - 2 \left(e_{12} - K_1^2 G_{12} \right) \left(e_{22} - K_1^2 G_{22} \right) G_{12} + \left(e_{12} - K_1^2 G_{12} \right)^2 G_{22} \\ &* \begin{bmatrix} e_{22} - K_1^2 G_{22} \\ -(e_{12} - K_1^2 G_{12}) \end{bmatrix} \end{aligned} \right]^{-1/2} * \\ \mathbf{f}_{l-} &= \left[\begin{aligned} &\left(e_{11} - K_2^2 G_{11} \right)^2 G_{22} - 2 \left(e_{12} - K_2^2 G_{12} \right) \left(e_{11} - K_2^2 G_{11} \right) G_{12} + \left(e_{12} - K_2^2 G_{12} \right)^2 G_{11} \\ &* \begin{bmatrix} -(e_{12} - K_2^2 G_{12}) \\ e_{11} - K_2^2 G_{11} \end{bmatrix} \end{aligned} \right]^{-1/2} * \end{aligned} \quad (1.41 l)$$

"right eigenvalues"

$$\mathbf{E}_r \mathbf{F}_r - \mathbf{G}_r \mathbf{F}_r \mathbf{D}_\kappa = 0 \iff (\mathbf{E}_r - \kappa_i \mathbf{G}_r) f_{ri} = 0 \iff |\mathbf{E}_r - \kappa \mathbf{G}_r| = 0 \quad (1.38 r)$$

$$\kappa_{1,2} = \kappa_\pm = \frac{1}{2} \{ \text{tr} \mathbf{E}_r \mathbf{G}_r^{-1} \pm \sqrt{(\text{tr} \mathbf{E}_r \mathbf{G}_r^{-1})^2 - 4 \det \mathbf{E}_r \mathbf{G}_r^{-1}} \} \quad (1.39 r)$$

"right eigenvectors"

$$\mathbf{E}_r \mathbf{F}_r - \mathbf{G}_r \mathbf{F}_r \mathbf{D}_\kappa = 0, \quad \mathbf{F}_r = [f_{r+}, f_{r-}] \quad (1.40 r)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{r+} &= \left[\begin{aligned} &\left(E_{22} - \kappa_1^2 g_{22} \right)^2 g_{11} - 2 \left(E_{12} - \kappa_1^2 g_{12} \right) \left(E_{22} - \kappa_1^2 g_{22} \right) g_{12} + \left(E_{12} - \kappa_1^2 g_{12} \right)^2 g_{22} \\ &* \begin{bmatrix} E_{22} - \kappa_1^2 g_{22} \\ -(E_{12} - \kappa_1^2 g_{12}) \end{bmatrix} \end{aligned} \right]^{-1/2} * \\ \mathbf{f}_{r-} &= \left[\begin{aligned} &\left(E_{11} - \kappa_2^2 g_{11} \right)^2 g_{22} - 2 \left(E_{12} - \kappa_2^2 g_{12} \right) \left(E_{11} - \kappa_2^2 g_{11} \right) g_{12} + \left(E_{12} - \kappa_2^2 g_{12} \right)^2 g_{11} \\ &* \begin{bmatrix} -(E_{12} - \kappa_2^2 g_{12}) \\ E_{11} - \kappa_2^2 g_{11} \end{bmatrix} \end{aligned} \right]^{-1/2} * \end{aligned} \quad (1.41 r)$$

The canonical forms of the scale differences $ds^2 - dS^2$, $dS^2 - ds^2$, respectively, have been interpreted as pairs



{ left Euler-Lagrange circle \mathbf{S}^1 }

versus

$$\left[\begin{array}{l} \{\text{left Euler-Lagrange ellipse } \mathbb{E}_{K_1, K_2}^1 : K_i > 0 \forall i = 1, 2\} \\ \{\text{left Euler-Lagrange hyperbola } \mathbb{H}_{K_1, K_2}^1 : \begin{cases} K_1 > 0 \\ K_2 < 0 \end{cases}\} \end{array} \right]$$

and

$$\{ \text{right Euler-Lagrange circle } \mathbf{S}^1 \}$$

versus

$$\left[\begin{array}{l} \{\text{right Euler-Lagrange ellipse } \mathbb{E}_{\kappa_1, \kappa_2}^1 : \kappa_i > 0 \forall i = 1, 2\} \\ \{\text{right Euler-Lagrange hyperbola } \mathbb{H}_{\kappa_1, \kappa_2}^1 : \begin{cases} \kappa_1 > 0 \\ \kappa_2 < 0 \end{cases}\} \end{array} \right]$$

on the left tangent space $T_U \mathbb{M}_l^2$ and right tangent space $T_u \mathbb{M}_r^2$, respectively, being illustrated in *Figure 1.4 i, ii vii, viii*. A deformation portrait with a positive eigenvalue $K(\mathbf{E}_l, \mathbf{G}_r)$ or $\kappa(\mathbf{E}_r, \mathbf{G}_l)$ is referred to as *extension*, with a negative eigenvalue $K(\mathbf{E}_l, \mathbf{G}_r)$ or $\kappa(\mathbf{E}_r, \mathbf{G}_l)$ as *compression*. Obviously *Cauchy-Green* deformation and *Euler-Lagrange* deformation are related by



Corollary 1.4ii' (relation between the Cauchy-Green and Euler-Lagrange deformation tensor):

$$(i) \quad 2\mathbf{E}_l = \mathbf{J}_l^T \mathbf{G}_r \mathbf{J}_l - \mathbf{G}_l = \mathbf{C}_l - \mathbf{G}_l \quad \text{versus} \quad 2\mathbf{E}_r = \mathbf{G}_r - \mathbf{J}_r^T \mathbf{G}_l \mathbf{J}_r = \mathbf{G}_r - \mathbf{C}_r \quad (1.42)$$

versus

$$\mathbf{C}_l = 2\mathbf{E}_l + \mathbf{G}_l \quad \mathbf{C}_r = \mathbf{G}_r - 2\mathbf{E}_r \quad (1.43)$$

$$(ii) \quad \mathbf{E}_l = \mathbf{J}_l^T \mathbf{E}_r \mathbf{J}_l \quad \text{versus} \quad \mathbf{E}_r = \mathbf{J}_r^T \mathbf{E}_l \mathbf{J}_r \quad (1.44)$$

$$(iii) \quad 2K_i = \Lambda_i^2 - 1 \quad \text{versus} \quad 2\kappa_i = \lambda_i^2 - 1 \quad \forall i = 1, 2 \quad (1.45)$$

Figure 1.4.5: left Euler-Lagrange tensor, $K_1 > 0$,

$K_2 > 0$

left Euler-Lagrange circle S^1 ,

left Euler-Lagrange ellipse $\mathbb{E}^1_{\sqrt{K_1}, \sqrt{K_2}}$

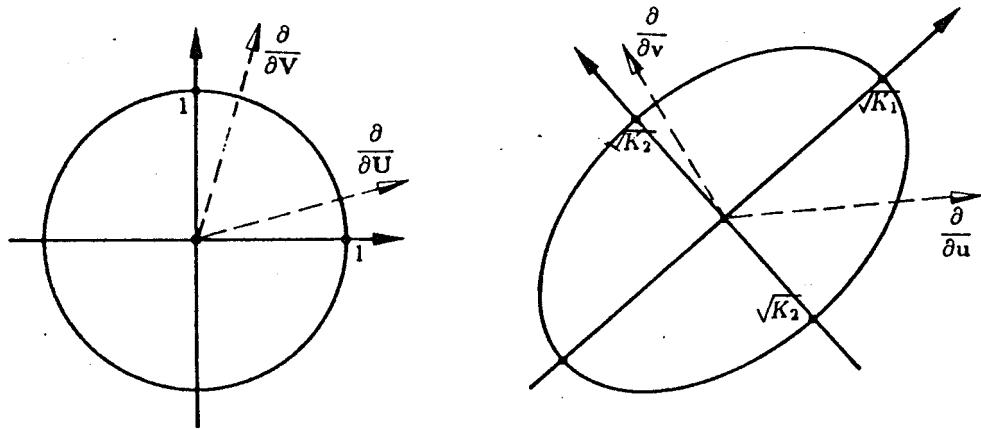


Figure 1.4.5: left Euler-Lagrange tensor, $K_1 > 0$,

$K_2 < 0$

left Euler-Lagrange circle S^1 ,

left Euler-Lagrange hyperbola

$\mathbb{H}^1_{\sqrt{K_1}, \sqrt{K_2}}$,

left and right focal points F_l, F_r

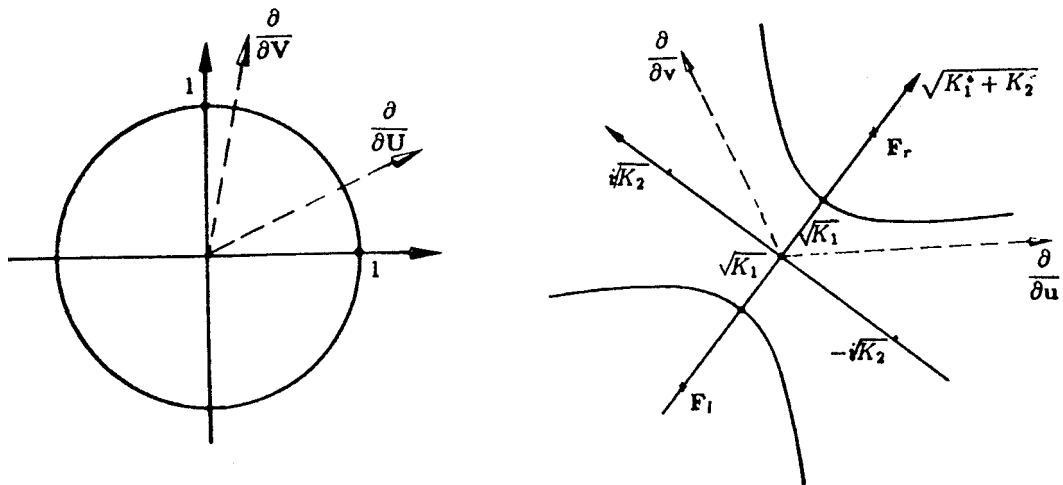


Figure 1.4iii: right Euler-Lagrange tensor, $\kappa_1 > 0$,
 $\kappa_2 > 0$
right Euler-Lagrange ellipse $E^1_{\sqrt{\kappa_1}, \sqrt{\kappa_2}}$,
right Euler-Lagrange circle S^1 .

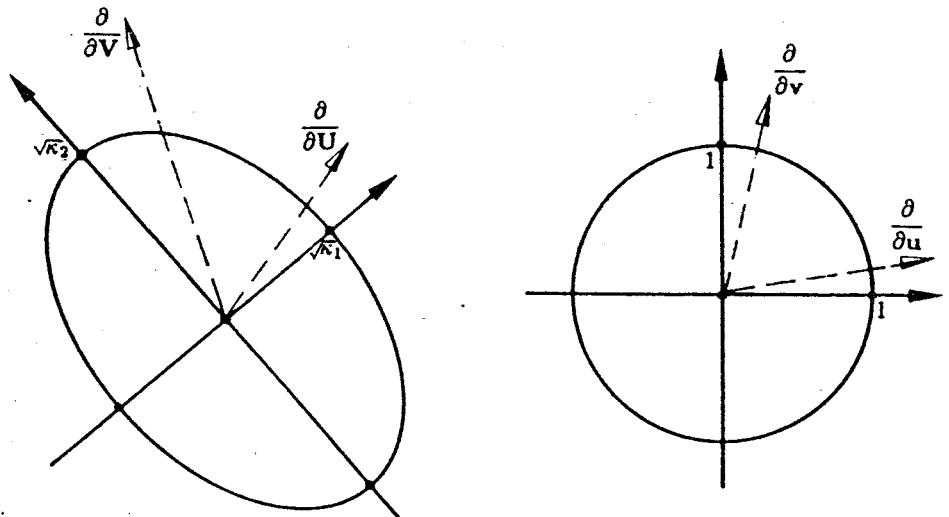
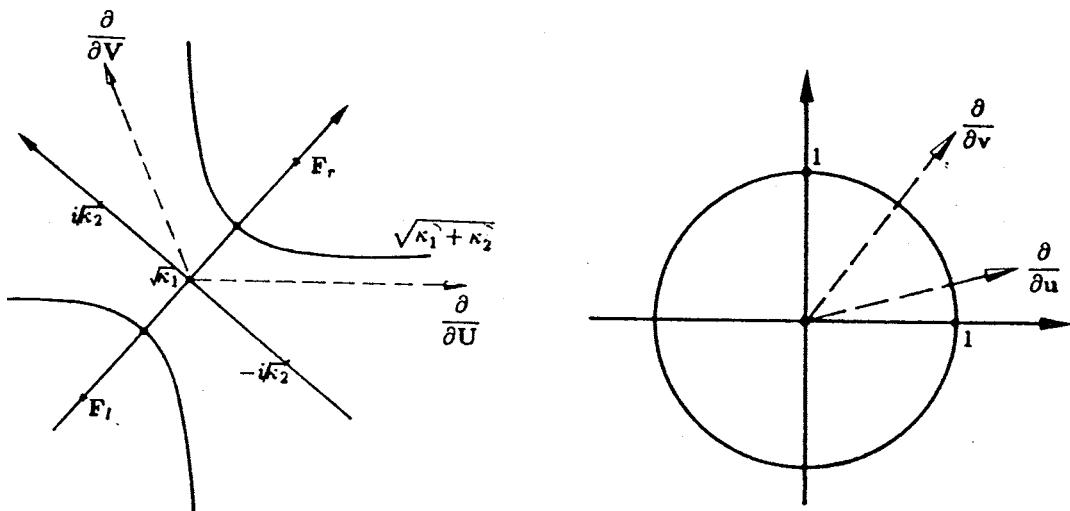


Figure 1.4iv : left Euler-Lagrange tensor, $K_1 > 0$,
 $K_2 < 0$
left Euler-Lagrange circle S^1 ,
left Euler-Lagrange hyperbola
 $H^1_{\sqrt{K_1}, \sqrt{K_2}}$,
left and right focal points F_l, F_r



The proof is straightforward.

Examples for the mapping between two Riemann manifolds are the following: C. F. Gauß (1822,1844) presented his celebrated *conformal mapping* of the biaxial ellipsoid $E^2_{A,B} = M^2_i$ onto the sphere $S^2_r = M^2_r$, also

ellipsoid $\mathbf{E}_{A,B}^2 = \mathbf{M}_l^2$ onto the *sphere* $\mathbf{S}_r^2 = \mathbf{M}_r^2$, also called double projection due to a second conformal mapping of the sphere \mathbf{S}_r^2 onto the plane \mathbf{R}^2 . M. Amalvict and E. Livieratos (1988) elaborated the *isoparametric mapping* of the triaxial ellipsoid $\mathbf{E}_{A,B,C}^2 = \mathbf{M}_l^2$ onto the biaxial ellipsoid $\mathbf{E}_{A,B}^2 = \mathbf{M}_r^2$. A. Dermanis, E. Livieratos and S. Pertsinidas (1984) mapped the *geoid* onto the *biaxial ellipsoid*. While nearly all existing map projections are analyzed by means of the *Cauchy-Green deformation tensor* A . Dermanis and E. Livieratos used the *Euler-Lagrange deformation tensor* for map projections, in particular *dilatation* $\text{tr } \mathbf{E}_l \mathbf{G}_l^{-1}$ or $\text{tr } \mathbf{E}_r \mathbf{G}_r^{-1}$ and *general shear* $(\text{tr } \mathbf{E}_l \mathbf{G}_l^{-1})^2 - 4 \det \mathbf{E}_l \mathbf{G}_l^{-1}$ or $(\text{tr } \mathbf{E}_r \mathbf{G}_r^{-1})^2 - 4 \det \mathbf{E}_r \mathbf{G}_r^{-1}$.



1. 5 A second additive measure of deformation: angular shear or angular distortion

An alternative *additive measure of deformation* is *angular shear*, also called *angular distortion*: Assume that two parameterized curves in \mathbf{M}_l^2 as well as their images in \mathbf{M}_r^2 intersect at the point U_0 as well as u_0 , respectively. Two vectors $\dot{\mathbf{U}}_1^M, \dot{\mathbf{U}}_2^N$ as well as $\dot{u}_1^\mu, \dot{u}_2^\nu$ being elements of the corresponding local tangent spaces $T_{U_0} \mathbf{M}_l^2$ as well as $T_{U_0} \mathbf{M}_r^2$

$$\dot{\mathbf{U}}_1^M \in T_{U_0} \mathbf{M}_l^2, \quad \dot{\mathbf{U}}_2^N \in T_{U_0} \mathbf{M}_l^2$$

versus

$$\dot{u}_1^\mu \in T_{U_0} \mathbf{M}_r^2, \quad \dot{u}_2^\nu \in T_{U_0} \mathbf{M}_r^2$$

include the angle Ψ_l as well as Ψ_r , respectively. (Prime differentiation is understood as differentiation w.r.t. arc length, in contrast dot differentiation is understood as differentiation w.r.t. an arbitrary curve parameter called " t_l " and " t_r ", respectively.) Illustrated by *Figure 1.5*: the left angle Ψ_l as well as the right angle Ψ_r are represented by the *inner products*:

$$\cos \Psi_l = \langle \mathbf{U}'_1 | \mathbf{U}'_2 \rangle = \quad \text{versus} \quad \cos \Psi_r = \langle \mathbf{u}'_1 | \mathbf{u}'_2 \rangle =$$

$$= \frac{\mathbf{G}_{MN} \dot{\mathbf{U}}_1^M \dot{\mathbf{U}}_2^N}{\sqrt{\mathbf{G}_{AB} \dot{\mathbf{U}}_1^A \dot{\mathbf{U}}_2^B} \sqrt{\mathbf{G}_{\Gamma\Delta} \dot{\mathbf{U}}_1^\Gamma \dot{\mathbf{U}}_2^\Delta}} \quad = \frac{g_{\mu\nu} \dot{u}_1^\mu \dot{u}_2^\nu}{\sqrt{g_{\alpha\beta} \dot{u}_1^\alpha \dot{u}_2^\beta} \sqrt{g_{\gamma\delta} \dot{u}_1^\gamma \dot{u}_2^\delta}} \quad (1.46 \text{ i})$$

The second additive measure of deformation is the *angular shear* or the *angle of shear*

$$\Sigma_l = \sum := \Psi_l - \Psi_r \quad \text{versus} \quad \Sigma_r = \sigma := \Psi_r - \Psi_l,$$

(1.46 ii)

\sum_l of type "left", \sum_r of type "right", respectively.

Figure 1.5; Angular measure of deformation, left and right shear

$$\dot{X}_2 = \frac{\partial X}{\partial U^N} \dot{U}_2^N \quad \dot{x}_2 = \frac{\partial x}{\partial u^\nu} \dot{u}_2^\nu$$

$$X_1 = \frac{\partial X}{\partial U^M} \dot{U}_1^M \quad \dot{x}_1 = \frac{\partial x}{\partial u^\mu} \dot{u}_1^\mu$$

$$X_1, X_2 \in T_{U_0} M_l^2 \quad \dot{x}_1, \dot{x}_2 \in T_{u_0} M_r^2$$



1.6 A third multiplicative measure of deformation: relative angular shear

The third multiplicative measure of deformation is the ratio Q_l , Q_r , respectively, also called *relative angular shear*, in particular

$$Q_l \cos \Psi_l = \cos \Psi_r \text{ versus } Q_r \cos \Psi_r = \cos \Psi_l, \quad (1.46 \text{ iii})$$

$$Q_l = Q := \frac{\cos \Psi_r}{\cos \Psi_l} \quad Q_r = q := \frac{\cos \Psi_l}{\cos \Psi_r} \quad (1.46 \text{ iv})$$

subject to *duality* $Qq = 1$. Additive and multiplicative angular shear are related by

$$\cos \sum_l =$$

$$\text{versus } \cos \sum_r =$$

$$= Q_l \cos^2 \Psi_l + \sqrt{1 - Q_l^2 \cos^2 \Psi_l} \sin \Psi_l$$

$$= Q_r \cos^2 \Psi_r + \sqrt{1 - Q_r^2 \cos^2 \Psi_r} \sin \Psi_r, \quad (1.46 \text{ v})$$

In Box 1.6 we have collected various representations of angular shear, in particular in terms of the Cauchy-Green deformation, Euler-Lagrange deformation tensors as well as their eigenvalues.

Box 1.6 : Left and right angular shear

$$\cos \Psi_l = \frac{\dot{\mathbf{U}}_1^T \mathbf{G}_l \dot{\mathbf{U}}_2}{\|\dot{\mathbf{U}}_1\|_{\mathbf{G}_l} \|\dot{\mathbf{U}}_2\|_{\mathbf{G}_l}} = \frac{\dot{\mathbf{u}}_1^T C_r \dot{\mathbf{u}}_2}{\|\dot{\mathbf{u}}_1\|_{C_r} \|\dot{\mathbf{u}}_2\|_{C_r}}$$

$$\cos \Psi_r = \frac{\dot{\mathbf{u}}_1^T \mathbf{G}_r \dot{\mathbf{u}}_2}{\|\dot{\mathbf{u}}_1\|_{\mathbf{G}_r} \|\dot{\mathbf{u}}_2\|_{\mathbf{G}_r}} = \frac{\dot{\mathbf{U}}_1^T C_l \dot{\mathbf{U}}_2}{\|\dot{\mathbf{U}}_1\|_{C_l} \|\dot{\mathbf{U}}_2\|_{C_l}}$$

$$Q_l := \frac{\cos \Psi_r}{\cos \Psi_l} = \frac{\dot{\mathbf{U}}_1^T C_l \dot{\mathbf{U}}_2}{\dot{\mathbf{U}}_1^T \mathbf{G}_l \dot{\mathbf{U}}_2} \frac{\|\dot{\mathbf{U}}_1\|_{\mathbf{G}_l} \|\dot{\mathbf{U}}_2\|_{\mathbf{G}_l}}{\|\dot{\mathbf{U}}_1\|_{C_l} \|\dot{\mathbf{U}}_2\|_{C_l}} = \\ = \frac{\dot{\mathbf{U}}_1^T C_l \dot{\mathbf{U}}_2}{\dot{\mathbf{U}}_1^T \mathbf{G}_l \dot{\mathbf{U}}_2} \frac{1}{\Lambda(\dot{\mathbf{U}}_1) \Lambda(\dot{\mathbf{U}}_2)}$$

$$Q_r := \frac{\cos \Psi_l}{\cos \Psi_r} = \frac{\dot{\mathbf{u}}_1^T C_r \dot{\mathbf{u}}_2}{\dot{\mathbf{u}}_1^T \mathbf{G}_r \dot{\mathbf{u}}_2} \frac{\|\dot{\mathbf{u}}_1\|_{\mathbf{G}_r} \|\dot{\mathbf{u}}_2\|_{\mathbf{G}_r}}{\|\dot{\mathbf{u}}_1\|_{C_r} \|\dot{\mathbf{u}}_2\|_{C_r}} = \\ = \frac{\dot{\mathbf{u}}_1^T C_r \dot{\mathbf{u}}_2}{\dot{\mathbf{u}}_1^T \mathbf{G}_r \dot{\mathbf{u}}_2} \frac{1}{\lambda(\dot{\mathbf{u}}_1) \lambda(\dot{\mathbf{u}}_2)}$$

$$Q_l = \frac{\dot{\mathbf{U}}_1^T (2\mathbf{E}_l + \mathbf{G}_l) \dot{\mathbf{U}}_2}{\dot{\mathbf{U}}_1^T \mathbf{G}_l \dot{\mathbf{U}}_2} \frac{\|\dot{\mathbf{U}}_1\|_{\mathbf{G}_l}}{\sqrt{\dot{\mathbf{U}}_1^T (2\mathbf{E}_l + \mathbf{G}_l) \dot{\mathbf{U}}_1}} \frac{\|\dot{\mathbf{U}}_2\|_{\mathbf{G}_l}}{\sqrt{\dot{\mathbf{U}}_2^T (2\mathbf{E}_l + \mathbf{G}_l) \dot{\mathbf{U}}_2}}$$

$$Q_r = \frac{\dot{\mathbf{u}}_1^T (2\mathbf{E}_r + \mathbf{G}_r) \dot{\mathbf{u}}_2}{\dot{\mathbf{u}}_1^T \mathbf{G}_r \dot{\mathbf{u}}_2} \frac{\|\dot{\mathbf{u}}_1\|_{\mathbf{G}_r}}{\sqrt{\dot{\mathbf{u}}_1^T (2\mathbf{E}_r + \mathbf{G}_r) \dot{\mathbf{u}}_1}} \frac{\|\dot{\mathbf{u}}_2\|_{\mathbf{G}_r}}{\sqrt{\dot{\mathbf{u}}_2^T (2\mathbf{E}_r + \mathbf{G}_r) \dot{\mathbf{u}}_2}}$$

$$Q_l = \frac{1 + 2 \frac{\dot{\mathbf{U}}_1^T \mathbf{E}_l \dot{\mathbf{U}}_2}{\dot{\mathbf{U}}_1^T \mathbf{G}_l \dot{\mathbf{U}}_2}}{\sqrt{1 + 2 \frac{\dot{\mathbf{U}}_1^T \mathbf{E}_l \dot{\mathbf{U}}_1}{\dot{\mathbf{U}}_1^T \mathbf{G}_l \dot{\mathbf{U}}_1}} \sqrt{1 + 2 \frac{\dot{\mathbf{U}}_2^T \mathbf{E}_l \dot{\mathbf{U}}_2}{\dot{\mathbf{U}}_2^T \mathbf{G}_l \dot{\mathbf{U}}_2}}}$$

$$Q_r = \frac{1 + 2 \frac{\dot{\mathbf{u}}_1^T \mathbf{E}_r \dot{\mathbf{u}}_2}{\dot{\mathbf{u}}_1^T \mathbf{G}_r \dot{\mathbf{u}}_2}}{\sqrt{1 + 2 \frac{\dot{\mathbf{u}}_1^T \mathbf{E}_r \dot{\mathbf{u}}_1}{\dot{\mathbf{u}}_1^T \mathbf{G}_r \dot{\mathbf{u}}_1}} \sqrt{1 + 2 \frac{\dot{\mathbf{u}}_2^T \mathbf{E}_r \dot{\mathbf{u}}_2}{\dot{\mathbf{u}}_2^T \mathbf{G}_r \dot{\mathbf{u}}_2}}}$$

$$\cos \Psi_l = \frac{\dot{\mathbf{v}}_1^T \mathbf{F}_r^T C_r \mathbf{F}_r \dot{\mathbf{v}}_2}{\|\dot{\mathbf{v}}_1\|_{\mathbf{F}_r^T C_r \mathbf{F}_r} \|\dot{\mathbf{v}}_2\|_{\mathbf{F}_r^T C_r \mathbf{F}_r}} = \frac{\dot{\mathbf{v}}_1^T \text{Diag}(\lambda_1^2, \lambda_1^2) \dot{\mathbf{v}}_2}{\|\dot{\mathbf{v}}_1\|_{D_\lambda} \|\dot{\mathbf{v}}_2\|_{D_\lambda}}$$

$$\cos \Psi_r = \frac{\dot{\mathbf{V}}_1^T \mathbf{F}_l^T C_l \mathbf{F}_l \dot{\mathbf{V}}_2}{\|\dot{\mathbf{V}}_1\|_{\mathbf{F}_l^T C_l \mathbf{F}_l} \|\dot{\mathbf{V}}_2\|_{\mathbf{F}_l^T C_l \mathbf{F}_l}} = \frac{\dot{\mathbf{V}}_1^T \text{Diag}(\Lambda_1^2, \Lambda_1^2) \dot{\mathbf{V}}_2}{\|\dot{\mathbf{V}}_1\|_{D_\Lambda} \|\dot{\mathbf{V}}_2\|_{D_\Lambda}}$$



1. 7 The equivalence theorem for *conformal mapping* from left to the right twodimensional Riemann manifold (*conformeomorphism*), g-Korn-Lichtenstein equations

We shall define *conformeomorphism* as well as angular shear and present an *equivalence theorem* that relates *conformeomorphism* to a special structure of the *Cauchy-Green* deformation tensor, the *Euler-Lagrange* deformation tensor, the principal stretches as well as dilatation before we are led to the generalized *Korn-Lichtenstein* equations.



Definition 1.7 (*conformal mapping*):

An orientation preserving diffeomorphism $f : \mathbb{M}_l^2 \rightarrow \mathbb{M}_r^2$ is called angle preserving, *conformal mapping* (*conformeomorphism*, inner product preserving) if

$$\Psi_l = \Psi_r$$

or equivalently

$\sum_l = \sum_r = 0 \iff \sum_r = \sigma = 0$
for all points of $\mathbb{M}_l^2, \mathbb{M}_r^2$, respectively,
holds.

Theorem 1.7 (*conformeomorphism*, *conformal mapping*):

Let $f : \mathbb{M}_l^2 \rightarrow \mathbb{M}_r^2$ be an orientation preserving conformal mapping. Then the following conditions are equivalent.

(i)

$$\Psi_l(\dot{\mathbf{U}}_1, \dot{\mathbf{U}}_2) = \Psi_r(\dot{\mathbf{u}}_1, \dot{\mathbf{u}}_2)$$

for all tangent vectors $\{\dot{\mathbf{U}}_1, \dot{\mathbf{U}}_2\}$ and their images $\{\dot{\mathbf{u}}_1, \dot{\mathbf{u}}_2\}$, respectively.

(ii)

$$\mathbf{C}_l = \Lambda^2(U_0)\mathbf{G}_l, \mathbf{C}_l \mathbf{G}_l^{-1} = \Lambda^2(U_0)\mathbf{I} \quad \text{versus} \quad (1.47)$$

$$\mathbf{C}_r = \lambda^2(u_0)\mathbf{G}_r, \mathbf{C}_r \mathbf{G}_r^{-1} = \lambda^2(u_0)\mathbf{I}$$

$$\mathbf{E}_l = K(U_0)\mathbf{G}_l, \mathbf{E}_l \mathbf{G}_l^{-1} = K(U_0)\mathbf{I} \quad \text{versus} \quad (1.48)$$

$$\mathbf{E}_r = \kappa(u_0)\mathbf{G}_r, \mathbf{E}_r \mathbf{G}_r^{-1} = \kappa(u_0)\mathbf{I}$$

$$K = \frac{1}{2}(\Lambda^2 - 1) \quad \left[\begin{array}{l} \text{versus} \\ \Lambda^2 = 2K + 1 \end{array} \right] \quad (1.49)$$

$$\frac{1}{2}(\lambda^2 - 1) = \kappa \quad (1.50)$$

(iii)

$$\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda(U_0) \quad \text{versus} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda(u_0) \quad (1.51)$$

$$K_1 = K_2 = K(U_0) \quad \text{versus} \quad \kappa_1 = \kappa_2 = \kappa(u_0) \quad (1.52)$$

$$\Lambda^2(U_0) = \frac{1}{2} \operatorname{tr} C_l G_l^{-1} \quad \text{versus} \quad \lambda^2(u_0) = \frac{1}{2} \operatorname{tr} C_r G_r^{-1} \quad (1.53)$$

left dilatation : right dilatation

$$K = \frac{1}{2} \operatorname{tr} E_l G_l^{-1} \quad \text{versus} \quad \kappa = \frac{1}{2} \operatorname{tr} E_r G_r^{-1} \quad (1.54)$$

$$\operatorname{tr} C_l G_l^{-1} = 2\sqrt{\det C_l G_l^{-1}} \quad \text{versus} \quad \operatorname{tr} C_r G_r^{-1} = 2\sqrt{\det C_r G_r^{-1}} \quad (1.55)$$

$$\operatorname{tr} E_l G_l^{-1} = 2\sqrt{\det E_l G_l^{-1}} \quad \text{versus} \quad \operatorname{tr} E_r G_r^{-1} = 2\sqrt{\det E_r G_r^{-1}} \quad (1.56)$$

(iv) *g-Korn-Lichtenstein equations* ($g_{12} = 0$)

$$\begin{bmatrix} u_U \\ u_V \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{G_{11}G_{22} - G_{12}^2}} \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}} \begin{bmatrix} -G_{12} & G_{11} \\ -G_{22} & G_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_U \\ v_V \end{bmatrix} \quad (1.57)$$

subject to the integrability conditions $u_{UV} = u_{VU}$ *and* $v_{UV} = v_{VU}$.

Before we present the proofs for the various conditions it has to be noted that the *generalized Korn-Lichtenstein equations* which govern the conformal mapping $\mathbb{M}_l^2 \rightarrow \mathbb{M}_r^2$ suffer from the effect that they contain the unknown functions $g_{11}[u^\lambda(U^\lambda)]$, $g_{22}[u^\lambda(U^\lambda)]$ since the mapping equations $u^\lambda(U^\lambda)$ have to be determined. In case of $\{\mathbb{M}_r^2, g_{\mu\nu}\} = \{\mathbb{R}^2, \delta_{\mu\nu}\}$ the corresponding *Korn-Lichtenstein equations* (1.57) do not suffer since those functions do not appear. The above stated problem is overcome by representing the right Riemann manifold \mathbb{M}_r^2 by isometric coordinates directly such that the quotient g_{22}/g_{11} is identical to one! This is exactly the procedure advocated by C. F. Gauss (1822,1844) applied to the conformal mapping of $\mathbb{E}_{A,B}^2$ onto \mathbb{S}_r^2 .

Proof:

(i) \Rightarrow (ii)

$$\begin{aligned} \Psi_l = \Psi_r \Rightarrow \cos \Psi_l = \cos \Psi_r \Leftrightarrow \mathbf{U}'_1^T \mathbf{G}_l \mathbf{U}'_2 = \mathbf{u}'_1^T \mathbf{G}_r \mathbf{u}'_2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow d\mathbf{u}'_1^T \mathbf{J}_r^T \mathbf{G}_l \mathbf{J}_r d\mathbf{u}_2 = \frac{dS_1}{ds_1} d\mathbf{u}'_1^T \mathbf{G}_r d\mathbf{u}_2 \frac{dS_2}{ds_2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow d\mathbf{u}'_1^T \mathbf{C}_r d\mathbf{u}_2 = \lambda_1 d\mathbf{u}'_1^T \mathbf{G}_r d\mathbf{u}_2 \lambda_2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda(u_0), \quad \mathbf{C}_r = \lambda^2(u_0) \mathbf{G}_r \text{ q.e.d.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \Psi_r = \cos \Psi_l \Leftrightarrow \mathbf{u}'_1^T \mathbf{G}_r \mathbf{u}'_2 = \mathbf{U}'_1^T \mathbf{G}_l \mathbf{U}'_2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow d\mathbf{U}'_1^T \mathbf{J}_l^T \mathbf{G}_r \mathbf{J}_l d\mathbf{U}_2 = \frac{ds_1}{dS_1} d\mathbf{U}'_1^T \mathbf{G}_l d\mathbf{U}_2 \frac{ds_2}{dS_2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda(U_0), \quad \mathbf{C}_l = \Lambda^2(U_0) \mathbf{G}_l \text{ q.e.d.} \end{aligned}$$

(i) \Leftarrow (ii)

$$\begin{aligned} \cos \Psi_l = \mathbf{U}'_1^T \mathbf{G}_l \mathbf{U}'_2 = \frac{ds_1}{dS_1} \mathbf{u}'_1^T \mathbf{J}_r^T \mathbf{G}_l \mathbf{J}_r \mathbf{u}'_2 \frac{ds_2}{dS_2} \quad] \Rightarrow \\ \mathbf{J}_r^T \mathbf{G}_l \mathbf{J}_r = \mathbf{C}_r = \lambda^2(u_0) \mathbf{G}_r, \quad \lambda_1^{-1} = \lambda_2^{-1} = \lambda^{-1} \quad] \\ \cos \Psi_l = \mathbf{u}'_1^T \mathbf{G}_r \mathbf{u}'_2 = \cos \Psi_r \quad] \Leftrightarrow \Psi_l = \Psi_r \text{ q.e.d.} \\ \text{orientation preserve} \quad] \end{aligned}$$



Proof:

(ii) \Rightarrow (iii)

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} \text{left eigenvalue problem} \\ \mathbf{C}_l = \Lambda^2(U_0) \mathbf{G}_l, \quad \mathbf{E}_l = K(U_0) \mathbf{G}_l \end{array} \right] \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \Lambda^2(U_0) = \Lambda_1^2 = \Lambda_2^2 \\ K(U_0) = K_1^2 = K_2^2 \end{array} \right. \quad (ii) \Leftarrow (iii) \\ \left. \begin{array}{l} \text{right eigenvalue problem} \\ \mathbf{C}_r = \lambda^2(u_0) \mathbf{G}_r, \quad \mathbf{E}_r = \kappa(u_0) \mathbf{G}_r \end{array} \right] \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \lambda^2(u_0) = \lambda_1^2 = \lambda_2^2 \\ \kappa(u_0) = \kappa_1^2 = \kappa_2^2 \end{array} \right. \\ \Lambda_1^2 = \Lambda_2^2 = \Lambda^2(U_0) \\ (\mathbf{F}_l^T)^{-1} \text{Diag}(\Lambda_1^2, \Lambda_2^2) \mathbf{F}_l^{-1} = \mathbf{C}_l, \quad (\mathbf{F}_r^T)^{-1} \mathbf{F}_r^{-1} = \mathbf{G}_l \quad] \Rightarrow \mathbf{C}_l = \Lambda^2(U_0) \mathbf{G}_l \\ \lambda_1^2 = \lambda_2^2 = \lambda^2(u_0) \\ (\mathbf{F}_r^T)^{-1} \text{Diag}(\lambda_1^2, \lambda_2^2) \mathbf{F}_r^{-1} = \mathbf{C}_r, \quad (\mathbf{F}_r^T)^{-1} \mathbf{F}_r^{-1} = \mathbf{G}_r \quad] \Rightarrow \mathbf{C}_r = \lambda^2(u_0) \mathbf{G}_r \end{aligned}$$

The statements for $\mathbf{E}_l, \mathbf{E}_r, \mathbf{E}_l \mathbf{G}_l^{-1}, \mathbf{E}_r \mathbf{G}_r^{-1}, K, \kappa, \Lambda$ and λ follow in the same way.



Proof:

(ii) \Rightarrow (iv)

In order to derive a linear system of partial differential equations for $\{u_U, u_V, v_U, v_V\}$ we depart from the *inverse right Cauchy-Green deformation tensor* \mathbf{C}_r , given by (1.47) since it contains just the above quoted partials. For an *inverse portray* involving the partials $\{U_u, U_v, V_u, V_v\}$ we had to have started from the *inverse left Cauchy-Green deformation tensor*, a procedure we are not following further.

$$\boxed{\text{1st step}} \quad \mathbf{C}_r^{-1} = \mathbf{J}_l \mathbf{G}_l^{-1} \mathbf{J}_l^T = \frac{1}{\lambda^2} \mathbf{G}_r^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} u_U & u_V \\ v_U & v_V \end{bmatrix} \mathbf{G}_l^{-1} \begin{bmatrix} u_U & v_U \\ u_V & v_V \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda^2} \mathbf{G}_r^{-1} \quad \Rightarrow$$

$$x_1 := \begin{bmatrix} u_U \\ u_V \end{bmatrix}, \quad x_2 := \begin{bmatrix} v_U \\ v_V \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{(\alpha) \mathbf{x}_1^T \mathbf{G}_l^{-1} \mathbf{x}_1 = \frac{g_{22}}{\lambda^2}, \quad (\beta) \mathbf{x}_2^T \mathbf{G}_l^{-1} \mathbf{x}_2 = \frac{g_{11}}{\lambda^2}}$$

$$(\gamma) \mathbf{x}_1^T \mathbf{G}_l^{-1} \mathbf{x}_2 = -\frac{g_{12}}{\lambda^2}, \quad (\delta) \mathbf{x}_2^T \mathbf{G}_l^{-1} \mathbf{x}_1 = -\frac{g_{12}}{\lambda^2}$$

Without loss of generality – see though the remark following the proof – let us assume that the right two-dimensional *Riemann* manifold (parameterized surface) \mathbb{M}_r^2 is charted by *orthogonal parameters* (orthogonal coordinates) such that $g_{12} = 0$ holds. Such a parametrization of a surface can always be achieved though it might turn out to be a difficult numerical procedure.

2nd step

$$(\delta) \mathbf{x}_2^T \mathbf{G}_l^{-1} \mathbf{x}_1 = 0$$

$$\text{"ansatz" } \mathbf{x}_1 = \mathbf{G}_l \mathbf{X} \mathbf{x}_2 \quad (\mathbf{X} \text{ an unknown matrix}) \quad \Leftrightarrow$$

$$(\epsilon) \mathbf{x}_2^T \mathbf{X} \mathbf{x}_2 = 0 \quad \forall \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$$

A quadratic form over the field of real numbers can only be zero ("isotropic") if and only if \mathbf{X} is *antisymmetric*, that is $\mathbf{X} = -\mathbf{X}^T$. (For a proof we refer to A. Crumeyrolle (1990), Proposition 1.1.3.)

$$\boxed{\text{"ansatz" } \mathbf{X} = \mathbf{A} \mathbf{x} \quad \forall \mathbf{A} = -\mathbf{A}^T, \quad \mathbf{A} := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}}$$

3rd step

the conditions (α) and (β) in particular.

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{g_{22}} \mathbf{x}_1^T \mathbf{G}_l^{-1} \mathbf{x}_1 &= \frac{1}{g_{11}} \mathbf{x}_2^T \mathbf{G}_l^{-1} \mathbf{x}_2 = \frac{1}{\lambda^2} \\ \mathbf{x}_1 &= \mathbf{G}_l \mathbf{A} z \mathbf{x}_2 \\ \frac{1}{g_{22}} \mathbf{x}_1^T \mathbf{G}_l^{-1} \mathbf{x}_1 &= \frac{1}{g_{22}} \mathbf{x}_2^T \mathbf{A}^T \mathbf{G}_l \mathbf{A} \mathbf{x}_2 z = \frac{1}{g_{11}} \mathbf{x}_2^T \mathbf{G}_l^{-1} \mathbf{x}_2 \iff \\ \iff \frac{g_{11}}{g_{22}} \mathbf{A}^T \mathbf{G}_l \mathbf{A} \mathbf{G}_l z &= \mathbf{I} \iff \\ \iff \boxed{z = \frac{1}{\sqrt{G_{11}G_{22} - G_{12}^2}} \sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}}} & \Rightarrow \\ \mathbf{x}_1 &= \mathbf{G}_l \mathbf{A} z \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_1 &= \mathbf{G}_l \mathbf{A} \frac{1}{\sqrt{G_{11}G_{22} - G_{12}^2}} \sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}} \mathbf{x}_2 \quad (1.57) \text{ q.e.d} \end{aligned} \right]$$

The converse (iv) \Rightarrow (ii) is obvious. ■

Here is the remark relating to \mathbf{G}_l being diagonal, not unity, of course. An obvious generalization for solving (γ) and (δ) for $g_{12} \neq 0$ would be the

$$ansatz \quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{G}_l \mathbf{X} \mathbf{x}_2, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} y & x \\ -x & -y \end{bmatrix},$$

the superposition of a diagonal *trace-free* matrix $Diag(y, -y)$ and an *antisymmetric* matrix $\mathbf{A} \mathbf{x}$. Indeed we succeed in determining the unknowns x and y according to the above steps, but fail to arrive at linear relations between the partials $\{u_U, u_V, v_U, v_V\}$.

1. 8 The equivalence theorem for *conformal mapping* from the left Riemann manifold to the right two-dimensional Euclidean manifold (conformeomorphism), Korn–Lichtenstein equations

The previous equivalence theorem for a conformeomorphism will be specialized for the case $\{\mathbb{M}_r^2, g_{\mu\nu}\} = \{\mathbb{R}^2, \delta_{\mu\nu}\}$.

In many applications the choice of the *right* 2-dimensional Riemann manifold is the "plane" manifold $\{\mathbb{M}_r^2, g_{\mu\nu}\} = \{\mathbb{R}^2, \delta_{\mu\nu}\}$, e.g. the tangent space $T_{U_0} \mathbb{M}_l^2$ of the *left* 2-dimensional Riemann manifold fixed to the point U_0 and being covered by *Cartesian coordinates*. The orientation preserving diffeomorphism f reduces accordingly to *Cha-Cha-Cha*. Let us collect the basic results of Lemma 1.3, Lemma 1.4, Corollary 1.4, and Theorem 1.2 for this special situation.



Corollary 1. \mathcal{G}_l (left and right general eigenvalue problem of the Cauchy-Green deformation tensor, special case $\{\mathbf{M}_r^2, g_{\mu\nu}\} = \{\mathbb{R}^2, \delta_{\mu\nu}\}$):



(i)

Synthesis:

For the pair of positive-definite, symmetric matrices $\{\mathbf{C}_l, \mathbf{G}_l\}$ or $\{\mathbf{C}_r, \mathbf{G}_r\}$ a simultaneous diagonalization is

$$\mathbf{C}_l = \mathbf{J}_l^T \mathbf{J}_l \quad \mathbf{F}_l^T \mathbf{C}_l \mathbf{F}_l = \text{Diag}(\Lambda_1^2, \Lambda_2^2), \quad \mathbf{F}_l^T \mathbf{G}_l \mathbf{F}_l = I \quad (1.58 \text{ l})$$

versus

$$\mathbf{F}_r^T \mathbf{C}_r \mathbf{F}_r = \text{Diag}(\lambda_1^2, \lambda_2^2), \quad \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r = I \quad (1.58 \text{ r})$$

The right Frobenius matrix \mathbf{F}_r is an orthonormal matrix.



(ii)

Analysis:

"left eigenvalues", "left principal stretches"

$$|\mathbf{C}_l - \Lambda_i^2 \mathbf{G}_l| = 0 \quad (1.59 \text{ l})$$

$$\Lambda_{1,2}^2 = \Lambda_{\pm}^2 = \frac{1}{2} \{ \text{tr} \mathbf{C}_l \mathbf{G}_l^{-1} \pm \sqrt{(\text{tr} \mathbf{C}_l \mathbf{G}_l^{-1})^2 - 4 \det \mathbf{C}_l \mathbf{G}_l^{-1}} \} \quad (1.60 \text{ l})$$

"left eigenvectors"

$$\mathbf{F}_l = [\mathbf{f}_{l+}, \mathbf{f}_{l-}] \quad (1.61 \text{ l})$$

$$\mathbf{F}_{l+} = \left[\left(c_{22} - \Lambda_1^2 G_{22} \right)^2 G_{11} - 2(c_{12} - \Lambda_1^2 G_{12})(c_{22} - \Lambda_1^2 G_{22})G_{12} + \left(c_{12} - \Lambda_1^2 G_{12} \right)^2 G_{22} \right]^{-1/2} *$$

$$* \begin{bmatrix} c_{22} - \Lambda_1^2 G_{22} \\ -(c_{12} - \Lambda_1^2 G_{12}) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_{l-} = \left[\left(c_{11} - \Lambda_2^2 G_{11} \right)^2 G_{22} - 2(c_{12} - \Lambda_2^2 G_{12})(c_{11} - \Lambda_2^2 G_{11})G_{12} + \left(c_{12} - \Lambda_2^2 G_{12} \right)^2 G_{11} \right]^{-1/2} *$$

$$* \begin{bmatrix} -(c_{12} - \Lambda_2^2 G_{12}) \\ c_{11} - \Lambda_2^2 G_{11} \end{bmatrix} \quad (1.62\text{l})$$

"right eigenvalues", "right principal stretches"

$$|\mathbf{C}_r - \lambda_i^2 \mathbf{G}_r| = 0 \quad (1.59\text{r})$$

The right general eigenvalue problem reduces to the right special eigenvalue problem.

$$\lambda_{1,2}^2 = \lambda_{\pm}^2 = \frac{1}{2} \{ \operatorname{tr} \mathbf{C}_r \mathbf{G}_r^{-1} \pm \sqrt{(\operatorname{tr} \mathbf{C}_r \mathbf{G}_r^{-1})^2 - 4 \det \mathbf{C}_r \mathbf{G}_r^{-1}} \} =$$

$$= \frac{1}{2} \{ C_{11} + C_{22} \pm \sqrt{(C_{11} - C_{22})^2 + (2C_{12})^2} \} \quad (1.60\text{r})$$

"right eigenvectors"

Since the right Frobenius matrix \mathbf{F}_r is an orthonormal matrix, it can be represented by

$$\mathbf{F}_r = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad \forall \varphi \in [0, 2\pi] \quad (1.63)$$

$$\mathbf{F}_r = [\mathbf{f}_{r+}, \mathbf{f}_{r-}] \quad (1.61\text{r})$$

$$\mathbf{f}_{r+} = \left[\left(C_{22} - \lambda_+^2 \right)^2 + C_{12}^2 \right]^{-1/2} \begin{bmatrix} C_{22} - \lambda_+^2 \\ -C_{12} \end{bmatrix} \quad (1.62\text{r1})$$

$$\mathbf{f}_{r-} = \left[\left(C_{11} - \lambda_-^2 \right)^2 + C_{12}^2 \right]^{-1/2} \begin{bmatrix} -C_{12} \\ C_{11} - \lambda_-^2 \end{bmatrix} \quad (1.62\text{r2})$$



$$\tan \varphi = \frac{C_{12}}{C_{11} - \lambda_-^2} = \frac{2C_{12}}{C_{11} - C_{22} + \sqrt{(C_{11} - C_{22})^2 + (2C_{12})^2}} \quad (1.64)$$



$$\tan 2\varphi = \frac{2C_{12}}{C_{11} - C_{22}}$$

(1.65)

Corollary 1.3ⁱⁱ: (left and right general eigenvalue problem of the Euler-Lagrange deformation tensor, special case $\{\mathbb{M}_r^2, g_{\mu\nu}\} = \{\mathbb{R}^2, \delta_{\mu\nu}\}$):

(i)

Synthesis:

For the pair of symmetric matrices $\{\mathbf{E}_l, \mathbf{G}_l\}$ or $\{\mathbf{E}_r, \mathbf{G}_r\}$ where $\{\mathbf{G}_l, \mathbf{G}_r\}$ are positive-definite a simultaneous diagonalization is

$$\mathbf{F}_l^T \mathbf{E}_l \mathbf{F}_l = \text{Diag}(K_1, K_2), \quad \mathbf{F}_l^T \mathbf{G}_l \mathbf{F}_l = \mathbf{I} \quad (1.66 \text{ l})$$

versus

$$\mathbf{F}_r^T \mathbf{E}_r \mathbf{F}_r = \text{Diag}(\kappa_1, \kappa_2), \quad \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r = \mathbf{I} \quad (1.66 \text{ r})$$

The right Frobenius matrix \mathbf{F}_r is an orthonormal matrix.

(ii)

Analysis:

"left eigenvalues"

$$|\mathbf{E}_l - K_i \mathbf{G}_l| = 0 \quad (1.67 \text{ l})$$



$K_{1,2} = K_{\pm} = \frac{1}{2}\{tr \mathbf{E}_l \mathbf{G}_l^{-1} \pm \sqrt{(tr \mathbf{E}_l \mathbf{G}_l^{-1})^2 - 4 \det \mathbf{E}_l \mathbf{G}_l^{-1}}\}$

(1.68 l)

"left eigenvectors"

$$\mathbf{F}_l = [\mathbf{f}_{l+}, \mathbf{f}_{l-}] \quad (1.69 l)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{l+} &= \left[\left(e_{22} - K_1^2 G_{22} \right)^2 G_{11} - 2 \left(e_{12} - K_1^2 G_{12} \right) \left(e_{22} - K_1^2 G_{22} \right) G_{12} + \left(e_{12} - K_1^2 G_{12} \right)^2 G_{22} \right]^{-1/2} * \\ &\quad * \begin{bmatrix} e_{22} - K_1^2 G_{22} \\ -(e_{12} - K_1^2 G_{12}) \end{bmatrix} \\ \mathbf{f}_{l-} &= \left[\left(e_{11} - K_2^2 G_{11} \right)^2 G_{22} - 2 \left(e_{12} - K_2^2 G_{12} \right) \left(e_{11} - K_2^2 G_{11} \right) G_{12} + \left(e_{12} - K_2^2 G_{12} \right)^2 G_{11} \right]^{-1/2} * \\ &\quad * \begin{bmatrix} -(e_{12} - K_2^2 G_{12}) \\ e_{11} - K_2^2 G_{11} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.70 l)$$



"right eigenvalues"

$$|\mathbf{E}_r - \kappa_i \mathbf{I}_r| = 0 \quad (1.67 r)$$

The right general eigenvalue problem reduces to the right special eigenvalue problem.

$$\begin{aligned} \kappa_{1,2} = \kappa_{\pm} &= \frac{1}{2}\{tr \mathbf{E}_r \pm \sqrt{(tr \mathbf{E}_r)^2 - 4 \det \mathbf{E}_r}\} = \\ &= \frac{1}{2}\{E_{11} + E_{22} \pm \sqrt{(E_{11} - E_{22})^2 + (2E_{12})^2}\} \end{aligned} \quad (1.68 r)$$



"right eigenvectors"

Since the right Frobenius matrix \mathbf{F}_r is an orthonormal matrix, it can be represented by

$$\mathbf{F}_r = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad \forall \phi \in [0, 2\pi]. \quad (1.71)$$

$$\mathbf{F}_r = [\mathbf{f}_{r+}, \mathbf{f}_{r-}] \quad (1.69 r)$$

$$\mathbf{f}_{r+} = \left[(E_{22} - \kappa_+^2)^2 + E_{12}^2 \right]^{-1/2} \begin{bmatrix} E_{22} - \kappa_+^2 \\ -E_{12} \end{bmatrix} \quad (1.70\text{ r1})$$

$$\mathbf{f}_{r-} = \left[(E_{11} - \kappa_-^2)^2 + E_{12}^2 \right]^{-1/2} \begin{bmatrix} -E_{12} \\ E_{11} - \kappa_-^2 \end{bmatrix} \quad (1.70\text{ r2})$$

$$\tan \phi = \frac{E_{12}}{E_{11} - \kappa_-} = \frac{2E_{12}}{E_{11} - E_{22} + \sqrt{(E_{11} - E_{22})^2 + (2E_{12})^2}}, \quad (1.72)$$

$$\tan 2\phi = \frac{2E_{12}}{E_{11} - E_{22}}. \quad (1.73)$$



Corollary 1 $\delta_{\mathbb{M}_l^2}$ (conformeomorphism, conformal mapping, special case $\{\mathbb{M}_l^2, g_{\mu\nu}\} = \{\mathbb{R}^2, \delta_{\mu\nu}\}$):

Let $f : \mathbb{M}_l^2 \rightarrow \{\mathbb{R}^2, \delta_{\mu\nu}\}$ be an orientation preserving conformal mapping. Then the following conditions are equivalent.

(i)

$$\Psi_l(\dot{\mathbf{U}}_1, \dot{\mathbf{U}}_2) = \Psi_r(\dot{\mathbf{u}}_1, \dot{\mathbf{u}}_2)$$

for all tangent vectors $\{\dot{\mathbf{U}}_1, \dot{\mathbf{U}}_2\}$ and their images $\{\dot{\mathbf{u}}_1, \dot{\mathbf{u}}_2\}$, respectively.

(ii)

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_l &= \Lambda^2(\mathbf{U}_0)\mathbf{G}_l \quad \text{versus} \quad \mathbf{C}_r = \lambda^2\mathbf{I}, \quad \mathbf{C}_r^{-1} = \frac{1}{\lambda^2}\mathbf{I} \\ C_{11} &= C_{22} = \lambda^2, \quad C_{12} = C_{21} = 0 \\ C^{11} &= C^{22} = \lambda^{-2}, \quad C^{12} = C^{21} = 0 \end{aligned} \tag{1.74}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_l &= K(\mathbf{U}_0)\mathbf{G}_l \quad \text{versus} \quad \mathbf{E}_r = \kappa\mathbf{I}, \quad \mathbf{E}_r^{-1} = \kappa^{-1}\mathbf{I} \\ E_{11} &= E_{22} = \kappa, \quad E_{12} = 0 \\ E^{11} &= E^{22} = \kappa^{-1}, \quad E^{12} = 0 \end{aligned} \tag{1.75}$$

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}(\Lambda^2 - 1) \\ \Lambda^2 &= 2K + 1 \end{aligned} \quad \text{versus} \quad \begin{aligned} \frac{1}{2}(\lambda^2 - 1) &= \kappa \quad (1.76) \\ 2\kappa + 1 &= \lambda^2 \quad (1.77)$$

(iii)

$$\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda(\mathbf{U}_0) \quad \text{versus} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda(\mathbf{u}_0) \tag{1.78}$$

$$K_1 = K_2 = K(\mathbf{U}_0) \quad \text{versus} \quad \kappa_1 = \kappa_2 = \kappa(\mathbf{u}_0) \tag{1.79}$$

$$\Lambda^2(\mathbf{U}_0) = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \mathbf{C}_l \mathbf{G}_l^{-1} \quad \text{versus} \quad \lambda^2(\mathbf{u}_0) = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \mathbf{C}_r \tag{1.80}$$

left dilatation : : right dilatation

$$K = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \mathbf{E}_l \mathbf{G}_l^{-1} \quad \text{versus} \quad \kappa = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \mathbf{E}_r \tag{1.81}$$

$$\operatorname{tr} \mathbf{C}_l \mathbf{G}_l^{-1} = 2\sqrt{\det \mathbf{C}_l \mathbf{G}_l^{-1}} \quad \text{versus} \quad \operatorname{tr} \mathbf{C}_r = 2\sqrt{\det \mathbf{C}_r} \tag{1.82}$$

$$\operatorname{tr} \mathbf{E}_l \mathbf{G}_l^{-1} = 2\sqrt{\det \mathbf{E}_l \mathbf{G}_l^{-1}} \quad \text{versus} \quad \operatorname{tr} \mathbf{E}_r = 2\sqrt{\det \mathbf{E}_r} \tag{1.83}$$

(iv) *g-Korn-Lichtenstein equations*
(Cauchy-Riemann equations)

$$\begin{bmatrix} u_U \\ u_V \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{G_{11}G_{22} - G_{12}^2}} \begin{bmatrix} -G_{12} & G_{11} \\ -G_{22} & G_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_U \\ v_V \end{bmatrix} \tag{1.84}$$

subject to the integrability conditions $uvv = uv_U$ and $v_Uv = vv_U$.

Note that the two fundamental invariants of the confor-

mal mapping $f : \{\mathbb{M}_r^2, \mathbf{G}_{MN}\} \rightarrow \{\mathbb{R}^2, \delta_{\mu\nu}\}$, namely



$$I_1(\mathbf{C}_l) := \text{tr } \mathbf{C}_l \mathbf{G}_l^{-1} \quad \text{versus} \quad i_1(\mathbf{C}_r) := \text{tr } \mathbf{C}_r \quad (1.85)$$

$$I_2(\mathbf{C}_l) := \det \mathbf{C}_l \mathbf{G}_l^{-1} \quad \quad \quad i_2(\mathbf{C}_r) := \det \mathbf{C}_r \quad (1.86)$$

or or

$$I_1(\mathbf{E}_l) := \text{tr } \mathbf{E}_l \mathbf{G}_l^{-1} \quad \text{versus} \quad i_1(\mathbf{E}_r) := \text{tr } \mathbf{E}_r \quad (1.87)$$

$$I_2(\mathbf{E}_l) := \det \mathbf{E}_l \mathbf{G}_l^{-1} \quad \text{versus} \quad i_2(\mathbf{E}_r) := \det \mathbf{E}_r \quad (1.88)$$

become dependent ("syzygic") due to



$$I_1 = 2\sqrt{I_2} \quad \text{versus} \quad i_1 = 2\sqrt{i_2} \quad (1.89)$$

Thirdly, for a general diffeomorphism $f : \{\mathbb{M}_r^2, \mathbf{G}_{MN}\} \rightarrow \{\mathbb{R}^2, \delta_{\mu\nu}\}$ I_1 or i_1 also called *left* or *right dilatation measure* the isotropic part of a deformation while the shear components

$$\gamma_1 := E_{22} - E_{11}, \quad \gamma_2 := 2E_{12} \quad (1.90)$$

the anisotropic part of the deformation. We shall outline later that the invariant I_2 or i_2 measures *left* or *right areal distortion*.

A first remark has to be made towards the group theoretical representation of the left \mathbf{F}_l and right \mathbf{F}_r matrix of eigenvectors. In case of $\{\mathbb{M}_r^2, g_{\mu\nu}\} = \{\mathbb{R}^2, \delta_{\mu\nu}\}$ we took advantage of the fact that the right matrix \mathbf{F}_r of eigenvectors, (1.63) and (1.71), is an *orthonormal matrix* \mathbf{R} . In the general case $\{\mathbb{M}_r^2, \mathbf{G}_{MN}\} \rightarrow \{\mathbb{M}_r^2, g_{\mu\nu}\}$ the left \mathbf{F}_l and right \mathbf{F}_r matrix of eigenvectors enjoy the *polar decomposition*



$$\mathbf{F}_l = \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_1 \quad \text{versus} \quad \mathbf{F}_r = \mathbf{R}_3 \mathbf{S}_3 \quad (1.91 \text{ i})$$

versus *versus*

$$\mathbf{F}_l = \mathbf{S}_2 \mathbf{R}_2 \quad \text{versus} \quad \mathbf{F}_r = \mathbf{S}_4 \mathbf{R}_4 \quad (1.91 \text{ ii})$$

where the matrices \mathbf{R}_i are *orthonormal*, $\mathbf{R}_i^{-1} = \mathbf{R}_i^T$, while the matrices \mathbf{S}_i are by definition *symmetric*, $\mathbf{S}_i = \mathbf{S}_i^T$. These symmetric matrices S_i are sometimes called *stretch matrices*. For more details including numerical

examples we refer to *J. E. Marsden and T. J. R. Hughes* (1983 pp. 51–55), *T. C. T. Ting* (1985), *J. C. Simo and R. L. Taylor* (1991) and *R. W. Ogden* (1984 pp. 92–94).

Here we conclude with a *second remark* relating again to the *simultaneous diagonalization of two matrices*, e.g. the pairs of *Cauchy-Green* deformation tensors $\{C_l, G_l\}$ or $\{C_r, G_r\}$ and the pairs of *Euler-Lagrange* deformation tensors $\{E_l, G_l\}$ or $\{E_r, G_r\}$, respectively. Of course we could also aim at a *simultaneous diagonalization of three matrices*, e.g. the triplets

$$\boxed{\{E_l, C_l, G_l\} \text{ versus } \{E_r, C_r, G_r\}}$$

in particular



$$\begin{aligned} U_l^T G_l X_l &= S_l^1 \longleftrightarrow G_l = U_l S_l^1 X_l^{-1} \\ &\text{versus} \\ C_r &= U_r S_r^1 X_r^{-1} \longleftrightarrow U_r^T G_r X_r = S_r^1 \end{aligned} \quad (1.92 \text{ i})$$



$$\begin{aligned} X_l^T C_l Y_l &= S_l^2 \longleftrightarrow C_l = (X_l^{-1})^T S_l^2 Y_l^{-1} \\ &\text{versus} \\ C_r &= (X_r^{-1})^T S_r^2 Y_r^{-1} \longleftrightarrow X_r^T C_r Y_r = S_r^2 \end{aligned} \quad (1.92 \text{ ii})$$



$$\begin{aligned} Y_l^T E_l V_l &= S_l^3 \longleftrightarrow E_l = (Y_l^{-1})^T S_l^3 V_l^T \\ &\text{versus} \\ E_r &= (Y_r^{-1})^T S_r^3 V_r^T \longleftrightarrow Y_r^T E_r V_r = S_r^3 \end{aligned} \quad (1.92 \text{ iii})$$

where S^1, S^2, S^3 are certain quasidiagonal matrices, U, V unitary matrices and nonsingular matrices X_l, Y_l, X_r, Y_r , respectively. *But we are not able to diagonalize G_l, G_r , respectively, to unity.* The diagonalization of G_l, G_r , respectively, to unit matrices is by all means recommendable since accordingly all other tensors, e.g. C_l, C_r , respectively, or E_l, E_r , alternatively, refer to *unit vectors* which span the local tangent space of \mathbb{M}_l^2 or \mathbb{M}_r^2 , respectively. A tree of generalization of the ordinary singular value decompositions has been developed by *M. T. Chu* (1991 a,b), *B. de Moor and H. Zha* (1991), *H. Zha* (1991) and others to which we refer.

1. 9 Fourth multiplicative and additive measures of deformation, *areal distortion* and an equivalence theorem for equiareal mapping from the left to the right twodimensional Riemann manifold (*areomorphism*)

We shall define *areomorphism* as an equiareal mapping $\mathbb{M}_l^2 \rightarrow \mathbb{M}_r^2$ and present an *equivalence theorem* which relates areomorphism to a special structure of the *Cauchy-Green* deformation tensor, the *Euler-Lagrange* deformation tensor and the principal stretches before we are led to the general equations which govern an equiareal mapping.

Definition 1. 9 (equiareal mapping):



An orientation preserving diffeomorphism $f : \mathbb{M}_l^2 \rightarrow \mathbb{M}_r^2$ is called area preserving, equiareal (areomorphism, vector product preserving) if

$$\sqrt{\det \mathbf{G}_l} dU \wedge dV = \sqrt{\det \mathbf{G}_r} du \wedge dv \quad (1.93)$$

or equivalently

$$\Phi_l^2 = \Phi^2 := \frac{\sqrt{\det \mathbf{G}_r} du \wedge dv}{\sqrt{\det \mathbf{G}_l} dU \wedge dV} = 1 \iff (1.94)$$

$$1 = \frac{\sqrt{\det \mathbf{G}_l} dU \wedge dV}{\sqrt{\det \mathbf{G}_r} du \wedge dv} =: \Phi^2 = \Phi_r^2$$

or

$$S_{lr} := \sqrt{\det \mathbf{G}_r} du \wedge dv - \sqrt{\det \mathbf{G}_l} dU \wedge dV = 0 \quad (1.95 \text{ i})$$

$$\iff$$

$$S_{rl} := \sqrt{\det \mathbf{G}_l} dU \wedge dV - \sqrt{\det \mathbf{G}_r} du \wedge dv = 0 \quad (1.95 \text{ ii})$$

for all points of $\mathbb{M}_l^2, \mathbb{M}_r^2$, respectively, holds.

Indeed the *left surface element* $\sqrt{\det \mathbf{G}_l} dU \wedge dV$ as well as the *right surface element* $\sqrt{\det \mathbf{G}_r} du \wedge dv$ have enabled us to introduce *dual measures* to the *left length element* $dU^T \mathbf{G}_l dU$ as well as the *right length element* $du^T \mathbf{G}_r du$. There exist representations of the multiplica-

tive measure of areal distortion Φ_l^2, Φ_r^2 and of the additive measure of areal distortion S_{lr}, S_{rl} in terms of the *Cauchy-Green* deformation tensor, the *Euler-Lagrange* deformation tensor and the principal stretches which we have collected in Box 1.9.

Box 1.9: Areal distortion, representation of its multiplicative and additive measures

$$\mathbb{M}_l^2 \longrightarrow \mathbb{M}_r^2 :$$

$$\begin{cases} \sqrt{\det \mathbf{G}_l} dU \wedge dV = \sqrt{\det \mathbf{G}_r} du \wedge dv \\ \sqrt{\det \mathbf{G}_r} du \wedge dv = \sqrt{\det \mathbf{G}_l} dU \wedge dV \\ \sqrt{\det \mathbf{G}_l} dU \wedge dV = \sqrt{\det (\mathbf{G}_r - 2\mathbf{E}_r)} du \wedge dv \\ \sqrt{\det \mathbf{G}_r} du \wedge dv = \sqrt{\det (2\mathbf{E}_l + \mathbf{G}_l)} dU \wedge dV \\ \sqrt{\det \mathbf{G}_l} dU \wedge dV = \frac{1}{\det \mathbf{F}_r} \lambda_1 \lambda_2 du \wedge dv \\ \sqrt{\det \mathbf{G}_r} du \wedge dv = \frac{1}{\det \mathbf{F}_l} \Lambda_1 \Lambda_2 dU \wedge dV \end{cases}$$

$$\{\mathbb{M}_r^2, g_{\mu\nu}\} = \{\mathbb{R}^2, \delta_{\mu\nu}\} \implies$$

$$\sqrt{\det \mathbf{G}_l} dU \wedge dV = \lambda_1 \lambda_2 du \wedge dv.$$

$$\begin{cases} \Phi_l^2 = \sqrt{\det C_l G_l^{-1}} = \Lambda_1 \Lambda_2 \\ \Phi_r^2 = \sqrt{\det C_r G_r^{-1}} = \lambda_1 \lambda_2 \\ S_{lr} = (\sqrt{\det C_l} - \sqrt{G_l}) dU \wedge dV \\ S_{rl} = (\sqrt{\det C_r} - \sqrt{G_r}) du \wedge dv \end{cases}$$

$$S_{lr} = (\Lambda_1 \Lambda_2 - 1) \frac{1}{\det \mathbf{F}_l} dU \wedge dV$$

$$S_{rl} = (\lambda_1 \lambda_2 - 1) \frac{1}{\det \mathbf{F}_r} du \wedge dv$$

$$\{\mathbb{M}_r^2, g_{\mu\nu}\} = \{\mathbb{R}^2, \delta_{\mu\nu}\} \implies$$

$$S_{rl} = (\lambda_1, \lambda_2 - 1) du \wedge dv.$$



Theorem 1.9: (areomorphism, equiareal mapping):

Let $f : \mathbb{M}_l^2 \rightarrow \mathbb{M}_r^2$ be an orientation preserving equiareal mapping. Then the following conditions are equivalent.

(i)

$$\sqrt{\det \mathbf{G}_l} dU \wedge dV = \sqrt{\det \mathbf{G}_r} du \wedge dv$$

(ii)

$$\det C_r = \det \mathbf{G}_r, \quad \det C_l = \det \mathbf{G}_l,$$

$$\det(\mathbf{G}_r - 2\mathbf{E}_r) = \det \mathbf{G}_r, \quad \det(2\mathbf{E}_l + \mathbf{G}_l) = \det \mathbf{G}_l,$$

(iii)

$$\Lambda_1 \Lambda_2 = 1, \quad \lambda_1 \lambda_2 = 1,$$

(iv)

$$U_u V_v - U_v V_u = + \sqrt{\frac{\det \mathbf{G}_r}{\det \mathbf{G}_l}} = + \sqrt{\frac{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}{G_{11}G_{22} - G_{12}^2}} \quad (1.96 \text{ i})$$

$$u_U v_V - u_V v_U = + \sqrt{\frac{\det \mathbf{G}_l}{\det \mathbf{G}_r}} = + \sqrt{\frac{G_{11}G_{22} - G_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}} \quad (1.96 \text{ ii})$$

$$\{\mathbb{M}_r^2, g_{\mu\nu}\} = \{\mathbb{R}^2, \delta_{\mu\nu}\} \implies$$

$$u_U v_V - u_V v_U = \sqrt{G_{11}G_{22} - G_{12}^2}. \quad (1.96 \text{ iii})$$

The proof is straight-forward. Instead we comment on the partial differential equations (1.96) which govern an *equiareal mapping*. Given the left metric \mathbf{G}_l we meet in (1.96 ii) *again* the problem of the unknown functions $g_{\mu\nu}[u^\lambda(U^\Lambda)]$ since the mapping equations $u^\lambda(U^\Lambda)$ are to be determined. Indeed we can take advantage of the cover of both the *left* \mathbb{M}_l^2 and *right* \mathbb{M}_r^2 manifold by *isometric coordinates* such that $\sqrt{\det \mathbf{G}_l / \det \mathbf{G}_r}$ approach either one or a known function of (U, V) only. Of course, in case $\{\mathbb{M}_r^2, g_{\mu\nu}\} = \{\mathbb{R}^2, \delta_{\mu\nu}\}$, (1.96 iii), this problem does not appear!

In addition we note in *Box 1.3ⁱ* the *canonical criteria* for a *conformal mapping* (conformeomorphism), an *equiareal mapping* (areomorphism) and, of course, of an *isometry*.



Box 1.3ⁱ Canonical criteria for conformal, equiareal and isometric mapping

$$\text{conformeomorphism } \Lambda_1 = \Lambda_2, \lambda_1 = \lambda_2,$$

$$K_1 = K_2, \kappa_1 = \kappa_2,$$

$$\text{areomorphism } \Lambda_1 \Lambda_2 = 1, \lambda_1 \lambda_2 = 1,$$

$$K_1 K_2 + \frac{1}{2}(K_1 + K_2) = 0,$$

$$\kappa_1 \kappa_2 + \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2),$$

$$\text{isometry } \Lambda_1 = \Lambda_2 = 1, \lambda_1 = \lambda_2 = 1,$$

$$K_1 = K_2 = 0, \kappa_1 = \kappa_2 = 0$$

-does not apply according
to (1.53)-

Canonical local measures of departure from an isometry are accordingly



$$[(\Lambda_1 - 1)^2 + (\Lambda_2 - 1)^2]/2 =: \epsilon_{lA}^2 \quad (1.97 \text{ i})$$

versus

$$[(\lambda_1 - 1)^2 + (\lambda_2 - 1)^2]/2 =: \epsilon_{rA}^2 \quad (1.97 \text{ ii})$$

(G. B. Airy 1861)

$$[(\ln \Lambda_1)^2 + (\ln \Lambda_2)^2]/2 =: \epsilon_{lAK}^2 \quad (1.98 \text{ i})$$

versus

$$[(\ln \lambda_1)^2 + (\ln \lambda_2)^2]/2 =: \epsilon_{rAK}^2 \quad (1.98 \text{ ii})$$

(V. V. Kavrayski 1958)

as well as of departure from an equiareal mapping or a conformal mapping



$$(\Lambda_1 \Lambda_2 - 1)^2 =: \epsilon_{l \text{areal}}^2 .$$

versus (1.99)

$$\begin{aligned} (\lambda_1 \lambda_2 - 1)^2 &=: \epsilon_{r \text{areal}}^2 \\ (\Lambda_1 - \Lambda_2)^2 &=: \epsilon_{l \text{conf}}^2 \end{aligned}$$

versus (1.100)

$$(\lambda_1 - \lambda_2)^2 =: \epsilon_{r \text{conf}}^2$$

Those local measures of departure from isometry, conformality and equal area are globalized by integration over the area to be mapped.



$$I_{lA} := \frac{1}{S_l} \int dS_l \epsilon_{lA}^2$$

versus (1.101)

$$\begin{aligned} I_{rA} &:= \frac{1}{S_r} \int dS_r \epsilon_{rA}^2 \\ I_{lAK} &:= \frac{1}{S_l} \int dS_l \epsilon_{lAK}^2 \end{aligned}$$

versus (1.102)

$$\begin{aligned} I_{rAK} &:= \frac{1}{S_r} \int dS_r \epsilon_{rAK}^2 \\ I_{l \text{areal}} &:= \frac{1}{S_l} \int dS_l \epsilon_{l \text{areal}}^2 \end{aligned}$$

versus (1.103)

$$\begin{aligned} I_{r \text{areal}} &:= \frac{1}{S_r} \int dS_r \epsilon_{r \text{areal}}^2 \\ I_{l \text{conf}} &:= \frac{1}{S_l} \int dS_l \epsilon_{l \text{conf}}^2 \end{aligned}$$

versus (1.104)

$$I_{r \text{conf}} := \frac{1}{S_r} \int dS_r \epsilon_{r \text{conf}}^2$$

where

$$dS_l = * \sqrt{\det G_l} dU \wedge dV \text{ versus } dS_r = * \sqrt{\det G_r} du \wedge dv$$

(1.105)

denote the *Hodge star* of the surface element.

Diese Seite ist absichtlich leer

2 Koordinatensysteme für die im allgemeinen schiefachsigen Kartenprojektionen

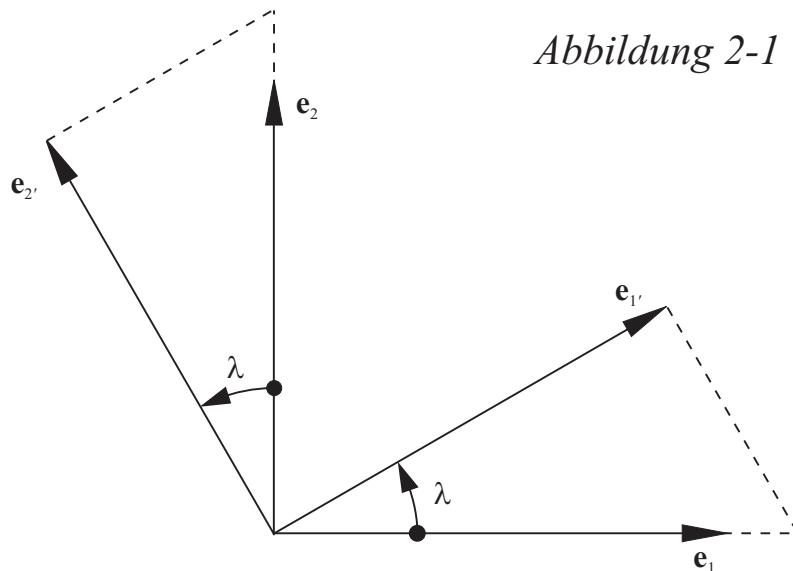
→ Klassifikation von Kartenprojektionen nach dem Konstruktionsprinzip – konstruktive Berechnung –

Projektionsflächen: Ebene, Zylinder, Kegel

Urbild: Kugel, Rotationsellipsoid

Wir behandeln zunächst nur Projektionen und Abbildungen der Kugel.
Um die im allgemeinen schiefachsigen Projektionen einführen zu können, behandeln wir zunächst nur Rotationen zwischen Bezugssystemen.

In der *Ebene* (zweidimensionaler Vektorraum) genügt ein einziger Winkel λ , um eine Rotation von einem rechtwinkligen Koordinatensystem in ein anderes zu beschreiben.



Orthonormale Basisvektoren $(e_1, e_2), (e_{1'}, e_{2'})$

$$\begin{aligned} e_{1'} &= e_1 \cos \lambda + e_2 \sin \lambda \\ e_{2'} &= -e_1 \sin \lambda + e_2 \cos \lambda \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} e_{1'} \\ e_{2'} \end{bmatrix} = R(\lambda) \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$$

Duale Transformation der entlang der orthonormalen Basisvektoren gemessenen rechtwinkligen Koordinaten $(x, y), (x', y')$ oder $(x^1, x^2), (x^{1'}, x^{2'})$

$$\begin{bmatrix} x^{1'} \\ x^{2'} \end{bmatrix} = R(\lambda) \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix}, \quad R(\lambda) := \begin{bmatrix} \cos \lambda & \sin \lambda \\ -\sin \lambda & \cos \lambda \end{bmatrix}$$

Arraynotation; $R(\lambda)$ ist ein 2×2 Array (Matrix)

$$\mathbf{e}' = R(\lambda)\mathbf{e} \quad , \quad \mathbf{x}' = R(\lambda)\mathbf{x}$$

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix}$$

Im *dreidimensionalen Euklidischen Raum* bedarf es dreier Parameter, um eine Rotation eindeutig zu beschreiben, z.B. der Richtung der Drehachsen (Längen- und Breitenwinkel) und des Drehwinkels um diese Achse. Hier wollen wir die Rotation in *drei einzelne Rotationen* um bestimmte vorgegebene Achsen aufspalten. Falls wir drei Rotationen hintereinanderschalten, so lässt sich jede beliebige Rotation als Resultierende erhalten. Insbesondere bieten sich Rotationen um jeweils einen der Basisvektoren an. Drei verschiedene Elementardrehungen um die erste, zweite oder dritte Achse wollen wir mit den orthogonalen Matrizen R_1, R_2, R_3 kennzeichnen.

Bei einer Drehung um die dritte Achse ändert sich der dritte Basisvektor nicht. Dagegen ändern sich der erste und zweite Basisvektor gerade so, wie wir es oben für den zweidimensionalen Fall dargestellt haben. Die dreidimensionale Drehmatrix R_3 erhalten wir, indem wir die zweidimensionale Drehmatrix R einfach erweitern:

$$R_3(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Auf gleiche Weise erhalten wir die Drehmatrix R_1 : hier bleibt der erste Basisvektor unverändert, weil um diesen Basisvektor gedreht wird, während der zweite und dritte Basisvektor, vom Basisvektor \mathbf{e}_1 aus gesehen, ein Rechtssystem bilden. Vertauschen wir Zeilen und Spalten zyklisch, so erhalten wir

$$R_1(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

Bei der Drehmatrix R_2 schließlich bleibt der zweite Basisvektor unverändert, während der dritte und erste Basisvektor (in dieser Reihenfolge), vom Basisvektor \mathbf{e}_2 aus gesehen, ein Rechtssystem bilden. Vertauschen wir weiter Zeilen und Spalten zyklisch, so erhalten wir

$$R_2(\beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}.$$

Beispiel: Zusammengesetzte Rotation vom Typ Cardan

$$\mathbf{e}' = R_3(\gamma)R_2(\beta)R_1(\alpha)\mathbf{e}$$

	$R_1(\alpha)$	1	0	0
		0	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$
		0	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$
$R_2(\beta)$				
$\cos \beta$	0	$-\sin \beta$	$\cos \beta$	$\sin \alpha \sin \beta$
0	1	0	0	$\cos \alpha$
$\sin \beta$	0	$\cos \beta$	$\sin \beta$	$-\sin \alpha \cos \beta$
$\cos \gamma$	$\sin \gamma$	0		
$-\sin \gamma$	$\cos \gamma$	0	$\cos \beta \cos \gamma$	$\sin \alpha \sin \beta \cos \gamma$
0	0	1	$+\cos \alpha \sin \gamma$	$-\cos \alpha \sin \beta \cos \gamma$
$R_3(\gamma)$				
		$-\cos \beta \sin \gamma$	$-\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$	$+\sin \alpha \sin \gamma$
			$+\cos \alpha \cos \gamma$	$\cos \alpha \sin \beta \sin \gamma$
				$+ \sin \alpha \cos \gamma$
		$\sin \beta$	$-\sin \alpha \cos \beta$	$\cos \alpha \cos \beta$
				$R_3(\gamma)R_2(\beta)R_1(\alpha)$

Beispiel: Zusammengesetzte Rotation vom Typ Euler

$$\mathbf{e}' = R_3(\phi)R_1(\theta)R_3(\psi)\mathbf{e}$$

	$R_3(\psi)$	$\cos \psi$	$\sin \psi$	0
		$-\sin \psi$	$\cos \psi$	0
		0	0	1
$R_1(\theta)$				
1	0	0	$\cos \psi$	0
0	$\cos \theta$	$\sin \theta$	$-\cos \theta \sin \psi$	$\cos \theta \cos \psi$
0	$-\sin \theta$	$\cos \theta$	$\sin \theta \sin \psi$	$-\sin \theta \cos \psi$
$R_3(\phi)$				
		$\cos \phi \cos \psi$	$\cos \phi \sin \psi$	$\sin \phi \sin \theta$
		$-\sin \phi \cos \theta \sin \psi$	$+\sin \phi \cos \theta \cos \psi$	
		$-\sin \phi \cos \psi$	$-\sin \phi \sin \psi$	$\cos \phi \sin \theta$
$\cos \phi$	$\sin \phi$	0		
$-\sin \phi$	$\cos \phi$	0	$-\cos \phi \cos \theta \sin \psi$	$+\cos \phi \cos \theta \cos \psi$
0	0	1		
		$\sin \theta \sin \psi$	$-\sin \theta \cos \psi$	$\cos \theta$
				$R_3(\phi)R_1(\theta)R_3(\psi)$

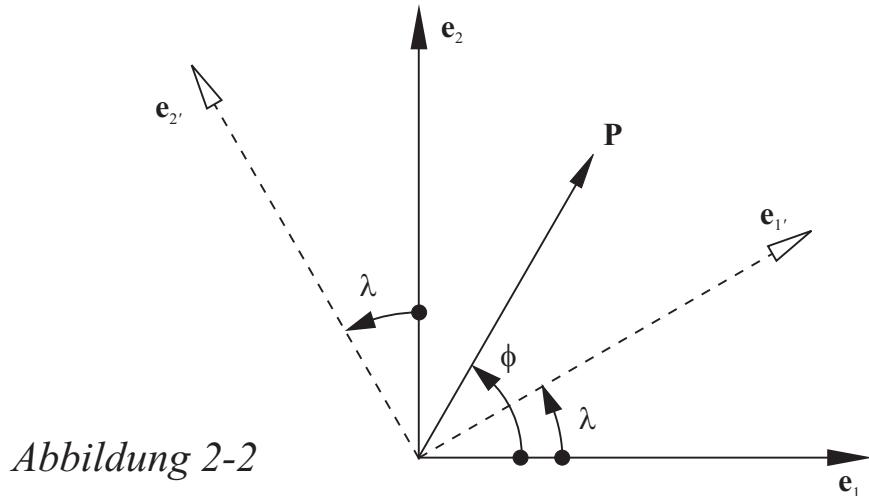
Leider sind weder Cardan, noch Euler Winkel *reguläre* Elemente, um eine dreidimensionale Rotation zu beschreiben. Stattdessen werden sie als *singuläre* Elemente bezeichnet und zwar aus folgendem Grunde: Beispielsweise wird die Eulersche Drehmatrix obigen Types singulär, falls $\theta = n\pi$ ($n =$

$0, 1, 2, \dots$) auftritt. In diesem Fall wird $R_3(\phi)R_1(\theta)R_3(\psi) = R_3(\phi)R_3(\psi) = R_3(\phi + \psi)$.

Die Winkel ψ und Φ sind unbestimmt!

Als reguläre Elemente, welche eine Rotation singularitätenfrei parametrisieren, wurden deshalb *Quaternionen* eingeführt, die wir nachfolgend vorstellen möchten.

Dazu betrachten wir zunächst einmal eine Rotation in der *Ebene*.



Wir beschreiben die Lage eines Punktes durch *komplexe Zahlen*, z.B.

$$c = x^1 + ix^2$$

in der *fixen* Basis (e_1, e_2) . Eine sog. *polare Darstellung* (Eulersche Darstellung einer komplexen Zahl) ist

$$c = \|c\| \exp i\phi = \|c\|(\cos \phi + i \sin \phi)$$

wobei $\|c\|$ der Betrag der komplexen Zahl, ϕ seine Orientierung ist. Alternativ beschreiben wir den Punkt in der rotierenden Basis $(e_{1'}, e_{2'})$:

$$C = y^1 + iy^2$$

oder

$$C = \|c\| \exp i(\phi - \lambda)$$

$$C(c) = y^1 + iy^2 = r(x^1 + ix^2)$$

oder $y^1 + iy^2 = (\cos \lambda - i \sin \lambda)(x^1 + ix^2)$.

Wir sprechen wegen $C^*C = c^*c$ (c^* das Konjugiertkomplexe von c) von einer *Isometrie*. Die komplexe Zahl $\cos \lambda - i \sin \lambda$ heißt auf Grund von

$$(\cos \lambda - i \sin \lambda)^{-1} = (\cos \lambda - i \sin \lambda)^*, \quad r^{-1} = r^*$$

unitär.

Wenden wir uns jetzt dem *dreidimensionalen Euklidischen Raum* zu. Bisher sammelten wir die Basisvektoren $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ bzw. $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$ in 3×1 Spaltenarrays.

Alternativ stellen wir sie in 2×2 Arrays vom nachfolgenden Typ dar:

$$E = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_1 - i\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2 & -\mathbf{e}_3 \end{bmatrix}, \quad E' = \begin{bmatrix} \mathbf{e}'_3 & \mathbf{e}'_1 - i\mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}'_1 + i\mathbf{e}'_2 & -\mathbf{e}'_3 \end{bmatrix}$$

Als 3×1 und 2×2 Einheitsarrays führen wir

$$\sigma_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_1 := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Sigma_2 := \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \Sigma_3 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ein. ($\Sigma_i, i = 1, 2, 3$ heißen "Pauli Spinmatrizen")

$\mathbf{e} = \mathbf{e}_i \sigma_i$, $\mathbf{e}' = \mathbf{e}'_i \sigma_i$ (Summationskonvention)

$\mathbf{E} = \mathbf{e}_i \Sigma_i$, $\mathbf{E}' = \mathbf{e}'_i \Sigma_i$ (Summationskonvention)

Die orthogonale Transformation $\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{e}'$, die wir in den beiden Beispielen vorstellten, d.h. $\mathbf{e}' = R\mathbf{e}$, können wir jetzt analog in Arraynotation schreiben.

$$\begin{aligned} \mathbf{e}' &= R\mathbf{e}, \quad O(R) = 3 \times 3, \quad R \text{ reell} \\ \mathbf{E}' &= R\mathbf{E}R^*, \quad O(R) = 2 \times 2, \quad R \text{ komplex} \end{aligned}$$

$|R| = 1$ (eigentliche Rotation, Rotation ohne Spiegelung), $R^*R = I$ (Einheitsmatrix), $R^{-1} = R^*$ unitär (reell: orthogonal)

Es gelingt nun der Brückenschlag zu unserem Beispiel der komplexen Zahlen-Ebene. Dort stellten wir die Rotation durch die komplexe Zahl $\cos \lambda - i \sin \lambda =$

r dar, welche ebenfalls die Eigenschaft der Unitarität hatte.

Sei

$$Y = \begin{bmatrix} y^3 & y^1 - iy^2 \\ y^1 + iy^2 & -y^3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & -x^3 \end{bmatrix}$$

eine der komplexen Zahlenebene analoge dreidimensionale Arraydarstellung des Punktes P . Jetzt lautet die rotatorische Koordinatentransformation

$$Y = RXR^*.$$

Die unitäre Matrix R der Ordnung 2×2 besteht aus komplexen Zahlen, die es noch aufzufinden gilt. Offensichtlich erfüllt das *Paar der komplexen Zahlen* (Spinor) $\gamma_1 = q_0 + iq_3$, $\gamma_2 = q_2 + iq_1$ in der Matrix

$$R_{2 \times 2} = R(\gamma_1, \gamma_2) = \begin{bmatrix} \gamma_1^* & -\gamma_2 \\ \gamma_2^* & \gamma_1 \end{bmatrix}$$

unsere Postulate auf Unitarität und Isometrie.

$$R_{2 \times 2}^{-1} = R_{2 \times 2}^*, |R_{2 \times 2}| = \gamma_1 \gamma_1^* + \gamma_2 \gamma_2^* = \|\mathbf{q}\|^2 = 1$$

$$\|\mathbf{q}\|^2 = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$$

beschreibt eine Quaternion von der Länge Eins. Die Quaternionen spannen einen *vierdimensionalen Vektorraum* auf. Transformieren wir die komplexe 2×2 Drehmatrix R , dargestellt in Koordinaten der Quaternionen, auf die reelle 3×3 Drehmatrix R , so gewinnen wir die sog. Rodriguez Matrix $(SU2) \sim (SO3)$

$$R_{q_3 \times 3} = \frac{1}{\|\mathbf{q}\|^2} \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & -2q_0q_3 + 2q_1q_2 & 2q_0q_2 + 2q_1q_3 \\ 2q_0q_3 + 2q_1q_2 & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & -2q_0q_1 + 2q_2q_3 \\ -2q_0q_2 + 2q_1q_3 & 2q_0q_1 + 2q_2q_3 & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix}$$

Ähnlich der polaren Darstellung einer komplexen Zahl (Eulersche Darstellung) erlaubt auch die Quaternion eine polare Darstellung:

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \|\mathbf{q}\| \exp \phi \frac{q_1 \mathbf{e}_1 + q_2 \mathbf{e}_2 + q_3 \mathbf{e}_3}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} \\ &= \|\mathbf{q}\| \left(\cos \phi \mathbf{e}_0 + \sin \phi \frac{q_1 \mathbf{e}_1 + q_2 \mathbf{e}_2 + q_3 \mathbf{e}_3}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} \right) \end{aligned}$$

$\cos \phi \mathbf{e}_0$ entspricht demselben Ausdruck in der komplexen Zahl, in der der Nullbasisvektor nicht ausdrücklich angeschrieben wurde.

$$\mathbf{e} := \frac{q_1 \mathbf{e}_1 + q_2 \mathbf{e}_2 + q_3 \mathbf{e}_3}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} = \cos \lambda_0 \cos \phi_0 \mathbf{e}_1 + \sin \lambda_0 \cos \phi_0 \mathbf{e}_2 + \sin \phi_0 \mathbf{e}_3$$

beschreibt den Einheitsvektor des resultierenden Drehvektors. (λ_0, ϕ_0) sind die sphärischen Koordinaten dieses Einheitsvektors \mathbf{e} .

Berühmt ist insbesondere die Darstellung der 2×2 komplexen Drehmatrix als Funktion der "Pauli Spinmatrizen":

$$\begin{aligned} R_{q_{2 \times 2}} &= \begin{bmatrix} q_0 - iq_3 & -q_2 - iq_1 \\ q_2 - iq_1 & q_0 + iq_3 \end{bmatrix} \\ &= q_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - i(q_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + q_2 \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} + q_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}) \\ &= q_\alpha E_\alpha \quad (\text{Summationskonvention, } \alpha = 0, 1, 2, 3) \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} R_q(\phi, \lambda_0, \phi_0) &= \cos \phi \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\quad -i \sin \phi \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cos \lambda_0 \cos \phi_0 + \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \sin \lambda_0 \cos \phi_0 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \sin \phi_0 \right) \end{aligned}$$

2ϕ ist der resultierende Drehwinkel, (λ_0, ϕ_0) sind Länge und Breite der resultierenden Drehachse. Die Übersetzung von Euler Winkel in Quaternionen erfolgt entsprechend der Regeln

$$R_3(\psi) \sim \mathbf{q} = \mathbf{e}_0 \cos \frac{\psi}{2} + \mathbf{e}_3 \sin \frac{\psi}{2}$$

$$R_1(\theta) \sim \mathbf{q} = \mathbf{e}_0 \cos \frac{\theta}{2} + \mathbf{e}_1 \sin \frac{\theta}{2}$$

$$R_2(\phi) \sim \mathbf{q} = \mathbf{e}_0 \cos \frac{\phi}{2} + \mathbf{e}_3 \sin \frac{\phi}{2}$$

so daß

$$\begin{aligned}
 q_0 &= \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi + \phi}{2} \\
 q_1 &= \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi - \phi}{2} \\
 q_2 &= \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi - \phi}{2} \\
 q_3 &= \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi + \phi}{2}
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 \tan \psi &= +\frac{q_0 q_2 + q_1 q_3}{q_0 q_1 - q_2 q_3} \\
 \cos \theta &= q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \\
 \tan \phi &= -\frac{q_0 q_2 - q_1 q_3}{q_0 q_1 + q_2 q_3}
 \end{aligned}$$

geltten.

Weitergehende Diskussion in E. Grafarend: Reference Frame Rotation - regularized theory by quaternions and spinors - in: Geodesy in Transition, ed. K. P. Schwarz and G. Lachapelle, p. 185-225, Calgary 1983

Kurzer Rückblick:

zweidimensionale Drehung in der Ebene

dreidimensionale Drehung im dreidimensionalen Euklidischen Raum

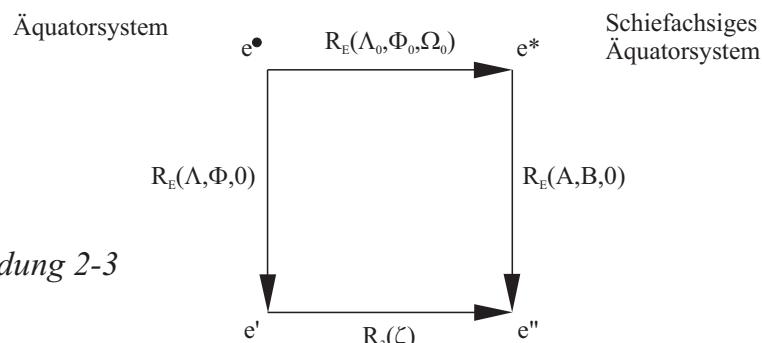
Parametrisierungen:

singuläre Elemente vom Typ Cardan und Euler Winkel

reguläre Elemente vom Typ Quaternionen und Spinoren

Jetzt sind wir hinreichend ausgerüstet, ein orthonormales "Äquatorsystem" in die *allgemein schiefachsige Lage* zu transformieren, genauer zu rotieren.

Diagramm



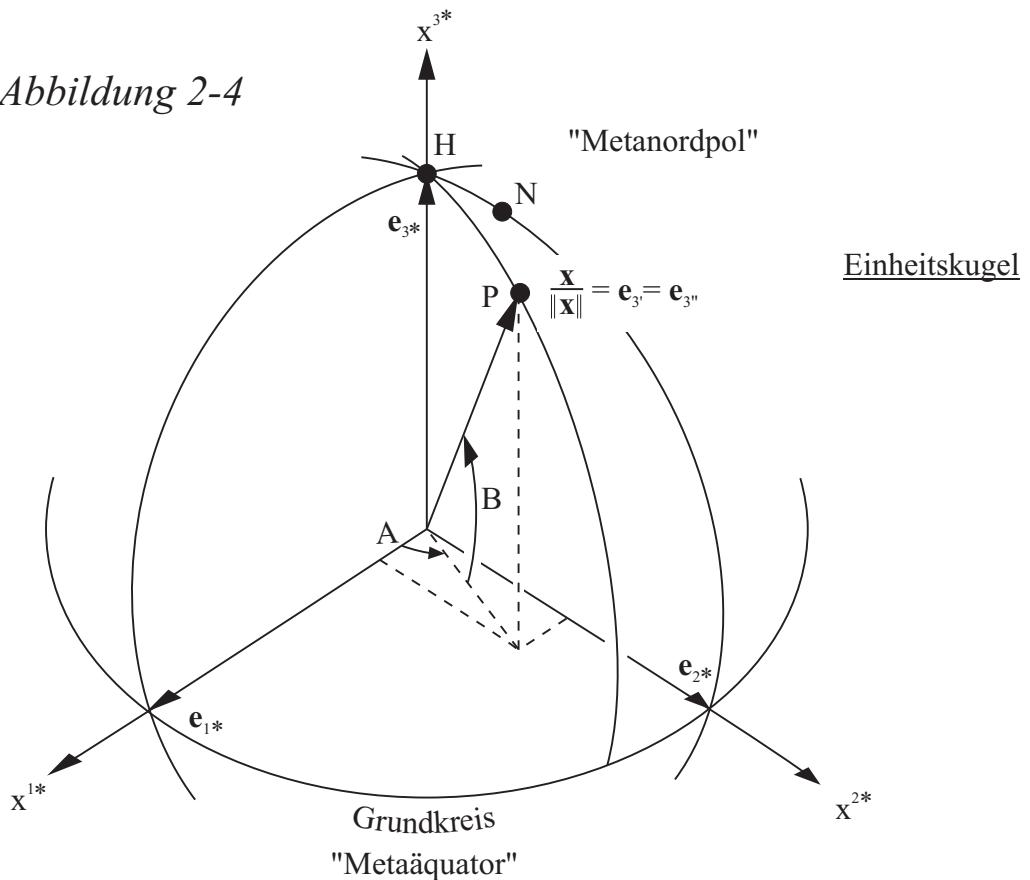
$$\mathbf{e}_{3'} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \quad \mathbf{e}_{3''} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$$

Gegenüber einem Äquatorsystem, bestehend aus dem orthonormierten Dreibein $(\mathbf{e}_{1\bullet}, \mathbf{e}_{2\bullet}, \mathbf{e}_{3\bullet})$ - z.B. Greenwich-Richtung $\mathbf{e}_{1\bullet}$, Richtung der Drehachse $\mathbf{e}_{3\bullet}$ wird ein allgemein gedrehtes *schiefachsiges System* $(\mathbf{e}_{1^*}, \mathbf{e}_{2^*}, \mathbf{e}_{3^*})$ eingeführt. Die Rotation $e^\bullet \rightarrow e^*$ wird durch Euler Winkel $(\Lambda_0, \Phi_0, \Omega_0)$ parametrisiert, namentlich durch die Euler Drehmatrix

$$R_E(\Lambda_0, \Phi_0, \Omega_0) := R_3(\Omega_0)R_2\left(\frac{\pi}{2} - \Phi_0\right)R_3(\Lambda_0)$$

(Λ_0, Φ_0) sind die sphärischen Koordinaten der Drehachse oder der "schiefen Achse", Ω_0 ist der Drehwinkel in der *neuen Äquatorebene*, genannt *Grundkreis*. Der "alte" Nordpol geht in den *neuen Pol*, genannt *Hauptpunkt H* über.

Abbildung 2-4



Im *schiefachsigen* Koordinatensystem beschreiben wir die sphärische Lage eines Punktes P (Ortsvektor \mathbf{x}) durch die Länge A und die Breite B , hingegen im ursprünglichen Koordinatensystem durch die Länge Λ (konventionell gegenüber Greenwich) und die Breite Φ .

Das obige Diagramm wird erst dann *kommutativ* ("linker Weg gleich rechter Weg"), falls wir in der Ebene senkrecht zum normierten Ortsvektor $\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$ eine Drehung um die 3'-Achse um den Winkel ζ ("ambiguity") zulassen. Tatsächlich bedarf es hierzu einigen Nachdenkens.

Diagramm

$$\mathbf{e}^{\bullet} \longrightarrow \mathbf{e}' = R_E(\Lambda, \Phi, 0)\mathbf{e}^{\bullet} = R_E(\Lambda, \Phi, 0)R_E^T(\Lambda_0, \Phi_0, \Omega_0)\mathbf{e}^*$$

$$\mathbf{e}^* \longrightarrow \mathbf{e}'' = R_E(A, B, 0)\mathbf{e}^*$$

$$\mathbf{e}^{\bullet} \longrightarrow \mathbf{e}^* = R_E(\Lambda_0, \Phi_0, \Omega_0)\mathbf{e}^{\bullet}$$

$$\mathbf{e}' \longrightarrow \mathbf{e}'' = R_3(\zeta)\mathbf{e}' \Rightarrow \mathbf{e}' = R_3^T(\zeta)\mathbf{e}'' = R_3^T(\zeta)R_E(A, B, 0)\mathbf{e}^*$$

$$R_E(\Lambda, \Phi, 0)R_E^T(\Lambda_0, \Phi_0, \Omega_0) = R_3^T(\zeta)R_E(A, B, 0)$$

$$R_2\left(\frac{\pi}{2} - \Phi\right)R_3(\Lambda)R_3^T(\Lambda_0)R_2^T\left(\frac{\pi}{2} - \Phi_0\right)R_3^T(\Omega_0) = R_3^T(\zeta)R_2\left(\frac{\pi}{2} - B\right)R_3(A)$$

$$\Rightarrow$$

$$R_2\left(\frac{\pi}{2} - B\right)R_3(A + \Omega_0) = R_3(\zeta)R_2\left(\frac{\pi}{2} - \Phi\right)R_3(\Lambda - \Lambda_0)R_2^T\left(\frac{\pi}{2} - \Phi_0\right)$$

Auf Grund der Orthogonalität der einzelnen Drehmatrizen sind nur jeweils drei Matrixelemente aus den insgesamt neun Elementen unabhängig. Wir listen die Matrixelemente (3, 3), (3, 2), (3, 1):

(I) Element (3, 3):

$$\sin B = \cos \Phi \cos \Phi_0 \cos \Delta \Lambda + \sin \Phi \sin \Phi_0 \quad "sphärischer Seiten-Kosinussatz"$$

(II) Element (3, 2):

$$\sin(A + \Omega_0) \cos B = \cos \Phi \sin \Delta \Lambda \quad "sphärischer Sinussatz"$$

(III) Element (3, 1):

$$\cos(A + \Omega_0) \cos B = \cos \Phi \sin \Phi_0 \cos \Delta \Lambda - \sin \Phi \cos \Phi_0 \quad "sphärischer Sinus-Kosinussatz"$$

linke Seite des Matrixgleichungssystems:

$$R_2\left(\frac{\pi}{2} - B\right)R_3(A + \Omega_0) = \begin{bmatrix} \cos(A + \Omega_0) \sin B & \sin(A + \Omega_0) \sin B & -\cos B \\ -\sin(A + \Omega_0) & \cos(A + \Omega_0) & 0 \\ \cos(A + \Omega_0) \cos B & \sin(A + \Omega_0) \cos B & \sin B \end{bmatrix}$$

rechte Seite des Matrixgleichungssystems:

$$R_3(\zeta)R_2\left(\frac{\pi}{2} - \Phi\right)R_3(\Lambda - \Lambda_0)R_2^T\left(\frac{\pi}{2} - \Phi_0\right) =$$

$\begin{array}{l} \cos \zeta \sin \Phi \sin \Phi_0 \cos \Delta \Lambda \\ + \cos \zeta \cos \Phi \cos \Phi_0 \\ - \sin \zeta \sin \Phi_0 \sin \Delta \Lambda \\ \hline \hline \sin \zeta \cos \Phi \sin \Phi_0 \cos \Delta \Lambda \\ + \sin \zeta \cos \Phi \cos \Phi_0 \\ - \cos \zeta \sin \Phi_0 \sin \Delta \Lambda \\ \hline \hline \cos \Phi \sin \Phi_0 \cos \Delta \Lambda \\ - \sin \Phi \cos \Phi_0 \end{array}$	$\begin{array}{l} \cos \zeta \sin \Phi \cos \Delta \Lambda \\ + \sin \zeta \cos \Delta \Lambda \\ \hline \hline \sin \zeta \sin \Phi \sin \Delta \Lambda \\ + \cos \zeta \cos \Delta \Lambda \\ \hline \hline \cos \Phi \sin \Delta \Lambda \end{array}$	$\begin{array}{l} \cos \zeta \sin \Phi \cos \Phi_0 \cos \Delta \Lambda \\ - \cos \zeta \cos \Phi \sin \Phi_0 \\ - \sin \zeta \cos \Phi_0 \sin \Delta \Lambda \\ \hline \hline \sin \zeta \sin \Phi \cos \Phi_0 \cos \Delta \Lambda \\ - \sin \zeta \cos \Phi \sin \Phi_0 \\ - \cos \zeta \cos \Phi_0 \sin \Delta \Lambda \\ \hline \hline \cos \Phi \cos \Phi_0 \cos \Delta \Lambda \\ + \sin \Phi \sin \Phi_0 \end{array}$
---	--	---

1. Aufgabe

gegeben: $\Lambda, \Phi; \Lambda_0, \Phi_0, \Omega_0$
 gesucht: A, B

Umrechnungsformeln:

$$(1) \cot(A + \Omega_0) = \frac{-\cos \Phi_0 \tan \Phi + \sin \Phi_0 \cos(\Lambda - \Lambda_0)}{\sin(\Lambda - \Lambda_0)} \quad (\text{Ableitung: (III)/(II)})$$

oder

$$(1') \sin(A + \Omega_0) = \frac{\cos \Phi \sin(\Lambda - \Lambda_0)}{\cos B} \quad (\text{Ableitung: (II)})$$

$$(2) \sin B = \sin \Phi_0 \sin \Phi + \cos \Phi_0 \cos \Phi \cos(\Lambda - \Lambda_0) \quad (\text{Ableitung: (I)})$$

2. Aufgabe

gegeben: $A, B; \Lambda_0, \Phi_0, \Omega_0$
 gesucht: Λ, Φ

Umrechnungsformeln:

$$(1) \cot(\Lambda - \Lambda_0) = \frac{1}{\sin(A + \Omega_0)} [\sin \Phi_0 \cos(A + \Omega_0) + \cos \Phi_0 \tan B]$$

Ableitung: multipliziere: $\begin{array}{c} (I) \\ (III) \end{array} \text{ mal } \begin{array}{c} \cos \Phi_0 \\ \sin \Phi_0 \end{array} \Bigg] \text{ addiere}$

$$\frac{(I)^* + (III)^*}{(II)} \Rightarrow \cot(\Lambda - \Lambda_0)$$

oder

$$(1') \sin(\Lambda - \Lambda_0) = \frac{1}{\cos \Phi} \sin(A + \Omega_0) \cos B$$

$$(2) \sin \Phi = \sin \Phi_0 \sin B - \cos \Phi_0 \cos(A + \Omega_0) \cos B$$

Ableitung: $\begin{array}{c} \text{multipliziere: (III) mal } \cos \Phi_0 \\ \text{ersetze } \cos \Phi_0 \cos \Phi \cos(\Lambda - \Lambda_0) \\ \text{aus (I) und sortiere} \end{array} \Bigg] \Rightarrow (2)$

Manchmal ist auch die hier nicht behandelte *Aufgabe* interessant, aus (A, B, Λ, Φ) die Werte $(\Lambda_0, \Phi_0, \Omega_0)$ abzuleiten.

$$\mathbf{e}^{\bullet} \longrightarrow \mathbf{e}^* = R_E(\Lambda_0, \Phi_0, \Omega_0) \mathbf{e}^{\bullet} = R_3(\Omega_0) R_2\left(\frac{\pi}{2} - \Phi_0\right) R_3(\Lambda_0) \mathbf{e}^{\bullet}$$

$R_2\left(\frac{\pi}{2} - \Phi_0\right) R_3(\Lambda_0)$	$R_3(\Omega_0)$		$\cos \Lambda_0 \sin \Phi_0$	$\sin \Lambda_0 \sin \Phi_0$	$-\cos \Phi_0$
$\cos \Omega_0$	$\sin \Omega_0$	0	$\cos \Omega_0 \cos \Lambda_0 \sin \Phi_0$	$\cos \Omega_0 \sin \Lambda_0 \sin \Phi_0$	$-\cos \Omega_0 \cos \Phi_0$
$-\sin \Omega_0$	$\cos \Omega_0$	0	$-\sin \Omega_0 \sin \Lambda_0$	$+\sin \Omega_0 \cos \Lambda_0$	0
0	0	1	-----	-----	-----
			$-\sin \Omega_0 \cos \Lambda_0 \sin \Phi_0$	$-\sin \Omega_0 \sin \Lambda_0 \sin \Phi_0$	$+\sin \Omega_0 \cos \Phi_0$
			$-\cos \Omega_0 \sin \Lambda_0$	$+\cos \Omega_0 \cos \Lambda_0$	-----
			-----	-----	-----
			$\cos \Lambda_0 \cos \Phi_0$	$\sin \Lambda_0 \cos \Phi_0$	$\sin \Phi_0$

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_{1^*} &= (\cos \Omega_0 \cos \Lambda_0 \sin \Phi_0 - \sin \Omega_0 \sin \Lambda_0) \mathbf{e}_1 \bullet \\
&\quad + (\cos \Omega_0 \sin \Lambda_0 \sin \Phi_0 + \sin \Omega_0 \cos \Lambda_0) \mathbf{e}_2 \bullet \\
&\quad - \cos \Omega_0 \cos \Phi_0 \mathbf{e}_3 \bullet \\
\mathbf{e}_{2^*} &= -(\sin \Omega_0 \cos \Lambda_0 \sin \Phi_0 + \cos \Omega_0 \sin \Lambda_0) \mathbf{e}_1 \bullet \\
&\quad + (-\sin \Omega_0 \sin \Lambda_0 \sin \Phi_0 + \cos \Omega_0 \cos \Lambda_0) \mathbf{e}_2 \bullet \\
&\quad + \sin \Omega_0 \cos \Phi_0 \mathbf{e}_3 \bullet \\
\mathbf{e}_{3^*} &= \cos \Lambda_0 \cos \Phi_0 \mathbf{e}_1 \bullet + \sin \Lambda_0 \cos \Phi_0 \mathbf{e}_2 \bullet + \sin \Phi_0 \mathbf{e}_3 \bullet
\end{aligned}$$

transversale Lage

$$\Lambda_0 = \frac{3\pi}{2} + \Lambda^0, \quad \Phi_0 = 0, \quad \Omega_0 = \frac{\pi}{2}$$

Der Ansatz bedarf einigen Nachdenkens; er sollte allerdings durch die nachfolgende Skizze deutlich werden.

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_{1^*} &= \mathbf{e}_{1 \bullet} \cos \Lambda^0 + \mathbf{e}_{2 \bullet} \sin \Lambda^0 \\
\mathbf{e}_{2^*} &= \mathbf{e}_{3 \bullet} \\
\mathbf{e}_{3^*} &= \mathbf{e}_{1 \bullet} \sin \Lambda^0 - \mathbf{e}_{2 \bullet} \cos \Lambda^0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_{1 \bullet} &= \mathbf{e}_{1^*} \cos \Lambda^0 + \mathbf{e}_{2^*} \sin \Lambda^0 \\
\mathbf{e}_{2 \bullet} &= \mathbf{e}_{1^*} \sin \Lambda^0 - \mathbf{e}_{2^*} \cos \Lambda^0 \\
\mathbf{e}_{3 \bullet} &= \mathbf{e}_{2^*}
\end{aligned}$$

Spezialfall: $\Lambda^0 = 0$

$$\begin{array}{lll}
\underbrace{\mathbf{e}_{1^*} = \mathbf{e}_{1 \bullet}}_{\text{Greenwich}}, & \underbrace{\mathbf{e}_{2^*} = \mathbf{e}_{3 \bullet}}_{\text{Nordpol}}, & \underbrace{\mathbf{e}_{3^*} = -\mathbf{e}_{2 \bullet}}_{\text{Westpol}}
\end{array}$$

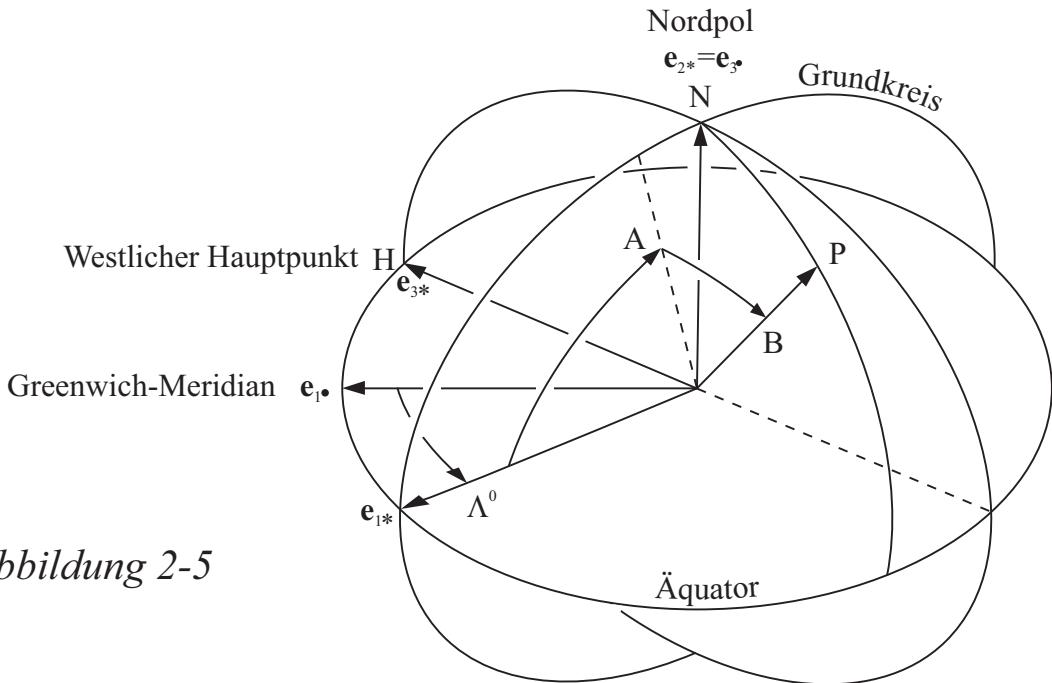


Abbildung 2-5

$$(1) \boxed{\tan A = \frac{+ \tan \Phi}{\cos(\Lambda - \Lambda^0)}}$$

Ableitung:

$$\begin{aligned} \cot\left(\frac{\pi}{2} + A\right) &= -\tan A = -\frac{\tan \Phi}{\sin(\Lambda - 270^\circ - \Lambda^0)} \\ &= \frac{\tan \Phi}{\sin(270^\circ + \Lambda^0 - \Lambda)} = -\frac{\tan \Phi}{\cos(\Lambda^0 - \Lambda)} \Rightarrow (1) \end{aligned}$$

$$(2) \boxed{\sin B = -\cos \Phi \sin(\Lambda - \Lambda^0)}$$

Ableitung :

$$\begin{aligned} \sin B &= \cos \Phi \cos(\Lambda - 270^\circ - \Lambda^0) = \cos \Phi \cos(270 + \Lambda^0 - \Lambda) \\ &= \cos \Phi \sin(\Lambda^0 - \Lambda) = -\cos \Phi \sin(\Lambda - \Lambda^0) \Rightarrow (2) \end{aligned}$$

A zählt positiv vom Äquator gen Nordpol

B zählt positiv vom Grundkreis gen Westen, dagegen negativ vom Grundkreis gen Osten

Familie transversaler Lagen

$$\Lambda_0 = \frac{3\pi}{2} + \Lambda^0, \Phi_0 = 0, \Omega_0 = \frac{\pi}{2} + \Omega^0$$

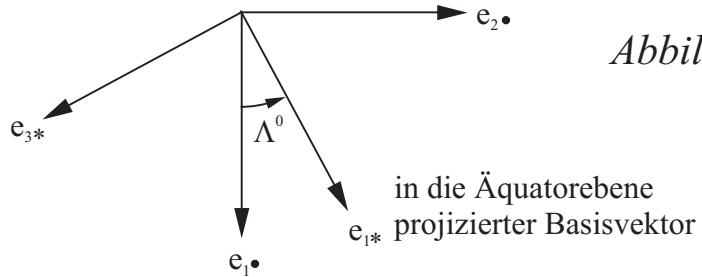


Abbildung 2-6

Greenwich

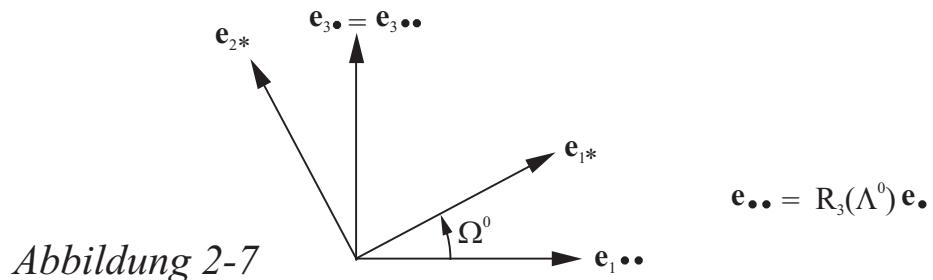


Abbildung 2-7

$$\mathbf{e}_{\bullet\bullet} = R_3(\Lambda^0) \mathbf{e}_{\bullet}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_{1*} &= \cos \Lambda^0 \cos \Omega^0 \mathbf{e}_{1\bullet} + \sin \Lambda^0 \cos \Omega^0 \mathbf{e}_{2\bullet} + \sin \Omega^0 \mathbf{e}_{3\bullet} \\ \mathbf{e}_{2*} &= -\cos \Lambda^0 \sin \Omega^0 \mathbf{e}_{1\bullet} - \sin \Lambda^0 \sin \Omega^0 \mathbf{e}_{2\bullet} + \cos \Omega^0 \mathbf{e}_{3\bullet} \\ \mathbf{e}_{3*} &= \sin \Lambda^0 \mathbf{e}_{1\bullet} - \cos \Lambda^0 \mathbf{e}_{2\bullet}\end{aligned}$$

$$\Lambda^0 = \frac{360^\circ}{l} k$$

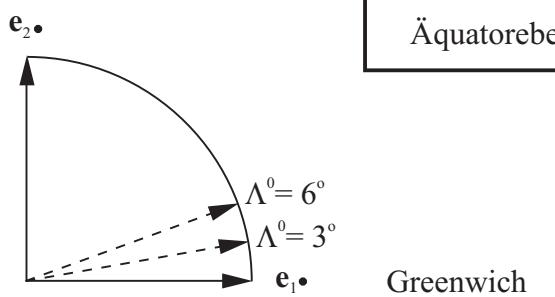
$$\begin{aligned}\text{z.B. } l &= 120 \text{ Streifen,} & k &= 1, & \Lambda^0 &= 3^\circ \\ && k &= 2, & \Lambda^0 &= 6^\circ \\ && \text{etc.}\end{aligned}$$

"Gauß-Krüger System für die Kugel"

$$\begin{aligned}\text{z.B. } l &= 60 \text{ Streifen,} & k &= 1, & \Lambda^0 &= 6^\circ \\ && k &= 2, & \Lambda^0 &= 12^\circ \\ && \text{etc.}\end{aligned}$$

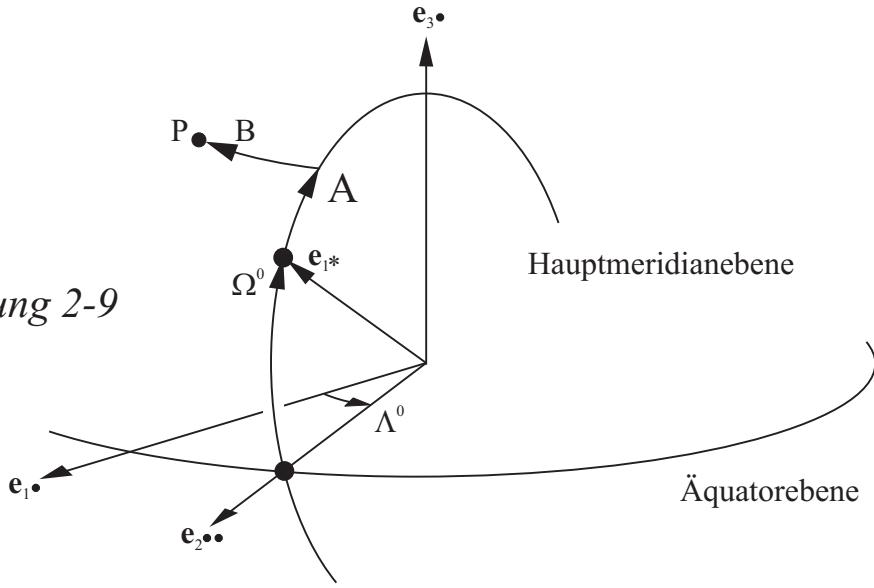
"UTM System für die Kugel"

Abbildung 2-8



(Λ^0, Ω^0) heißen auch *Koordinaten eines lokalen Koordinatensystems*

Abbildung 2-9



Transformationsformeln

$$(1) \boxed{A = \arctan \left(\frac{\tan \Phi}{\cos(\Lambda - \Lambda^0)} \right) - \Omega^0}$$

Ableitung:

$$\begin{aligned} \cot\left(\frac{\pi}{2} + \Omega^0 + A\right) &= -\tan(\Omega^0 + A) = \frac{\tan \Phi}{\sin(270^\circ + \Lambda^0 - \Lambda)} \\ &= -\frac{\tan \Phi}{\cos(\Lambda - \Lambda^0)} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\tan(\Omega^0 + A) = \frac{\tan \Phi}{\cos(\Lambda - \Lambda^0)} \Rightarrow (1)$$

$$(2) \boxed{B = \arcsin(-\cos \Phi \sin(\Lambda - \Lambda^0))}$$

weitere nützliche Umrechnungsformeln

$$(1') \quad \boxed{\begin{array}{lcl} \sin A & = & \frac{\sin \Lambda \cos \Phi}{\cos B} \\ \\ \end{array}} \quad \forall \Omega^0 = 0$$

$$(1'') \quad \boxed{\begin{array}{lcl} \cos A & = & \frac{\sin \Phi}{\cos B} \\ \\ \end{array}} \quad \forall \Omega^0 = 0$$

$$(1') \quad \sin A = \frac{\sin \Lambda \cos \Phi}{\sqrt{1 + \cos \Lambda \cos \Phi} \sqrt{1 - \cos \Lambda \cos \Phi}}$$

$$(1'') \quad \cos A = \frac{\sin \Phi}{\sqrt{1 + \cos \Lambda \cos \Phi} \sqrt{1 - \cos \Lambda \cos \Phi}}$$

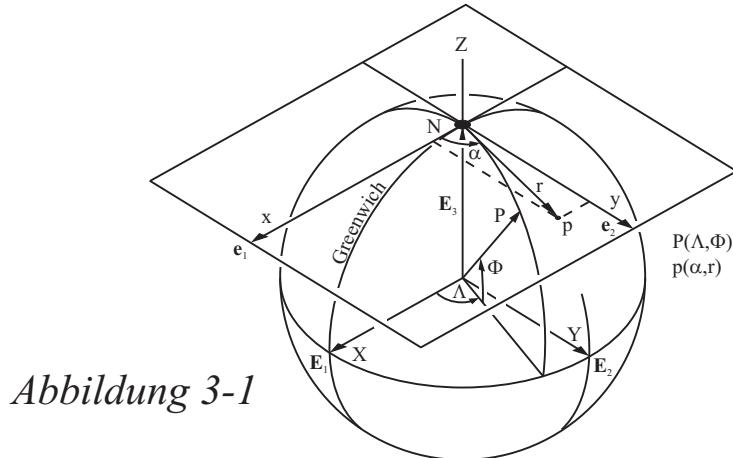
Diese Seite ist absichtlich leer

3 Abbildungen auf eine Tangentialebene (azimutale Abbildungen)

Die einfachsten Kartenprojektionen und –abbildungen werden erhalten, falls Punkte auf einer Kugel / eines Ellipsoides / einer anderen Fläche auf eine lokale Tangentialebene projiziert oder abgebildet werden. Im Falle der Kugel werden zunächst die allgemeinen Abbildungsgleichungen für eine lokale Tangentialebene einschließlich Deformationstensor und Hauptstreckungen hergeleitet, bevor spezielle Abbildungen folgender Typen vorgestellt werden

- 3.1 Allgemeine Abbildungsgleichungen und Verzerrungsmaße für Abbildungen auf eine Tangentialebene im Falle der Kugel (Azimutale Abbildung)
- 3.2 Spezielle Abbildungen der Kugel auf eine Tangentialebene
 - 3.2.1 Normale Abbildung auf eine Tangentialebene, äquidistant auf der Schar der Parallelkreise (mittabstandstreue azimutale Abbildung) (G. Postel 1581)
 - 3.2.2 Normale konforme Abbildung auf eine Tangentialebene (stereographische Projektion)
 - 3.2.3 Normale flächentreue Abbildung auf eine Tangentialebene (J.H. Lambert 1772)
 - 3.2.4 Allgemeine perspektivische normale Abbildung
 - 3.2.4.1 Gnomonische Projektion
 - 3.2.4.2 Orthographische Projektion (Parallelprojektion)
 - 3.2.4.3 Spezielle perspektivische Abbildung (Lagrange Projektion)
- 3.3 Allgemeine Abbildungsgleichungen und Verzerrungsmaße für Abbildungen auf eine Tangentialebene im Falle des Rotationsellipsoids
- 3.4 Spezielle Abbildungen des Rotationsellipsoids auf eine Tangentialebene
 - 3.4.1 Normale Abbildung auf eine Tangentialebene, äquidistant auf der Schar der Parallelkreise (mittabstandstreue azimutale Abbildung)
 - 3.4.2 Normale konforme Abbildung auf eine Tangentialebene
 - 3.4.3 Normale flächentreue Abbildung auf eine Tangentialebene
- 3.5 Pseudoazimutale Abbildungen

3.1 Allgemeine Abbildungsgleichungen und Verzerrungsmaße für Abbildungen auf eine Tangentialebene im Falle der Kugel (Azimutale Abbildung)



Karte Φ : sphärische Koordinaten

$$\mathbf{X} = \Phi^{-1}(\mathbf{U}) : \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} \cos \Lambda \cos \Phi \\ \sin \Lambda \cos \Phi \\ \sin \Phi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \Lambda \\ \Phi \end{bmatrix}$$

Metrikensor im Urbild

$$\frac{\partial X^I}{\partial U^K} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial \Lambda} & \frac{\partial X}{\partial \Phi} \\ \frac{\partial Y}{\partial \Lambda} & \frac{\partial Y}{\partial \Phi} \\ \frac{\partial Z}{\partial \Lambda} & \frac{\partial Z}{\partial \Phi} \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} -\sin \Lambda \cos \Phi & -\cos \Lambda \sin \Phi \\ \cos \Lambda \cos \Phi & -\sin \Lambda \sin \Phi \\ 0 & \cos \Phi \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} G_{KL} &= \frac{\partial X^I}{\partial U^K} \frac{\partial X^I}{\partial U^L} \\ &= \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial X}{\partial \Lambda} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \Lambda} \right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial \Lambda} \right)^2 & \frac{\partial X}{\partial \Lambda} \frac{\partial X}{\partial \Phi} + \frac{\partial Y}{\partial \Lambda} \frac{\partial Y}{\partial \Phi} + \frac{\partial Z}{\partial \Lambda} \frac{\partial Z}{\partial \Phi} \\ \frac{\partial X}{\partial \Phi} \frac{\partial X}{\partial \Lambda} + \frac{\partial Y}{\partial \Phi} \frac{\partial Y}{\partial \Lambda} + \frac{\partial Z}{\partial \Phi} \frac{\partial Z}{\partial \Lambda} & \left(\frac{\partial X}{\partial \Phi} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \Phi} \right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial \Phi} \right)^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} R^2 \cos^2 \Phi & 0 \\ 0 & R^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Abbildungsgleichungen

Forderungen:

- Der Bildradius $r := \sqrt{x^2 + y^2}$ soll nur von der Breite Φ (Poldistanz $\Delta = \frac{\pi}{2} - \Phi$) abhängen: $r = f(\frac{\pi}{2} - \Phi) = f(\Delta)$

Der spezielle Ansatz wird dadurch motiviert, daß r und Φ gegenläufig sind; insbesondere ist $\Phi = \pi/2$, $\Delta = 0$, $f(0) = 0$ gewährleistet.

- Die polare Bildkoordinate α ist mit der Länge Λ identisch : $\alpha = \Lambda$.

Aus diesem Grunde heißen die Abbildungen auf eine Tangentialebene auch *azimutal*: Das Azimut eines Ortsvektors \mathbf{x} im Bild entspricht der sphärischen Länge Λ eines Ortsvektors \mathbf{X} im Urbild.

allgemeine Abbildungsgleichungen

$$\mathbf{x} = \varphi^{-1} \circ \bar{f}(\mathbf{U}) : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \alpha \\ r \sin \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\Delta) \cos \Lambda \\ f(\Delta) \sin \Lambda \end{bmatrix}$$

Struktur der Koordinatenlinien

- (i) $y = \tan \Lambda x$ *Gerade* für $\Lambda = \text{const.}$ (*Meridian*)

Ableitung: Löse die erste Abbildungsgleichung nach $f = x / \cos \Lambda$ auf; setze dieses Ergebnis in die zweite Abbildungsgleichung ein und erhalte $y = x(\cos \Lambda)^{-1} \sin \Lambda = x \tan \Lambda$

- (ii) $x^2 + y^2 = f^2(\Delta)$ *Kreise* für $\Phi = \text{const.}$ (*Parallelkreise*)

Ableitung: beide Abbildungsgleichungen quadrieren und addieren

Metriktensor im Bild

$$\frac{\partial x^i}{\partial u^k} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial r} \\ \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r \sin \alpha & \cos \alpha \\ r \cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix}$$

$$g_{kl} = \frac{\partial x^i}{\partial u^k} \frac{\partial x^i}{\partial u^l} = \begin{bmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Deformationstensor

$$c_{KL} = g_{kl} \frac{\partial u^k}{\partial U^K} \frac{\partial u^l}{\partial U^L} = \frac{\partial x^i}{\partial U^K} \frac{\partial x^i}{\partial U^L}$$

$$\frac{\partial x^i}{\partial U^K} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \Lambda} & \frac{\partial x}{\partial \Delta} \\ \frac{\partial y}{\partial \Lambda} & \frac{\partial y}{\partial \Delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f(\Delta) \sin \Lambda & f'(\Delta) \cos \Lambda \\ +f(\Delta) \cos \Lambda & f'(\Delta) \sin \Lambda \end{bmatrix}$$

$$c_{KL} = \begin{bmatrix} f^2(\Delta) & 0 \\ 0 & f'^2(\Delta) \end{bmatrix}, \quad f(\Delta) = f(\pi/2 - \Phi), \quad f' = \frac{d}{d\Delta} f(\Delta)$$

Hauptstreckungen

$$\Lambda_1 = \sqrt{c_{11}/G_{11}} = \frac{f(\Delta)}{R \cos \Phi}$$

$$\Lambda_2 = \sqrt{c_{22}/G_{22}} = \frac{f'(\Delta)}{R}$$

Λ_1 Streckung in Richtung des Parallelkreises $\Phi = \text{const.}$

Λ_2 Streckung in Richtung des Meridians $\Lambda = \text{const.}$

3.2 Spezielle Abbildungen der Kugel auf eine Tangentialebene

3.2.1 Normale Abbildung auf eine Tangentialebene, äquidistant auf der Schar der Parallelkreise (mittabstandstreue azimutale Abbildung) (G. Postel 1581)

Forderung der Äquidistanz auf der Schar der Parallelkreise:

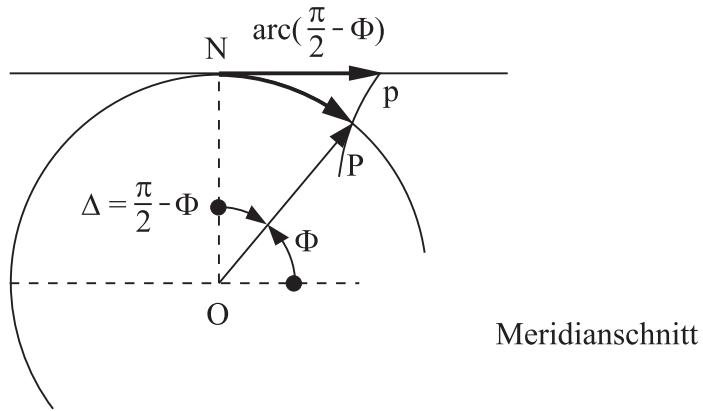


Abbildung 3-2

$$r = f(\Delta) = R\Delta, \Delta = \pi/2 - \Phi$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(\pi/2 - \Phi) \cos \Lambda \\ R(\pi/2 - \Phi) \sin \Lambda \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_1 = \frac{\pi/2 - \Phi}{\cos \Phi}, \Lambda_2 = 1 \text{ (Äquidistanz auf den } U^2 = \Phi \text{ - Parameterkurven)}$$

Mercator (1569): Abbildung der Polargebiete

Himmelskarten in Polnähe;

Weltkarte 1 : 2.500.000 in den Breiten $60^\circ - 90^\circ$ (Urbild: Rotationsellipsoid); Karten in der Luftfahrt, Funktechnik, Seismik

3.2.2 Normale konforme Abbildung auf eine Tangentialebene (stereographische Projektion)

Forderung der Konformität: $\Lambda_1 = \Lambda_2 \implies$

$$\begin{aligned} \frac{f(\Delta)}{R \sin \Delta} &= \frac{f'(\Delta)}{R} \implies \frac{df}{f} = \frac{d\Delta}{\sin \Delta} \\ \int \frac{dx}{\sin x} &= \ln |\tan \frac{x}{2}| \end{aligned} \implies$$

$$\ln f = + \ln |\tan \frac{\Delta}{2}| + \ln c$$

$$f(\Delta) = c \tan \frac{\Delta}{2} \quad \forall \Delta \in]0, \pi[$$

Forderung im Nordpol: $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \Lambda_2 = 1$

$$\left. \begin{aligned} \frac{df}{d\Delta} &= \frac{c}{2} \frac{1}{\cos^2 \frac{\Delta}{2}} \\ \frac{d}{dx} \tan x &= \frac{1}{\cos^2 x} \end{aligned} \right] \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} \Lambda_2 &= \frac{c}{2R} \frac{1}{\cos^2 \frac{\Delta}{2}} \\ \lim_{\Delta \rightarrow 0} \Lambda_2(\Delta) &= 1 \end{aligned} \right] \Rightarrow c = 2R \Rightarrow$$

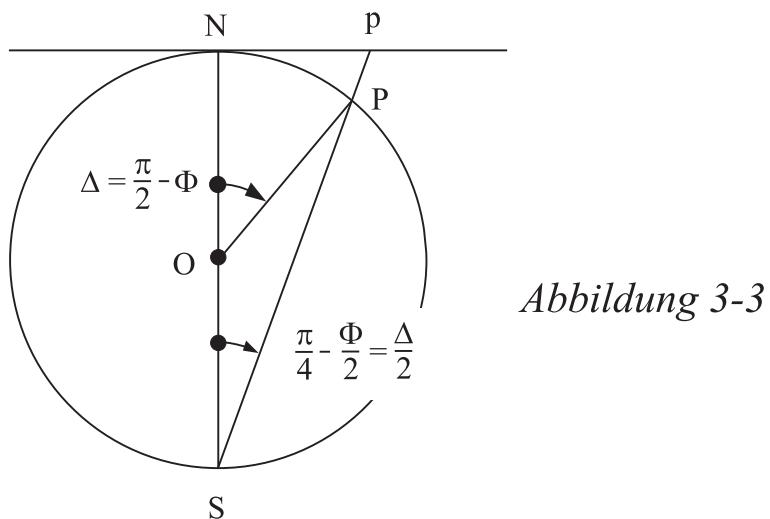
$$r = f(\pi/2 - \Phi) = 2R \tan \frac{\pi/2 - \Phi}{2}$$

$$\frac{df}{d\Delta} = \frac{R}{\cos^2 \frac{\Delta}{2}}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2R \tan(\pi/4 - \Phi/2) \cos \Lambda \\ 2R \tan(\pi/4 - \Phi/2) \sin \Lambda \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\Lambda_1 = \Lambda_2 = \frac{1}{\cos^2(\pi/4 - \Phi/2)} = \frac{2}{1 + \sin \Phi}}$$

“stereographische Projektion”



Die normale konforme Abbildung auf eine Tangentialebene findet sich schon bei Hipparch. Sie leidet unter der raschen Flächenverzerrung zum Rande hin. Als Abbildung des Rotationsellipsoides findet die stereographische Projektion Anwendung bei Luftverkehrskarten, als internationale Weltkarte für Polargebiete, als geodätische Abbildung in "Universal Polar Stereographic Projection" (UPS) als Ergänzung zur UTM für Breiten über 80°.

3.2.3 Normale flächentreue Abbildung auf eine Tangentialebene (J.H. Lambert 1772)

Forderung der Flächentreue: $\Lambda_1 \Lambda_2 = 1$

$$\frac{f}{R^2 \sin \Delta} \frac{df}{d\Delta} = 1 \implies f df = R^2 \sin \Delta d\Delta \implies$$

Forderung im Nordpol:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{f^2}{2} = -R^2 \cos \Delta + c \\ r(0) = f(0) = 0 \\ 0 = -R^2 + c \end{array} \right] \implies c = R^2$$

$$\left. \begin{array}{l} f^2 = 2R^2(1 - \cos \Delta) = 4R^2 \sin^2 \frac{\Delta}{2} \\ \cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} \\ 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \end{array} \right] \implies$$

$$\left. \begin{array}{l} r = f(\Delta) = 2R \sin \frac{\Delta}{2} \\ f'(\pi/2 - \Phi) = +R \cos \frac{\Delta}{2} \end{array} \right] \implies$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2R \sin(\pi/4 - \Phi/2) \cos \Lambda \\ 2R \sin(\pi/4 - \Phi/2) \sin \Lambda \end{bmatrix}}$$

$$\boxed{\Lambda_1 = \frac{1}{\cos(\pi/4 - \Phi/2)}, \Lambda_2 = \cos(\pi/4 - \Phi/2)}$$

$$\Phi = \pi/2 : \lim_{\Phi \rightarrow \frac{\pi}{2}} \Lambda_1 = \lim_{\Phi \rightarrow \frac{\pi}{2}} \Lambda_2 = 1$$

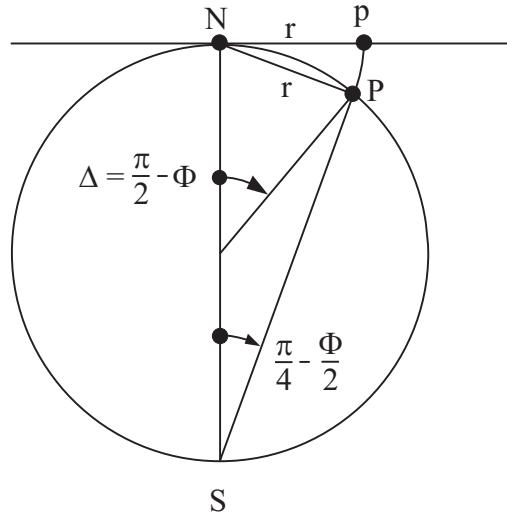


Abbildung 3-4

Die normale flächentreue Abbildung auf eine Tangentialebene findet Anwendung als geographische Karte und wegen der Flächentreue als geostatistische Karte.

3.2.4 Allgemeine perspektivische normale Abbildung

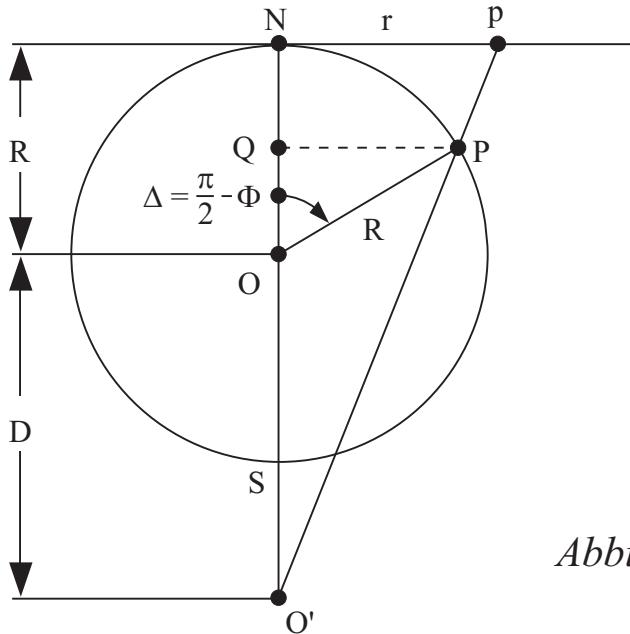


Abbildung 3-5

Forderung der Perspektive:

$$\boxed{\frac{r}{QP} = \frac{O'N}{O'Q}}$$

$$\frac{r}{R \cos \Phi} = \frac{R + D}{R \sin \Phi + D} \Rightarrow$$

$$r = f(\pi/2 - \Phi) = \frac{(R + D)R \cos \Phi}{R \sin \Phi + D} = \frac{(1 + \frac{R}{D})R \cos \Phi}{1 + \frac{R}{D} \sin \Phi}$$

$$f' = \frac{df}{d(\pi/2 - \Phi)} = R(R + D) \frac{R + D \sin \Phi}{(R \sin \Phi + D)^2} \Rightarrow$$

Abbildungsgleichungen

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (D + R) \frac{R \cos \Phi \cos \Lambda}{D + R \sin \Phi} \\ (D + R) \frac{R \cos \Phi \sin \Lambda}{D + R \sin \Phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 + \frac{R}{D}) \frac{R \cos \Phi \cos \Lambda}{1 + \frac{R}{D} \sin \Phi} \\ (1 + \frac{R}{D}) \frac{R \cos \Phi \sin \Lambda}{1 + \frac{R}{D} \sin \Phi} \end{bmatrix}$$

Hauptstreckungen

$$\Lambda_1 = \frac{D + R}{D + R \sin \Phi} = \frac{1 + \frac{R}{D}}{1 + \frac{R}{D} \sin \Phi}$$

$$\Lambda_2 = (D + R) \frac{R + D \sin \Phi}{(D + R \sin \Phi)^2} = \left(1 + \frac{R}{D}\right) \frac{\frac{R}{D} + \sin \Phi}{\left(1 + \frac{R}{D} \sin \Phi\right)^2}$$

$$\Delta \rightarrow 0, \Phi \rightarrow \frac{\pi}{2} : \Lambda_1 = \Lambda_2 = 1$$

Die aktuellen allgemeinen perspektivischen Abbildungen werden zur Auswertung von Aufnahmen aus Luft- und Raumfahrzeugen genutzt.

3.2.4.1 Gnomonische Projektion

Im Altertum zur Konstruktion von Sonnenuhren (Gnomon) verwandt. In der gnomonischen Projektion wird die kürzeste Verbindungsgerade (Großkreis) zwischen zwei Punkten auf der Kugel auf eine Gerade abgebildet. Deshalb hat die gnomonische Projektion Bedeutung in der See-, Flug-, insbesondere Funknavigation.

Forderung $D = 0$:

$$r = f(\Delta) = R \tan \Delta$$

allgemeine Abbildungsgleichungen, allgemeine Hauptstreckungen

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \cot \Phi \cos \Lambda \\ R \cot \Phi \sin \Lambda \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_1 = \frac{1}{\sin \Phi}, \quad \Lambda_2 = \frac{1}{\sin^2 \Phi}$$

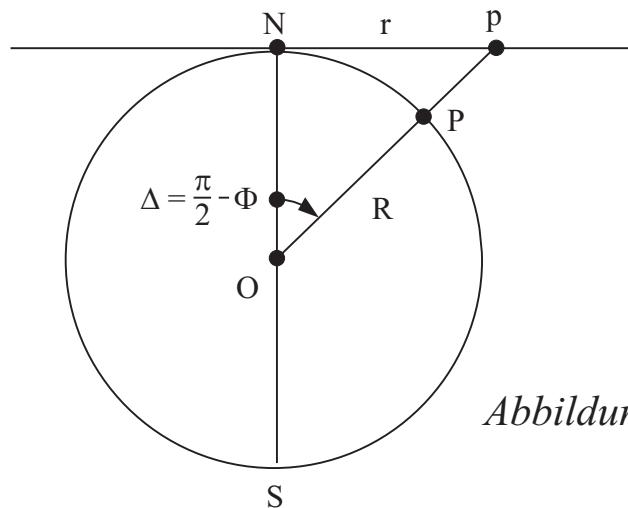


Abbildung 3-6

3.2.4.2 Orthographische Projektion (Parallelprojektion)

Die Orthographische Projektion oder Parallelprojektion findet Anwendung bei Mondkarten und in der mathematisch-astronomischen Geographie.

Forderung $D \rightarrow \infty$:

Projektionszentrum O' liegt im Unendlichen

$$\lim_{D \rightarrow \infty} \frac{R}{D} = 0 \implies r = f(\Delta) = R \cos \Phi$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \cos \Phi \cos \Lambda \\ R \cos \Phi \sin \Lambda \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_1 = 1, \Lambda_2 = \sin \Phi$$

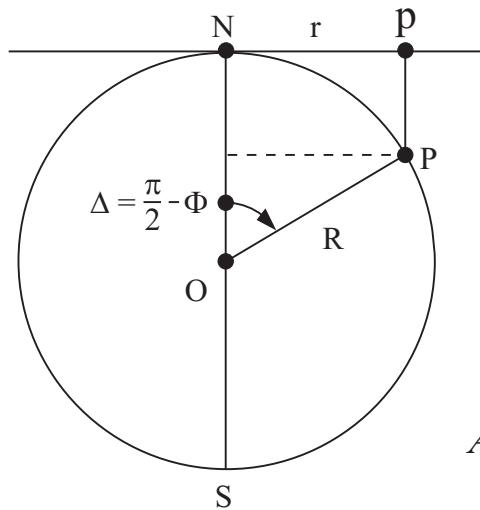


Abbildung 3-7

Die allgemeine perspektivische normale Abbildung geht in die *stereographische Projektion* auf eine Tangentialebene über, falls wir den Abstand SO' gleich Null setzen, d.h. $D = R$! Eine spezielle Variante erhalten wir, falls wir nicht auf eine Tangentialebene durch den Nordpol abbilden, sondern auf die *Äquatorebene* entsprechend der nachfolgenden Figur.

3.2.4.3 Spezielle perspektivische Abbildung (Lagrange Projektion)

Der Sinussatz im Dreieck OpS führt auf die polare Koordinate r :

$$\frac{r}{\sin \frac{\Delta}{2}} = \frac{R}{\cos \frac{\Delta}{2}} \Rightarrow r = R \tan \frac{\Delta}{2}$$

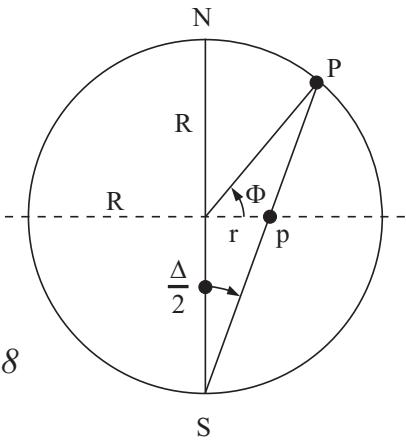


Abbildung 3-8

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\Delta}{2} \right) = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\Delta}{2} \right) = \cos \frac{\Delta}{2}$$

Abbildungsgleichungen

$$x = r \cos \alpha = R \tan \frac{\Delta}{2} \cos \Lambda = R \tan (\pi/4 - \Phi/2) \cos \Lambda$$

$$y = r \sin \alpha = R \tan \frac{\Delta}{2} \sin \Lambda = R \tan (\pi/4 - \Phi/2) \sin \Lambda$$

1. Spezialfall: $\Phi = 0$: "Äquatorlage"

$$x = R \cos \Lambda, y = R \sin \Lambda$$

2. Spezialfall: $\Phi = \frac{\pi}{2}$: "Pollage"

$$x = 0, y = 0$$

Die obere Halbkugel, vom südlichen Projektionszentrum abgebildet, liegt also in *einem Kreis* vom Radius R ; entsprechend liegt die untere Halbkugel, vom nördlichen Projektionszentrum abgebildet, in *einem weiteren Kreis* vom Radius R . D.h., daß die gesamte Kugel abgebildet in zwei Kreisen liegt! Darin liegt die Besonderheit dieser *konformen Abbildung*!

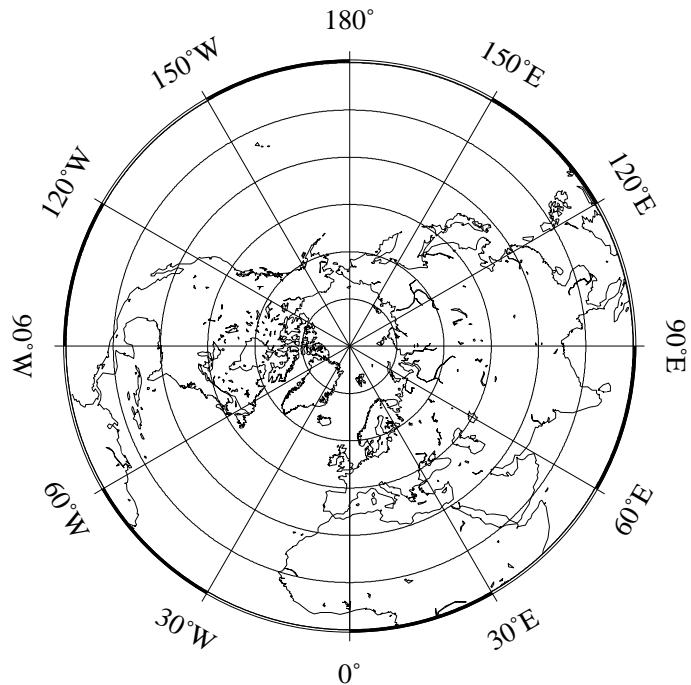
$$\left[\begin{array}{l} \Lambda_1 = \frac{f(\Delta)}{R \sin \Delta} = \frac{\tan \frac{\Delta}{2}}{2 \sin \frac{\Delta}{2} \cos \frac{\Delta}{2}} = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{\Delta}{2}} \\ \Lambda_2 = \frac{f'(\Delta)}{R} = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{\Delta}{2}} \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\boxed{\Lambda_1 = \Lambda_2 = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{\Delta}{2}}}$$

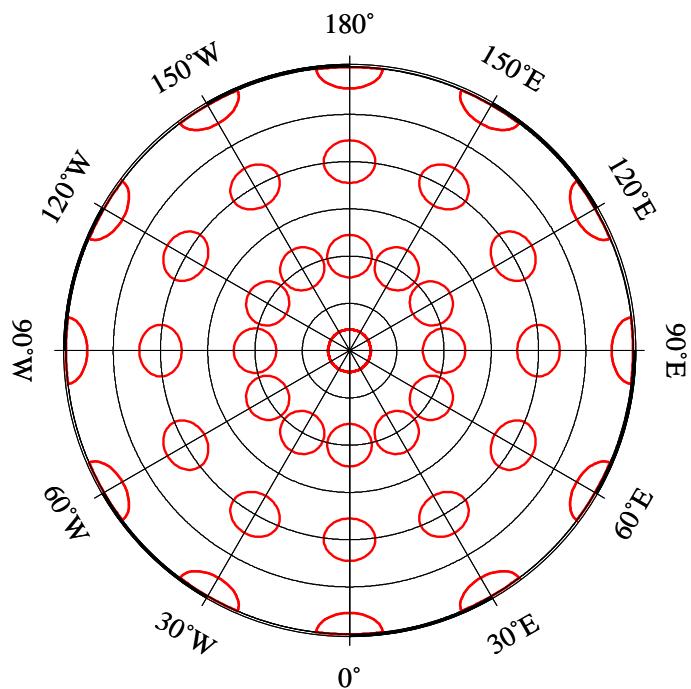
Gegenüber der originären stereographischen Projektion weist die obige Variante nur eine halb so große Verzerrung auf!

Tabelle: Verzerrungswerte normaler Abbildungen auf eine Tangentialebene (azimutale Abbildungen)

Abbildung	$\Delta = \frac{\pi}{2} - \Phi$	Λ_1 Längenverzerrung → Breitenkreis	Λ_2 Längenverzerrung → Meridian	$\Lambda_1 \Lambda_2$ Flächenverzerrung	maximale Winkelverzerrung $2 \arcsin \frac{\Lambda_1 - \Lambda_2}{\Lambda_1 + \Lambda_2}$
mittabstands-treu	0°	1,000	1	1,000	0°00'
	30	1,047	1	1,047	2°38'
	60	1,209	1	1,209	10°52'
	90	1,571	1	1,571	25°39'
konform	0°	1,000	1,000	1,000	0°
	30	1,072	1,072	1,149	0°
	60	1,333	1,333	1,778	0°
	90	2,000	2,000	4,000	0°
flächentreu	0°	1,000	1,000	1	0°00'
	30	1,035	0,966	1	3°58'
	60	1,155	0,866	1	16°26'
	90	1,414	0,707	1	38°57'
gnomonisch	0°	1,000	1,000	1,000	0°00'
	30	1,155	1,333	1,540	8°14'
	60	2,000	4,000	8,000	38°57'
	90	∞	∞	∞	180°00'
orthographisch	0°	1	1,000	1,000	0°00'
	30	1	0,866	0,866	8°14'
	60	1	0,500	0,500	38°57'
	90	1	0,000	0,000	180°00'

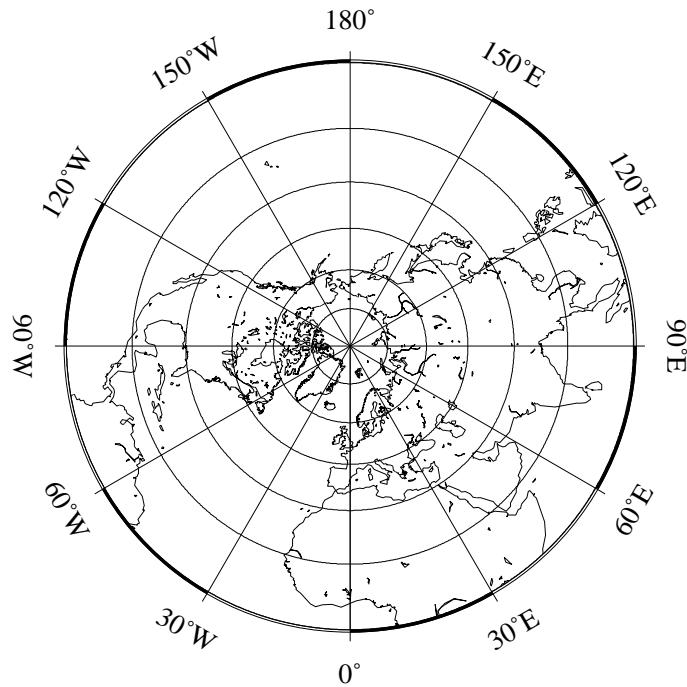


GMT 2002 Jan 10 15:40:50 pscoast -JE0/90/0.1cm -R0/360/0/90 -B30g30/15g15 -Dc -A1000 -G255 -W0.25 -P -Uc -X5 -Y17

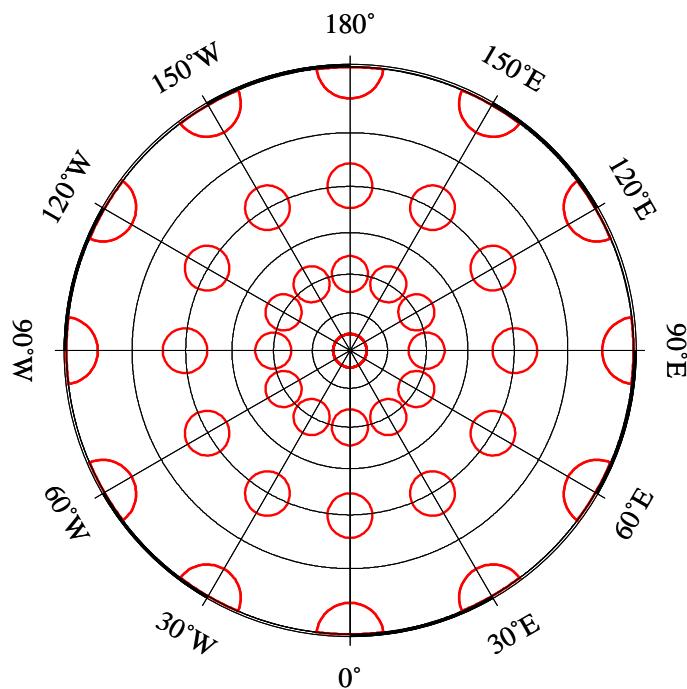


GMT 2002 Jan 10 15:40:51 psbasemap -JE0/90/0.1cm -R0/360/0/90 -B30g30/15g15 -G255 -P -K -Uc -X5 -Y17

Abbildungen 3-9, 3-10: Äquidistante Azimutalabbildung

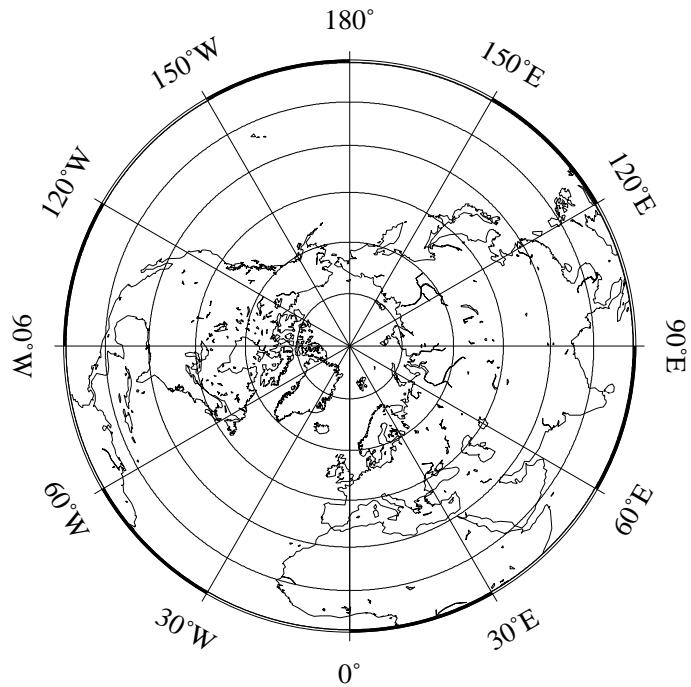


GMT 2002 Jan 10 14:56:50 pscoast -JS0/90/0.1cm -R0/360/-90/90 -B30g30/15g15 -Dc -A1000 -G255 -W0.25 -P -Uc -X5 -Y17

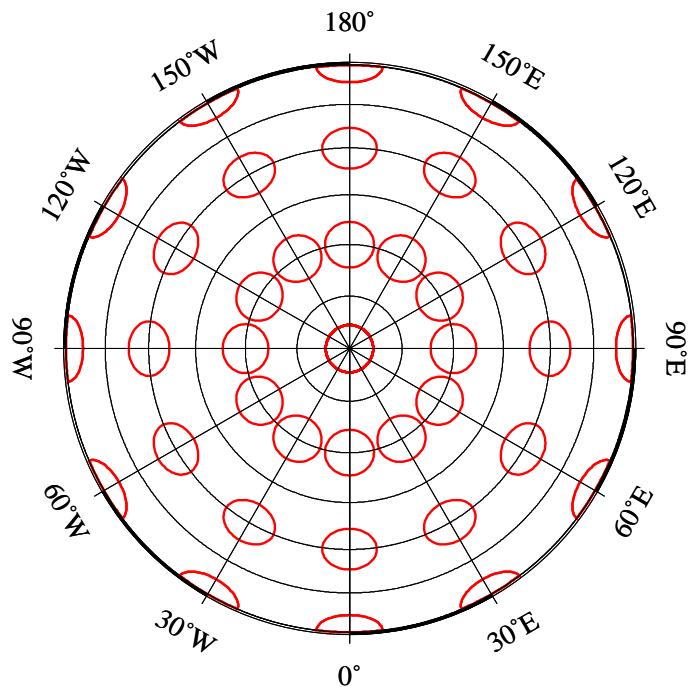


GMT 2002 Jan 10 14:56:50 psbasemap -JS0/90/0.1cm -R0/360/-90/90 -B30g30/15g15 -G255 -P -K -Uc -X5 -Y17

Abbildungen 3-11, 3-12: Konforme Azimutalabbildung

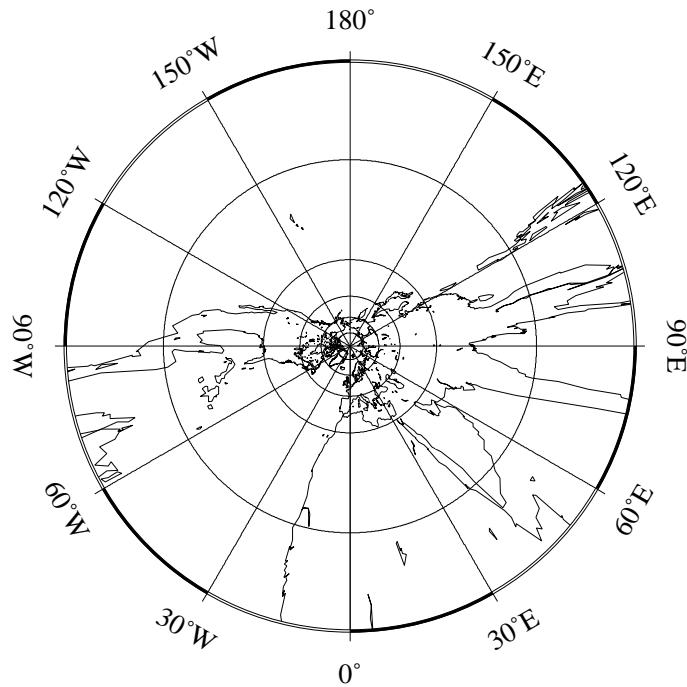


GMT 2002 Jan 10 14:57:43 pscoast -JA0/90/0.1cm -R0/360/-90/90 -B30g30/15g15 -Dc -A1000 -G255 -W0.25 -P -Uc -X5 -Y17

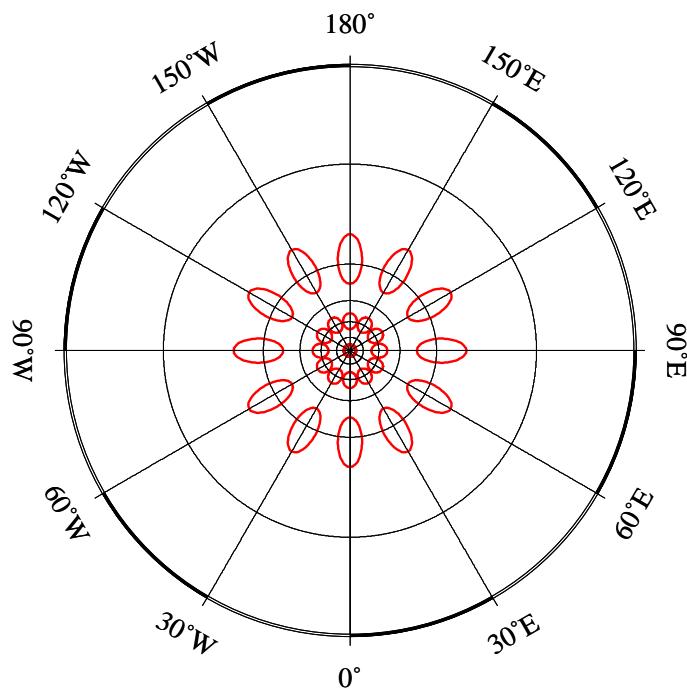


GMT 2002 Jan 10 14:57:44 psbasemap -JA0/90/0.1cm -R0/360/0/90 -B30g30/15g15 -G255 -P -K -Uc -X5 -Y17

Abbildungen 3-13, 3-14: Flächentreue Azimutalabbildung

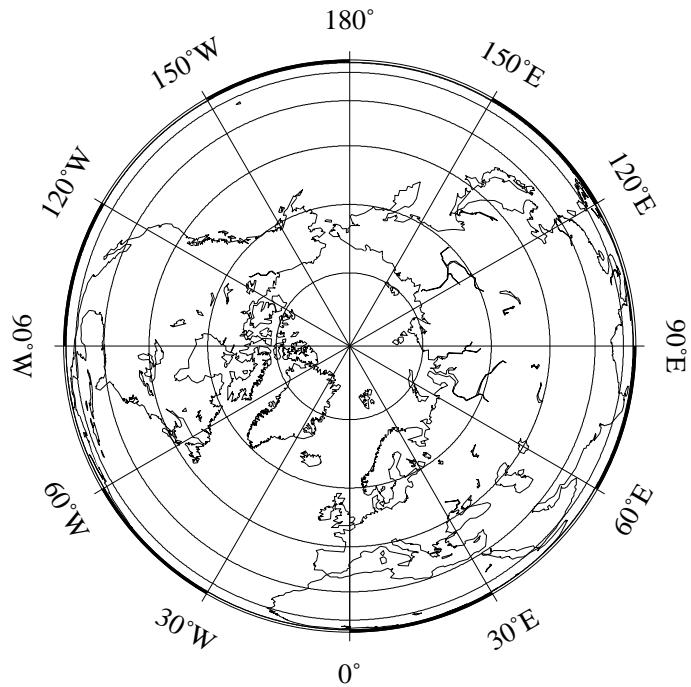


GMT 2002 Jan 10 14:58:24 pscoast -JF0/90/80/0.1cm -R0/360/-90/90 -B30g30/15g15 -Dc -A1000 -G255 -W0.25 -P -Uc -X5 -Y17

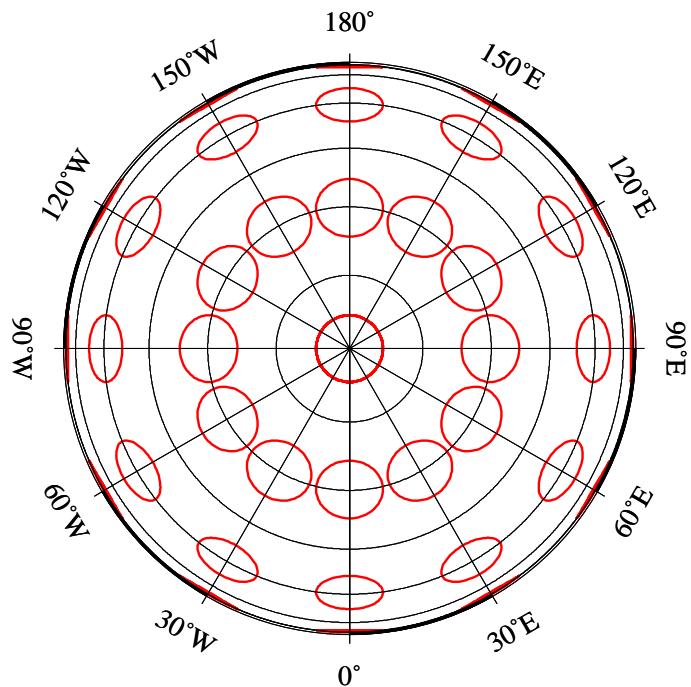


GMT 2002 Jan 10 14:58:24 psbasemap -JF0/90/80/0.1cm -R0/360/0/90 -B30g30/15g15 -G255 -P -K -Uc -X5 -Y17

Abbildungen 3-15, 3-16: Gnomonische Abbildung

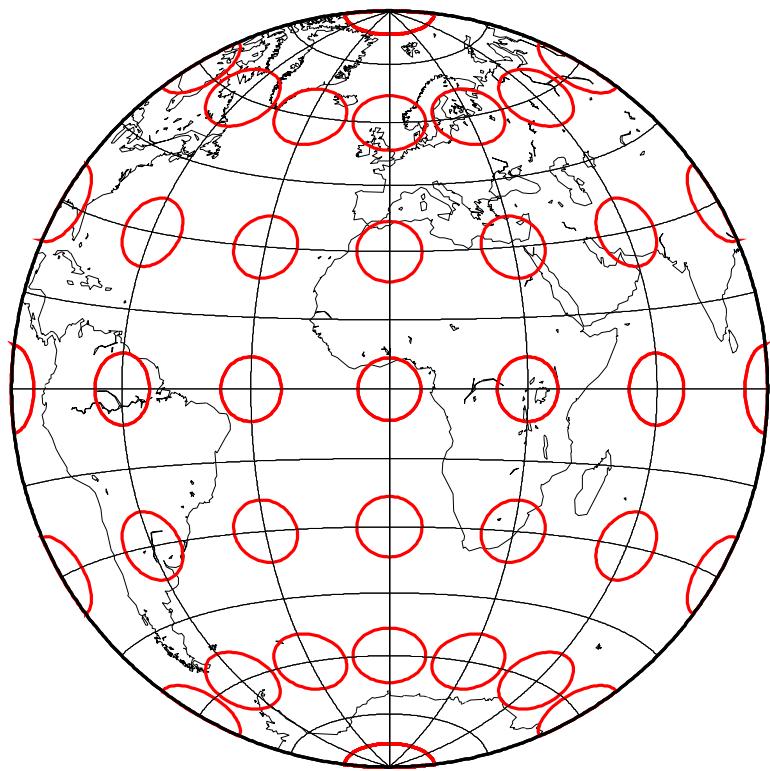


GMT 2002 Jan 10 14:59:05 pscoast -JG0/90/0.1cm -R0/360/-90/90 -B30g30/15g15 -Dc -A5000 -G255 -W0.25p -P -Uc -X5 -Y17



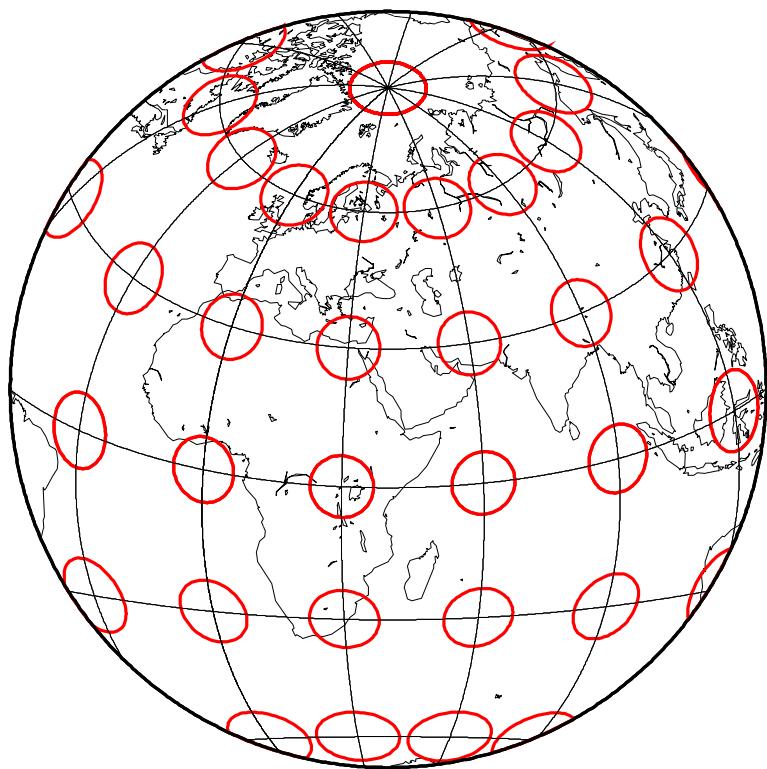
GMT 2002 Jan 10 14:59:05 psbasemap -JG0/90/0.1cm -R0/360/0/90 -B30g30/15g15 -G255 -P -K -Uc -X5 -Y17

Abbildungen 3-17, 3-18: Orthographische Abbildung



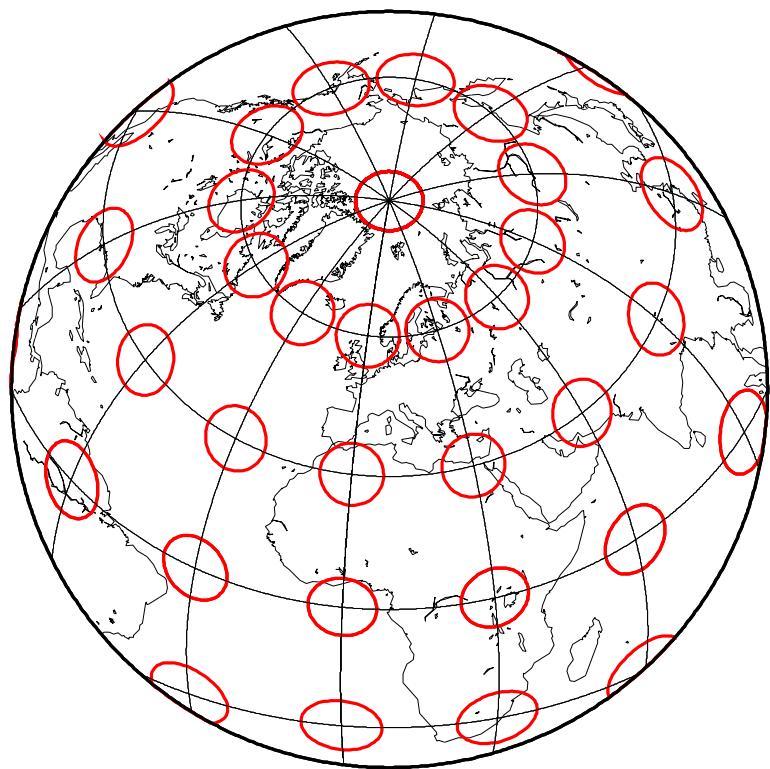
GMT 2002 Jan 10 14:37:15 pscoast -JA0/0/0.1cm -R0/360/-90/90 -B30g30/15g15 -Dc -A1000 -G255 -W0.25 -P -K -Uc -X5 -Y15

Abbildung 3-19: Flächentreue Azimutalabbildung (Pol im Äquator)



GMT 2002 Jan 10 14:37:36 pscoast -JA39.75/21.38/0.1cm -R0/360/-90/90 -B30g30/15g30 -Dc -A1000 -G255 -W0.25 -P -K -Uc -X5 -Y15

Abbildung 3-20: Flächentreue Azimutalabbildung (Pol in Mekka, $\Lambda=39.75$, $\Phi=21.38$)



GMT 2002 Jan 10 14:38:00 pscoast -JA9.18/48.83/0.1cm -R0/360/-90/90 -B30g30/30g30 -Dc -A1000 -G255 -W0.25 -P -K -Uc -X5 -Y15

Abbildung 3-21: Flächentreue Azimutalabbildung (Pol in Stuttgart, $\Lambda=9.18$, $\Phi=48.83$)

3.3 Allgemeine Abbildungsgleichungen und Verzerrungsmaße für Abbildungen auf eine Tangentialebene im Falle eines Rotationsellipsoides

Karte Φ : ellipsoidische Koordinaten

$$\mathbf{X} = \Phi^{-1}(\mathbf{U}) :$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \frac{A}{\sqrt{1 - E^2 \sin^2 \Phi}} \begin{bmatrix} \cos \Lambda \cos \Phi \\ \sin \Lambda \cos \Phi \\ (1 - E^2) \sin \Phi \end{bmatrix}$$

große Halbachse des Rotationsellipsoides A
kleine Halbachse des Rotationsellipsoides B

$$\text{erste numerische Exzentrizität } E = \sqrt{\frac{A^2 - B^2}{A^2}} = \sqrt{1 - \frac{B^2}{A^2}}$$

ellipsoidische Länge Λ und Breite Φ

$$\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda \\ \Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \arctan Y X^{-1} \\ \arctan \frac{1}{1 - E^2} \left(\frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \right) \end{bmatrix}$$

Metriktenor

$$\mathbf{G}_\Lambda := \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \Lambda} = \frac{A \cos \Phi}{\sqrt{1 - E^2 \sin^2 \Phi}} \left(-\sin \Lambda \mathbf{E}_1 + \cos \Lambda \mathbf{E}_2 \right)$$

$$\mathbf{G}_\Phi := \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \Phi} = -\frac{A(1 - E^2)}{(1 - E^2 \sin^2 \Phi)^{3/2}} \left(\cos \Lambda \sin \Phi \mathbf{E}_1 + \sin \Lambda \sin \Phi \mathbf{E}_2 - \cos \Phi \mathbf{E}_3 \right)$$

Koordinaten des Metriktenor

$$\begin{cases} \langle \mathbf{G}_\Lambda | \mathbf{G}_\Lambda \rangle = G_{\Lambda\Lambda} = G_{11} = \frac{A^2 \cos^2 \Phi}{1 - E^2 \sin^2 \Phi} \\ \langle \mathbf{G}_\Phi | \mathbf{G}_\Phi \rangle = G_{\Phi\Phi} = G_{22} = \frac{A^2 (1 - E^2)^2}{(1 - E^2 \sin^2 \Phi)^3} \\ \langle \mathbf{G}_\Lambda | \mathbf{G}_\Phi \rangle = G_{\Lambda\Phi} = G_{12} = 0 \end{cases}$$

$$G_{KL} = \frac{\partial X^I}{\partial U^K} \frac{\partial X^I}{\partial U^L} = \begin{bmatrix} \frac{A^2 \cos^2 \Phi}{1 - E^2 \sin^2 \Phi} & 0 \\ 0 & \frac{A^2(1 - E^2)^2}{(1 - E^2 \sin^2 \Phi)^3} \end{bmatrix}$$

Karte φ : polare Koordinaten

$$x = r \cos \alpha, \quad y = r \sin \alpha$$

$$\frac{\partial x^i}{\partial u^k} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial r} \\ \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r \sin \alpha & \cos \alpha \\ r \cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix}$$

$$g_{kl} = \frac{\partial x^i}{\partial u^k} \frac{\partial x^i}{\partial u^l} = \begin{bmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Abbildungsgleichungen

$$\begin{array}{ll} r = f(\Delta) & \text{oder} \\ \alpha = \Lambda & \left[\begin{array}{l} x = f(\Delta) \cos \Lambda; \quad \Delta := \frac{\pi}{2} - \Phi \\ y = f(\Delta) \sin \Lambda \end{array} \right] \end{array}$$

Im Falle des Rotationellipsoides führt die Parametrisierung (Λ, Φ) auf „flächennormale Koordinaten“, d.h. daß (Λ, Φ) die „sphärischen Koordinaten“ des Flächennormalenvektors

$$\frac{\mathbf{G}_\Lambda \times \mathbf{G}_\Phi}{\|\mathbf{G}_\Lambda \times \mathbf{G}_\Phi\|}$$

sind. D.h. aber auch, daß $\Delta := \frac{\pi}{2} - \Phi$ als *Poldistanz* eingeführt werden kann!

Achtung: Hier ist die Poldistanz des Flächennormalenvektors gemeint. Die polare Koordinate α in einer normal liegenden Tangentialebene ist nur im Falle eines kreisförmigen Äquators (Rotationellipsoid) gleich der ellipsoidischen Länge Λ .

Deformationstensor

$$c_{KL} = g_{kl} \frac{\partial u^k}{\partial U^K} \frac{\partial u^l}{\partial U^L} = \frac{\partial x^i}{\partial U^K} \frac{\partial x^i}{\partial U^L}$$

$$\frac{\partial x^i}{\partial U^K} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \Lambda} & \frac{\partial x}{\partial \Delta} \\ \frac{\partial y}{\partial \Lambda} & \frac{\partial y}{\partial \Delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f(\Delta) \sin \Lambda & f'(\Delta) \cos \Lambda \\ +f(\Delta) \cos \Lambda & f'(\Delta) \sin \Lambda \end{bmatrix}$$

$$c_{KL} = \begin{bmatrix} f^2(\Delta) & 0 \\ 0 & f'^2(\Delta) \end{bmatrix}, f(\Delta) = f(\frac{\pi}{2} - \Phi), f' = \frac{d}{d\Delta} f(\Delta)$$

Hauptstreckungen

$$\Lambda_1 = \sqrt{c_{11}/G_{11}} = f(\Delta) \sqrt{1 - E^2 \cos^2 \Delta} / (A \sin \Delta)$$

$$\Lambda_2 = \sqrt{c_{22}/G_{22}} = f'(\Delta) (1 - E^2 \cos^2 \Delta)^{3/2} / (A(1 - E^2))$$

Λ_1 Streckung in Richtung des Parallelkreises $\Delta = \text{const.}$

Λ_2 Streckung in Richtung des Meridians $\Lambda = \text{const.}$

Struktur der Koordinatenlinien

- (i) $y = \tan \Lambda x$ Gerade für $\Lambda = \text{const.}$ (Meridian)
- (ii) $x^2 + y^2 = f^2(\pi/2 - \Phi)$ Kreise für $\Phi = \text{const.}$ (Parallelkreise)

3.4 Spezielle Abbildungen des Rotationsellipsoides auf eine Tangentialebene

3.4.1 Normale Abbildung auf eine Tangentialebene, äquidistant auf der Schar der Parallelkreise (mittabstandstreue azimutale Abbildung)

Forderung der Äquidistanz der abgebildeten Meridiane:

$$\Lambda_2 = 1 \implies f'(\Delta) (1 - E^2 \cos^2 \Delta)^{3/2} / (A(1 - E^2)) = 1 \implies$$

$$df = A(1 - E^2) \frac{d\Delta}{(1 - E^2 \cos^2 \Delta)^{3/2}}$$

Überführung des Integrals

$$f(\Delta) = \int_0^\Delta \frac{d\Delta'}{(1 - E^2 \cos^2 \Delta')^{3/2}} A(1 - E^2) + \text{const.}$$

in den Standard eines *elliptischen Integrals zweiter Art*:

$$\begin{aligned} \tan \Phi^* &= \sqrt{1 - E^2} \tan \Phi, \quad \Phi^* = \frac{\pi}{2} - \Delta^* \quad \text{reduzierte Breite} \\ f(\Delta) &= A(1 - E^2) \int_{\frac{\pi}{2} - \Phi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\Phi'}{(1 - E^2 \sin^2 \Phi')^{3/2}} = A \int_{\frac{\pi}{2} - \Phi^*}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - E^2 \cos^2 \Phi^*} d\Phi^* \\ &= A \int_0^{\Delta} \sqrt{1 - E^2 \sin^2 \Delta^*} d\Delta^* = AE \left[\frac{\pi}{2} - \arctan \left(\frac{B}{A} \tan \Phi \right); E \right] \end{aligned}$$

Die Integrationskonstante const. verschwindet, da wir $f(\Delta = 0) = 0$ fordern.

Satz von B. Taylor:

$$\begin{aligned} (1+x)^y &= 1 + \frac{1}{1!} y(1+x)^{y-1}|_{x=0} x + \frac{1}{2!} y(y-1)(1+x)^{y-2}|_{x=0} x^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!} y(y-1)(y-2)(1+x)^{y-3}|_{x=0} x^3 + \mathcal{O}(x^4) \quad \forall x < 1 \\ (1+x)^y &= (1 - E^2 \cos^2 \Delta)^{-3/2} : x = -E^2 \cos^2 \Delta, y = -\frac{3}{2} \\ (1 - E^2 \cos^2 \Delta)^{-3/2} &= 1 + \frac{3}{2} E^2 \cos^2 \Delta + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} E^4 \cos^4 \Delta + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} E^6 \cos^6 \Delta + \mathcal{O}(E^8) \\ \cos^2 \Delta &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\Delta \\ \cos^4 \Delta &= \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2\Delta + \frac{1}{8} \cos 4\Delta \\ \cos^6 \Delta &= \frac{5}{16} + \frac{15}{32} \cos 2\Delta + \frac{3}{16} \cos 4\Delta + \frac{1}{32} \cos 6\Delta \\ (1 - E^2 \cos^2 \Delta)^{-3/2} &= 1 + \frac{3}{2} E^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\Delta \right) + \frac{15}{8} E^4 \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2\Delta + \frac{1}{8} \cos 4\Delta \right) \\ &\quad + \frac{35}{16} E^6 \left(\frac{5}{16} + \frac{15}{32} \cos 2\Delta + \frac{3}{16} \cos 4\Delta + \frac{1}{32} \cos 6\Delta \right) + \mathcal{O}(E^8) \\ (1 - E^2 \cos^2 \Delta)^{-3/2} &= 1 + \frac{3}{4} E^2 + \frac{45}{64} E^4 + \frac{175}{256} E^6 + \mathcal{O}(E^8) \\ &\quad + \left(\frac{3}{4} E^2 + \frac{15}{16} E^4 + \frac{525}{512} E^6 + \mathcal{O}(E^8) \right) \cos 2\Delta \\ &\quad + \left(\frac{15}{64} E^4 + \frac{105}{256} E^6 + \mathcal{O}(E^8) \right) \cos 4\Delta \\ &\quad + \left(\frac{35}{512} E^6 + \mathcal{O}(E^8) \right) \cos 6\Delta + \mathcal{O}(E^8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1 - E^2)(1 - E^2 \cos^2 \Delta)^{-\frac{3}{2}} &= 1 - \frac{1}{4}E^2 - \frac{3}{64}E^4 - \frac{5}{256}E^6 + \mathcal{O}(E^8) \\
&\quad + \cos 2\Delta \left(\frac{3}{4}E^2 + \frac{3}{16}E^4 + \frac{45}{512}E^6 + \mathcal{O}(E^8) \right) \\
&\quad + \cos 4\Delta \left(\frac{15}{64}E^4 + \frac{45}{256}E^6 + \mathcal{O}(E^8) \right) \\
&\quad + \cos 6\Delta \left(\frac{35}{512}E^6 + \mathcal{O}(E^8) \right) + \mathcal{O}(E^8)
\end{aligned}$$

$$\int \cos nx \, dx = \frac{1}{n} \sin nx$$

$$\begin{aligned}
\int_0^\Delta (1 - E^2)(1 - E^2 \cos^2 \Delta')^{-3/2} d\Delta' &= \left(1 - \frac{1}{4}E^2 - \frac{3}{64}E^4 - \frac{5}{256}E^6 + \mathcal{O}(E^8) \right) \Delta \\
&\quad + \sin 2\Delta \left(\frac{3}{8}E^2 + \frac{3}{32}E^4 + \frac{45}{1024}E^6 + \mathcal{O}(E^8) \right) \\
&\quad + \sin 4\Delta \left(\frac{15}{256}E^4 + \frac{45}{1024}E^6 + \mathcal{O}(E^8) \right) \\
&\quad + \sin 6\Delta \left(\frac{35}{3072}E^6 + \mathcal{O}(E^8) \right) + \mathcal{O}(E^8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(\Delta) &= A \int_0^\Delta (1 - E^2)(1 - E^2 \cos^2 \Delta')^{-3/2} d\Delta' = \\
&= A \left(\left(1 - \frac{1}{4}E^2 - \frac{3}{64}E^4 - \frac{5}{256}E^6 + \mathcal{O}(E^8) \right) \left(\frac{\pi}{2} - \Phi \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{3}{8}E^2 + \frac{3}{32}E^4 + \frac{45}{1024}E^6 + \mathcal{O}(E^8) \right) \sin 2\Phi \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{15}{256}E^4 + \frac{45}{1024}E^6 + \mathcal{O}(E^8) \right) \sin 4\Phi \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{35}{3072}E^6 + \mathcal{O}(E^8) \right) \sin 6\Phi + \mathcal{O}(E^8) \right)
\end{aligned}$$

Abbildungsgleichungen

$$\begin{aligned}
x &= f(\Delta) \cos \Lambda \\
y &= f(\Delta) \sin \Lambda
\end{aligned}$$

“ Geodetic Reference System 1980 ”
Bulletin Géodésique 58, No. 3 (1984) 388–398

große Halbachse	$A = 6.378.137 \text{ m}$
Äquatorradius, kleine Halbachse	$B = 6.356.752,3141 \text{ m}$
Exzentrizität	$E^2 = 0,006.694.380.022.90$
Abplattung	$F = (A-B)/A = 0,003.352.810.681.18$
	$F^{-1} = 298,257.222.101$

Hauptstreckungen

$$\Lambda_1 = f(\Delta)\sqrt{1 - E^2 \cos^2 \Delta}/(A \sin \Delta) = f\left(\frac{\pi}{2} - \Phi\right)\sqrt{1 - E^2 \sin^2 \Phi}/(A \cos \Phi)$$

$$\Lambda_2 = 1$$

3.4.2 Normale konforme Abbildung auf eine Tangentialebene

Forderung der Konformität: $\Lambda_1 = \Lambda_2 \implies$

$$\frac{f(\Delta)\sqrt{1 - E^2 \cos^2 \Delta}}{A \sin \Delta} = \frac{f'(\Delta)(1 - E^2 \cos^2 \Delta)^{3/2}}{A(1 - E^2)} \implies$$

$$\frac{df}{f} = \frac{1 - E^2}{\sin \Delta(1 - E^2 \cos^2 \Delta)} d\Delta \implies$$

$$\ln f = \int \frac{1 - E^2}{\sin \Delta(1 - E^2 \cos^2 \Delta)} d\Delta + \ln c$$

“isometrische Poldistanz”

Partialbruchzerlegung

$$\frac{1 - E^2}{\sin \Delta(1 - E^2 \cos^2 \Delta)} = \frac{1}{\sin \Delta} - \frac{E}{2} \left(\frac{E \sin \Delta}{1 + E \cos \Delta} + \frac{E \sin \Delta}{1 - E \cos \Delta} \right)$$

$$\int \frac{1 - E^2}{\sin \Delta(1 - E^2 \cos^2 \Delta)} d\Delta = \ln \tan \frac{\Delta}{2} - \frac{E}{2} \ln \frac{1 - E \cos \Delta}{1 + E \cos \Delta}$$

$$= \operatorname{artanh}(\cos \Delta) - E \operatorname{artanh}(E \cos \Delta) \implies$$

$$f(\Delta) = c \left(\frac{1 + E \cos \Delta}{1 - E \cos \Delta} \right)^{E/2} \tan \frac{\Delta}{2}$$

Forderung im Nordpol: $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \Lambda_1(\Delta) = 1$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} c \left(\frac{1 + E \cos \Delta}{1 - E \cos \Delta} \right)^{E/2} \tan \frac{\Delta}{2} \frac{\sqrt{1 - E^2 \cos^2 \Delta}}{A \sin \Delta} = 1 \implies$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \Lambda_1(\Delta) = c \left(\frac{1 + E}{1 - E} \right)^{E/2} \frac{\sqrt{1 - E^2}}{A} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\tan \frac{\Delta}{2}}{\sin \Delta} = 1$$

\uparrow
 „ $\frac{0}{0}$ “

L'Hospital-Regel „ $\frac{0}{0}$ “:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\tan \frac{\Delta}{2}}{\sin \Delta} &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{(\tan \frac{\Delta}{2})'}{(\sin \Delta)'} \\ (\tan \frac{\Delta}{2})' &= \frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2 \frac{\Delta}{2}} = \frac{1}{1 + \cos \Delta} \\ (\sin \Delta)' &= \cos \Delta \end{aligned} \right] \implies$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\tan \frac{\Delta}{2}}{\sin \Delta} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos \Delta} \cdot \frac{1}{\cos \Delta} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \Lambda_1(\Delta) = \frac{c}{2A} \left(\frac{1 + E}{1 - E} \right)^{E/2} \sqrt{1 - E^2} = 1 \implies$$

$$\boxed{c = \frac{2A}{\sqrt{1 - E^2}} \left(\frac{1 - E}{1 + E} \right)^{E/2}}$$

Abbildungsgleichungen

$$\boxed{f(\Delta) = \frac{2A}{\sqrt{1 - E^2}} \left(\frac{1 - E}{1 + E} \right)^{E/2} \left(\frac{1 + E \cos \Delta}{1 - E \cos \Delta} \right)^{E/2} \tan \frac{\Delta}{2}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= f(\Delta) \cos \Lambda \\ y &= f(\Delta) \sin \Lambda \end{aligned} \quad \Delta = \frac{\pi}{2} - \Phi}$$

Hauptstreckungen

$$\boxed{\Lambda_1 = \Lambda_2 = f(\Delta) \frac{\sqrt{1 - E^2 \cos^2 \Delta}}{A \sin \Delta}}$$

3.4.3 Normale flächentreue Abbildung auf eine Tangentialebene

Forderung der Flächentreue: $\Lambda_1 \Lambda_2 = 1$

$$\frac{f(\Delta) \sqrt{1 - E^2 \cos^2 \Delta}}{A \sin \Delta} \cdot \frac{f'(\Delta)(1 - E^2 \cos^2 \Delta)^{3/2}}{A(1 - E^2)} = 1 \implies$$

$$f df = A^2 \frac{(1 - E^2) \sin \Delta}{(1 - E^2 \cos^2 \Delta)^2} d\Delta \implies$$

$$\frac{f^2}{2} = A^2 \int_0^\Delta \frac{(1 - E^2) \sin \Delta}{(1 - E^2 \cos^2 \Delta)^2} d\Delta + c$$

$$\int \frac{\sin \Delta}{(1 - E^2 \cos^2 \Delta)^2} d\Delta = -\frac{1}{E} \int \frac{d(E \cos \Delta)}{(1 - E^2 \cos^2 \Delta)^2} = -\frac{1}{E} \int \frac{dy}{(1 - y^2)^2}$$

$$y := E \cos \Delta$$

Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{(1 - y^2)^2} = \frac{A}{(1 - y)^2} + \frac{B}{1 - y} + \frac{C}{(1 + y)^2} + \frac{D}{1 + y}$$

$$A = B = C = D = \frac{1}{4}$$

$$\int \frac{\sin \Delta}{(1 - E^2 \cos^2 \Delta)^2} d\Delta = -\frac{1}{4E} \int \left[\frac{1}{(1 - y)^2} + \frac{1}{(1 + y)^2} + \frac{1}{1 - y} + \frac{1}{1 + y} \right] dy$$

Standardintegrale

$$\int \frac{dy}{ay + b} = \frac{1}{a} \ln |ay + b|$$

$$\int \frac{dy}{(1 + y)^2} = -\frac{1}{1 + y}, \quad \int \frac{dy}{(1 - y)^2} = \frac{1}{1 - y}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin \Delta}{(1 - E^2 \cos^2 \Delta)^2} d\Delta &= -\frac{1}{4E} \left[\ln \frac{1 + y}{1 - y} + \frac{1}{1 - y} - \frac{1}{1 + y} \right] \\ &= \frac{1}{4E} \left[-\ln \frac{1 + E \cos \Delta}{1 - E \cos \Delta} - \frac{1}{1 - E \cos \Delta} + \frac{1}{1 + E \cos \Delta} \right] \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}f^2 = A^2 \frac{1-E^2}{4E} \left[-\ln \frac{1+E \cos \Delta}{1-E \cos \Delta} - \frac{1}{1-E \cos \Delta} + \frac{1}{1+E \cos \Delta} \right] + c$$

$$f(\Delta = 0) = 0 \iff f^2(\Delta = 0) = 0 \implies c = A^2 \frac{1-E^2}{4E} \left[\ln \frac{1+E}{1-E} + \frac{1}{1-E} - \frac{1}{1+E} \right]$$

\implies

$$f(\Delta) = A\sqrt{1-E^2} \sqrt{\frac{1}{1-E^2} + \frac{1}{2E} \ln \frac{1+E}{1-E} - \frac{\cos \Delta}{1-E^2 \cos^2 \Delta} - \frac{1}{2E} \ln \frac{1+E \cos \Delta}{1-E \cos \Delta}}$$

$$f(\Phi) = A\sqrt{1-E^2} \sqrt{\frac{1}{1-E^2} + \frac{1}{2E} \ln \frac{1+E}{1-E} - \frac{\sin \Phi}{1-E^2 \sin^2 \Phi} - \frac{1}{2E} \ln \frac{1+E \sin \Phi}{1-E \sin \Phi}}$$

Abbildungsgleichungen

$x = f(\Phi) \cos \Lambda$ $y = f(\Phi) \sin \Lambda$
--

Hauptstreckungen

$\Lambda_1 = \frac{f(\Phi)}{A} \frac{\sqrt{1-E^2 \sin^2 \Phi}}{\cos \Phi}$ $\Lambda_2 = \frac{A}{f(\Phi)} \frac{\cos \Phi}{\sqrt{1-E^2 \sin^2 \Phi}}$
--

3.5 Pseudoazimutale Abbildungen

Azimutale Abbildungen bei normaler Lage der Entwurfsachse sind gekennzeichnet durch die Abbildungsgleichungen vom Typ ($\alpha = \Lambda, r = f(\Phi)$) in polarer Darstellung bzw. ($x = r \cos \alpha = f(\Phi) \cos \Lambda, y = r \sin \alpha = f(\Phi) \sin \Lambda$) in cartesischer Darstellung der Koordinaten, welche die Abbildungsebene überdecken. Koordinatenlinien vom Typ $\Phi = \text{const.}$ ("Parallelkreise") werden als Kreise abgebildet ("concirculare Abbildung") dagegen Koordinatenlinien vom Typ $\Lambda = \text{const.}$ ("Meridiane", "Meridiankreise") als Geraden. Abweichungen von azimutalen Abbildungsgleichungen von diesem Typus, beispielsweise ($\alpha = c_3\Lambda, r = c_4f(\Lambda, \Phi)$) werden als pseudoazimutale Abbildungen bezeichnet.

Beispiel:

Hammer-Abbildung (benannt nach Ernst von Hammer, 1858-1925, Professor für Geodäsie, TH Stuttgart)

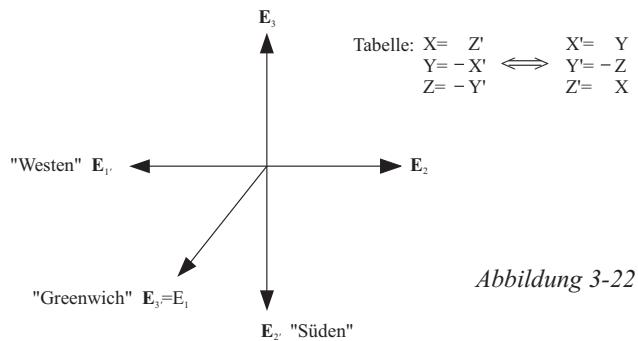
Ausgangspunkt: flächentreuer transversaler Azimutalentwurf

"transversales Koordinatensystem":

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &\rightarrow \mathbf{E}_{3'}, \quad \mathbf{E}_2 \rightarrow -\mathbf{E}_{1'}, \quad \mathbf{E}_3 \rightarrow -\mathbf{E}_{2'} \\ X &\rightarrow Z', \quad Y \rightarrow -X', \quad Z \rightarrow -Y' \end{aligned}$$

($\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$) Ausgangsbasis, ($\mathbf{E}_{1'}, \mathbf{E}_{2'}, \mathbf{E}_{3'}$) transversale Basis

"beide Basen sind rechtssinnig"



$$X' = R \cos A \cos B = -R \sin \Lambda \cos \Phi = -Y \quad (3(1))$$

$$Y' = R \sin A \cos B = -R \sin \Phi = -Z \quad (3(2))$$

$$Z' = R \sin B = R \cos \Lambda \cos \Phi = X \quad (3(3))$$

(A, B) heißen (Metallänge, Metabreite).

$$\begin{aligned}
 (3) &\Rightarrow \sin B = \cos \Lambda \cos \Phi \\
 (2)/(1) &\Rightarrow \tan A = \frac{\sin \Phi}{\cos \Phi \sin \Lambda} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \cos A = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 A}} = \frac{\cos \Phi \sin \Lambda}{\sqrt{1 - \cos^2 \Phi \cos^2 \Lambda}} \\ \sin A = \frac{\tan A}{\sqrt{1 + \tan^2 A}} = \frac{\sin \Phi}{\sqrt{1 - \cos^2 \Phi \cos^2 \Lambda}} \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

Die Tabelle enthält die Umrechnungsformeln (Λ, Φ) als *sphärische Länge und Breite* in (A, B) als sphärische *Metalänge und Metabreite*. In transversaler Lage ist

$$\begin{aligned}
 \alpha &= A, \quad r(B) = R\sqrt{2(1 - \sin B)} \\
 x &= r \cos \alpha = R\sqrt{2(1 - \sin B)} \cos A \\
 y &= r \sin \alpha = R\sqrt{2(1 - \sin B)} \sin A
 \end{aligned}$$

eine Darstellung des *flächentreuen transversalen Azimutalentwurfes*. Ein Test auf Flächentreue kann erfolgen über

$$(i) \quad \Lambda_1 \Lambda_2 = 1 \quad \text{oder} \quad (ii) \quad x_A y_B - x_B y_A = R^2 \cos B .$$

Mit den Untersuchungsformeln $(\Lambda, \Phi) \mapsto (A, B)$ ist eine Darstellung des flächentreuen transversalen Azimutalentwurfes

$$\left. \begin{aligned} \alpha(\Lambda, \Phi) &= \arctan \frac{\sin \Phi}{\cos \Phi \sin \Lambda} \\ r(\Lambda, \Phi) &= R\sqrt{2(1 - \cos \Phi \cos \Lambda)} \end{aligned} \right]$$

$$\begin{aligned}
 x &= R\sqrt{2(1 - \cos \Phi \cos \Lambda)} \frac{\cos \Phi \sin \Lambda}{\sqrt{1 - \cos^2 \Phi \cos^2 \Lambda}} \\
 y &= R\sqrt{2(1 - \cos \Phi \cos \Lambda)} \frac{\sin \Phi}{\sqrt{1 - \cos^2 \Phi \cos^2 \Lambda}}
 \end{aligned}$$

Die "flächentreuen Koordinaten" (x, y) werden als Ausgangspunkt genommen, eine weitere flächentreue Abbildung zu finden, die gewissen *Eichvorschriften*

unterworfen wird. Traditionell wird von einem *Umbeziffern* des *alten flächen-treuen* Entwurfes gesprochen. Heißen (x', y') die *neuen* cartesischen flächen-treuen Koordinaten, (x, y) die *alten* cartesischen Koordinaten, dann ist eine Abbildung $(x, y) \mapsto (x', y')$ genau dann *flächentreu*, falls

$$x'_x y'_y - x'_y y'_x = 1$$

gilt.

Beweis:

(1) Transformation der Metrik der Kugel auf flächentreue Koordinaten (x, y)

$$\begin{aligned} dS^2 &= G_{KL} dU^K dU^L = R^2 \cos^2 \Phi d\Lambda^2 + R^2 d\Phi^2 \\ &= \frac{R^2 - y^2}{R^2} dx^2 + \frac{R^2}{R^2 - y^2} dy^2 = \lambda_1^2 dx^2 + \lambda_2^2 dy^2 = C_{kl} dx^k dx^l \end{aligned}$$

"subject to" $[C_{kl}] = \text{Diag}(\lambda_1^2, \lambda_2^2)$, $\lambda_1^2 \lambda_2^2 = 1$, $\lambda_1^2 = (R^2 - y^2)/R^2 = 1/\lambda_2^2$.

Beispielsweise stellen wir die Metrik der Kugel in *flächentreuen Koordinaten* eines *flächentreuen normalen Zylinderentwurfes* (\rightarrow Kapitel 4.2.3) dar.

$$x = R\Lambda, \quad y = R \sin \Phi \iff \Lambda = x/R, \quad \sin \Phi = y/R, \quad \cos \Phi = R^{-1} \sqrt{R^2 - y^2}$$

$$\begin{cases} d\Lambda = R^{-1} dx, \quad (\sin \Phi)_y = \cos \Phi \Phi_y = R^{-1} \\ d\Phi = \frac{1}{\cos \Phi} \frac{1}{R} dy = \frac{1}{\sqrt{R^2 - y^2}} dy \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} R^2 \cos^2 \Phi d\Lambda^2 = (R^2 - y^2) R^{-2} dx^2 \\ R^2 d\Phi^2 = R^2 (R^2 - y^2)^{-1} dy^2 \end{bmatrix}$$

(2) Transformation der Metrik der Abbildungsebene auf flächentreue Koordinaten (x', y') (Cauchy-Green Tensor)

$$ds^2 \delta_{k'l'} dx^{k'} dx^{l'} = \delta_{k'l'} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^l} dx^k dx^l = c_{kl} dx^k dx^l.$$

Satz:

Eine Abbildung $(x, y) \sim x^k \mapsto x^{k'} \sim (x', y')$ ist lokal flächentreu genau dann, wenn

$$\det c_{kl} = \det C_{kl} = \lambda_1^2 \lambda_2^2 = 1 .$$

Beweis:

$$\det c_{kl} = \det \delta_{k'l'}(\partial_k x^{k'})(\partial_l x^{l'})$$

$$\left[\begin{array}{l} c_{1'1'} = x_x'^2 + y_x'^2, \quad c_{1'2'} = x_x' x_y' + y_x' y_y' \\ \quad c_{2'2'} = x_y'^2 + y_y'^2 \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} \det c_{kl} &= [(x'_x)^2 + (y'_x)^2][(x'_y)^2 + (y'_y)^2] - (x'_x x'_y + y'_x y'_y)^2 \\ &= (x'_x y'_y)^2 - 2x'_x y'_y x'_y y'_x + (x'_y y'_x)^2 \\ &= (x'_x y'_y - x'_y y'_x)^2 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \det c_{kl} &= \det C_{kl} = 1 \\ \text{orientierungsreie Abbildung } (x, y) &\mapsto (x', y') \\ \implies x'_x y'_y - x'_y y'_x &= +1 \end{aligned} \right] \implies$$



Lösung der nichtlinearen Differentialgleichung $x'_x y'_y - x'_y y'_x = 1$

Ansatz:

$$\left. \begin{aligned} x' &= c_1 x + c'_1 y \\ y' &= c'_2 x + c_2 y \end{aligned} \right] \implies x'_x y'_y - x'_y y'_x = c_1 c_2 - c'_1 c'_2 = 1$$

“lineare affine Transformation”
Wir setzen hier $c'_1 = 0, c'_2 = 0$, so daß

$$x' = \frac{c_1}{\sqrt{c_1 c_2}} x, \quad y' = \frac{c_2}{\sqrt{c_1 c_2}} y$$

gilt. Offensichtlich ist $x'_x y'_y - x'_y y'_x = \frac{c_1}{\sqrt{c_1 c_2}} \frac{c_2}{\sqrt{c_1 c_2}} = 1$.

Eine zweite Transformation vom Typ "flächentreu nach flächentreu" $(x'', y'') \rightarrow (x''', y''')$ geht aus vom flächentreuen normalen Zylinderentwurf

$$x'' = R\Lambda, \quad y'' = R \sin \Phi.$$

Leicht ist die Flächentreue anhand $x''_\Lambda y''_\Phi - x''_\Phi y''_\Lambda = R^2 \cos \Phi$ mit $x''_\Lambda = R, x''_\Phi = 0, y''_\Lambda = 0, y''_\Phi = R \cos \Phi$ zu prüfen.

$$(x'', y'') \rightarrow (x''', y''') \quad \text{flächentreu} \iff x'''_{x''} y'''_{y''} - x'''_{y''} y'''_{x''} = +1.$$

Der obige Ansatz einer linearen affinen Transformation greift auch hier, namentlich

$$\begin{aligned} x''' &= c_3 x'', \quad y''' = c_4 y'' \iff c_3 c_4 = 1 \\ x''' &= R c_3 \Lambda, \quad y''' = R c_4 \sin \Phi \end{aligned}$$

Definition: $c_3 \Lambda =: \Lambda^*, \quad c_4 \sin \Phi =: \sin \Phi^*$

Corollary: $\Lambda = c_3^* \Lambda^*, \quad \Phi = \arcsin(c_4^* \sin \Phi^*)$
 $c_3^* c_3 = 1, \quad c_4^* c_4 = 1 \iff c_3^* = c_3^{-1}, \quad c_4^* = c_4^{-1}$.

1. Hammersches Postulat ($c_3 = \frac{1}{2}, \quad c_4 = 1$)

- (i) Der Pol soll als Punkt abgebildet werden: $\Phi = \Phi^* : c_4 = 1$.
- (ii) Das Halbkugelbild der flächentreuen Abbildung wird zum Bild der gesamten Kugelfläche

$$(0 < \Lambda < 2\pi) \sim (0 < \Lambda^* < \pi)$$

$$\Lambda^* = c_3 \Lambda \quad \text{z. B.} \quad \pi = 2c_3 \pi \iff c_3 = \frac{1}{2}.$$

Allgemeine Form der Abbildungsgleichungen

$$x = c_1 R \sqrt{2(1 - \cos \Phi^* \cos \Lambda^*)} \frac{\cos \Phi^* \sin \Lambda^*}{\sqrt{1 - \cos^2 \Phi^* \cos^2 \Lambda^*}}$$

$$y = c_2 R \sqrt{2(1 - \cos \Phi^* \cos \Lambda^*)} \frac{\sin \Phi^*}{\sqrt{1 - \cos^2 \Phi^* \cos^2 \Lambda^*}}$$

Transformation $\Lambda^* = c_3 \Lambda, \sin \Phi^* = c_4 \sin \Phi$

$$x = c_1 R \sqrt{2} \frac{\sqrt{1 - c_4^2 \sin^2 \Phi} \sin c_3 \Lambda}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - c_4^2 \sin^2 \Phi} \cos c_3 \Lambda}}$$

$$y = c_2 R \sqrt{2} \frac{c_4 \sin \Phi}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - c_4^2 \sin^2 \Phi} \cos c_3 \Lambda}}$$

$x(\Lambda, \Phi; c_1, c_2, c_3, c_4), y(\Lambda, \Phi; c_1, c_2, c_3, c_4)$ stellen die allgemeine Form der flächentreuen Abbildungsgleichungen in transversaler Lage in denen die "flächentreuen Koordinaten" $(\Lambda, \sin \Phi)$ in die "flächentreuen Koordinaten" $c_3 \Lambda, c_4 \sin \Phi$ transformiert wurden.

2. Hammersches Postulat ($c_1 = 2, c_2 = 1$)

Die Länge des Nullmeridians soll sich zum Äquatorbild wie $1 : 2$ verhalten:

$$\left. \begin{aligned} x(\Lambda = 0, \Phi = \frac{\pi}{2}) &= 0, \quad y(\Lambda = 0, \Phi = \frac{\pi}{2}; c_3 = \frac{1}{2}, c_4 = 1) = c_2 \sqrt{2} R \\ &\text{versus} \\ x(\Lambda = \pi, \Phi = 0; c_3 = \frac{1}{2}, c_4 = 1) &= c_1 \sqrt{2} R, \quad y(\Lambda = \pi, \Phi = 0) = 0 \end{aligned} \right] \Rightarrow$$

$$x(\Lambda = 0, \Phi = \frac{\pi}{2})/y(\Lambda = \pi, \Phi = 0) = 1 : 2 \quad \text{z. B. } \underline{\underline{c_1 = 2, c_2 = 1}} .$$



Das erste und zweite Hammersche Postulat führt auf die speziellen Abbildungsgleichungen

$$x = 2\sqrt{2} \frac{R \cos \Phi \sin \frac{\Lambda}{2}}{\sqrt{1 + \cos \Phi \cos \frac{\Lambda}{2}}}, \quad y = \sqrt{2} \frac{R \sin \Phi}{\sqrt{1 + \cos \Phi \cos \frac{\Lambda}{2}}}$$

Hammer, E.v. (1892):

Über die Planisphäre von Aitow und verwandte Entwürfe, insbesondere neue flächen-treue ähnlicher Art, Petermanns Geographische Mitteilungen (Gotha) 38 (1892) 85-87

Satz (Begrenzungslinie des E.v. Hammer-Entwurfes):

Die Begrenzungslinie auf den Achsenwerten

$$(i) \quad x(\Lambda = \pi, \Phi = 0), \quad y(\Lambda = \pi, \Phi = 0) = 0$$

$$(ii) \quad x(\Lambda = 0, \Phi = \frac{\pi}{2}) = 0, \quad y(\Lambda = 0, \Phi = \frac{\pi}{2})$$

ist die Ellipse $E_{2\sqrt{2}R, \sqrt{2}R}^1 := \{\mathbf{x} \in R^2 \mid \frac{x^2}{8R^2} + \frac{y^2}{2R^2} = 1\}$.

Beweis:

$$\frac{x^2}{(2\sqrt{2}R)^2} = \frac{\cos^2 \Phi \sin^2 \frac{\Lambda}{2}}{1 + \cos \Phi \cos \frac{\Lambda}{2}}, \quad \frac{y^2}{(\sqrt{2}R)^2} = \frac{\sin^2 \Phi}{1 + \cos \Phi \cos \frac{\Lambda}{2}}$$

$$\frac{x^2}{(2\sqrt{2}R)^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{2}R)^2} = \frac{\cos^2 \Phi \sin^2 \frac{\Lambda}{2} + \sin^2 \Phi}{1 + \cos \Phi \cos \frac{\Lambda}{2}}$$

$$(i) \quad \Lambda = \pi, \quad \Phi = 0 \implies \frac{x^2}{(2\sqrt{2}R)^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{2}R)^2} = 1$$

$$(ii) \quad \Lambda = \pi, \quad \Phi = \frac{\pi}{2} \implies \frac{x^2}{(2\sqrt{2}R)^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{2}R)^2} = 1$$



Test:

Sind die allgemeinen Abbildungsgleichungen $x(\Lambda, \Phi; c_1, c_2, c_3, c_4), y(\Lambda, \Phi; c_1, c_2, c_3, c_4)$ flächentreu?

Behauptung: $x_\Lambda y_\Phi - x_\Phi y_\Lambda = R^2 \cos \Phi, c_1 c_2 c_3 c_4 = 1$

Beweis:

$$x(\Lambda, \Phi) = c_1 f(\Lambda, \Phi) \sqrt{1 - c_4^2 \sin^2 \Phi} \sin c_3 \Lambda$$

$$y(\Lambda, \Phi) = c_2 f(\Lambda, \Phi) c_4 \sin \Phi$$

$$f(\Lambda, \Phi) := R \sqrt{2} (1 + \sqrt{1 - c_4^2 \sin^2 \Phi} \cos c_3 \Lambda)^{-1/2}$$

$$f_\Lambda = \frac{R}{2} \sqrt{2} (1 + \sqrt{1 - c_4^2 \sin^2 \Phi} \cos c_3 \Lambda)^{-3/2} \sqrt{1 - c_4^2 \sin^2 \Phi} c_3 \sin c_3 \Lambda$$

$$f_\Phi = +\frac{R}{2} \sqrt{2} (1 + \sqrt{1 - c_4^2 \sin^2 \Phi} \cos c_3 \Lambda)^{-3/2} (1 - c_4^2 \sin^2 \Phi)^{-1/2} c_4^2 \sin \Phi \cos \Phi \cos c_3 \Lambda$$

$$x_\Lambda y_\Phi = [c_1 f_\Lambda \sqrt{1 - c_4^2 \sin^2 \Phi} \sin c_3 \Lambda + c_1 f \sqrt{1 - c_4^2 \sin^2 \Phi} c_3 \cos c_3 \Lambda] \\ \cdot [c_2 f_\Phi c_4 \sin \Phi + c_2 f c_4 \cos \Phi]$$

$$x_\Phi y_\Lambda = [c_1 f_\Phi \sqrt{1 - c_4^2 \sin^2 \Phi} \sin c_3 \Lambda - c_1 f (1 - c_4^2 \sin^2 \Phi)^{-1/2} c_4^2 \sin \Phi \cos \Phi \sin c_3 \Lambda] \\ \cdot [c_2 f_\Lambda c_4 \sin \Phi]$$

$$x_\Lambda y_\Phi - x_\Phi y_\Lambda = c_1 c_2 f_\Lambda f_\Phi \sin c_3 \Lambda c_4 \sin \Phi \sqrt{1 - c_4^2 \sin^2 \Phi} \\ + c_1 c_2 f f_\Lambda \sin c_3 \Lambda \sqrt{1 - c_4^2 \sin^2 \Phi} c_4 \cos \Phi \\ + c_1 c_2 f f_\Phi c_3 \cos c_3 \Lambda c_4 \sin \Phi \sqrt{1 - c_4^2 \sin^2 \Phi} \\ + c_1 c_2 f^2 c_3 \cos c_3 \Lambda c_4 \cos \Phi \sqrt{1 - c_4^2 \sin^2 \Phi} \\ - c_1 c_2 f_\Lambda f_\Phi \sin c_3 \Lambda c_4 \sin \Phi \sqrt{1 - c_4^2 \sin^2 \Phi} \\ - c_1 c_2 f f_\Lambda \sin c_3 \Lambda c_4^3 \sin^2 \Phi \cos \Phi (1 - c_4^2 \sin^2 \Phi)^{-1/2}$$

$$\begin{aligned}
x_\Lambda y_\Phi - x_\Phi y_\Lambda &= c_1 c_2 f f_\Lambda \sin c_3 \Lambda (1 - c_4^2 \sin^2 \Phi)^{-1/2} \\
&\quad \cdot c_4 [(1 - c_4^2 \sin^2 \Phi) + c_4^2 \sin^2 \Phi] \cos \Phi \\
&\quad + c_1 c_2 c_3 c_4 f f_\Phi \cos c_3 \Lambda (1 - c_4^2 \sin^2 \Phi)^{1/2} \sin \Phi \\
&\quad + c_1 c_2 c_3 c_4 f^2 \cos c_3 \Lambda (1 - c_4^2 \sin^2 \Phi)^{1/2} \cos \Phi
\end{aligned}$$

<p><u>1. Term:</u> $c_1 c_2 c_3 c_4 R^2 \cos \Phi [1 + (1 - c_4^2 \sin^2 \Phi)^{1/2} \cos c_3 \Lambda]^{-2} \sin^2 c_3 \Lambda$</p> <p><u>2. Term:</u> $c_1 c_2 c_3 c_4 R^2 \cos \Phi [1 + (1 - c_4^2 \sin^2 \Phi)^{1/2} \cos c_3 \Lambda]^{-2} c_4^2 \sin^2 \Phi \cos^2 c_3 \Lambda$</p> <p><u>3. Term:</u></p> $ \begin{aligned} &c_1 c_2 c_3 c_4 R^2 \cos \Phi 2 [1 + (1 - c_4^2 \sin^2 \Phi)^{1/2} \cos c_3 \Lambda]^{-2} \\ &\quad \cdot [1 + (1 - c_4^2 \sin^2 \Phi)^{1/2} \cos c_3 \Lambda] (1 - c_4^2 \sin^2 \Phi)^{1/2} \cos c_3 \Lambda \\ &= c_1 c_2 c_3 c_4 R^2 \cos \Phi [1 + (1 - c_4^2 \sin^2 \Phi)^{1/2} \cos c_3 \Lambda]^{-2} \\ &\quad \cdot [2(1 - c_4^2 \sin^2 \Phi)^{1/2} \cos c_3 \Lambda + 2(1 - c_4^2 \sin^2 \Phi) \cos^2 c_3 \Lambda] \\ &= c_1 c_2 c_3 c_4 R^2 \cos \Phi [1 + (1 - c_4^2 \sin^2 \Phi)^{1/2} \cos c_3 \Lambda]^{-2} \\ &\quad \cdot [2(1 - c_4^2 \sin^2 \Phi)^{1/2} \cos c_3 \Lambda + 2 \cos^2 c_3 \Lambda - 2c_4^2 \sin^2 \Phi \cos^2 c_3 \Lambda] \end{aligned} $
--

$$\begin{aligned}
x_\Lambda y_\Phi - x_\Phi y_\Lambda &= c_1 c_2 c_3 c_4 R^2 \cos \Phi [1 + (1 - c_4^2 \sin^2 \Phi)^{1/2} \cos c_3 \Lambda]^{-2} \\
&\quad \cdot [1 - \cos^2 c_3 \Lambda + c_4^2 \sin^2 \Phi \cos c_3 \Lambda + 2(1 - c_4^2 \sin^2 \Phi)^{1/2} \cos c_3 \Lambda \\
&\quad + 2 \cos^2 c_3 \Lambda - 2c_4^2 \sin^2 \Phi \cos^2 c_3 \Lambda] \\
&= c_1 c_2 c_3 c_4 R^2 \cos \Phi [1 + (1 - c_4^2 \sin^2 \Phi)^{1/2} \cos c_3 \Lambda]^{-2} \\
&\quad \cdot [1 + 2(1 - c_4^2 \sin^2 \Phi)^{1/2} \cos c_3 \Lambda + (1 - c_4^2 \sin^2 \Phi) \cos^2 c_3 \Lambda] \\
&= c_1 c_2 c_3 c_4 R^2 \cos \Phi [1 + (1 - c_4^2 \sin^2 \Phi)^{1/2} \cos c_3 \Lambda]^{-2} \\
&\quad \cdot [1 + (1 - c_4^2 \sin^2 \Phi)^{1/2} \cos c_3 \Lambda]^2 \\
&= c_1 c_2 c_3 c_4 R^2 \cos \Phi .
\end{aligned}$$



Problem:

Wie werden die Koordinatenlinien $\Lambda = \text{const.}$ ("Meridiane") und $\Phi = \text{const.}$ ("Parallelkreise") unter der Hammer-Abbildung in die Kartenebene übertragen?

1. Elimination von $\sin \frac{\Lambda}{2}, \cos \frac{\Lambda}{2}$

$$\begin{aligned}\sqrt{1 + \cos \Phi \cos \frac{\Lambda}{2}} y &= \sqrt{2} R \sin \Phi \implies \\ (1 + \cos \Phi \cos \frac{\Lambda}{2}) y^2 &= 2R^2 \sin^2 \Phi \implies \\ \cos \Phi \cos \frac{\Lambda}{2} &= (2R^2 \sin^2 \Phi - y^2) / y^2\end{aligned}$$

1. Ergebnis

$$\begin{aligned}\sin \frac{\Lambda}{2} &= \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\Lambda}{2}} = \sqrt{1 - \frac{(2R^2 \sin^2 \Phi - y^2)^2}{y^4 \cos^2 \Phi}} \\ \cos \Phi \sin \frac{\Lambda}{2} &= \cos \Phi \frac{1}{y^2 \cos \Phi} \sqrt{y^4 \cos^2 \Phi - (2R^2 \sin^2 \Phi - y^2)^2} \\ &= \frac{1}{y^2} \sqrt{y^4 \cos^2 \Phi - (2R^2 \sin^2 \Phi - y^2)^2}\end{aligned}$$

2. Ergebnis

$$x = 2\sqrt{2} \frac{R \cos \Phi \sin \frac{\Lambda}{2}}{\sqrt{1 + \cos \Phi \cos \frac{\Lambda}{2}}} \implies$$

$$(1 + \cos \Phi \cos \frac{\Lambda}{2}) x^2 = 8R^2 (\cos \Phi \sin \frac{\Lambda}{2})^2 \left[\begin{array}{c} \text{1. Ergebnis} \\ \text{2. Ergebnis} \end{array} \right] \implies$$

$$\frac{y^2 + 2R^2 \sin^2 \Phi - y^2}{y^2} x^2 = 8R^2 \frac{y^4 \cos^2 \Phi - (2R^2 \sin^2 \Phi - y^2)^2}{y^4}$$

$$\begin{aligned}2R^2 \sin^2 \Phi x^2 y^2 &= 8R^2 (y^4 - y^4 \sin^2 \Phi - 4R^4 \sin^4 \Phi + 4R^2 y^2 \sin^2 \Phi - y^4) \\ &= 8R^2 (4R^2 y^2 \sin^2 \Phi - y^4 \sin^2 \Phi - 4R^4 \sin^4 \Phi) \implies\end{aligned}$$

$$x^2 y^2 = 4(4R^2 y^2 - y^4 - 4R^4 \sin^2 \Phi) \text{ falls } \sin \Phi \neq 0 \implies$$

$$y^4 + \frac{1}{4} x^2 y^2 - 4R^2 y^2 + 4R^2 \sin^2 \Phi = 0 .$$

"Das Bild der Parallelkreise $\Phi = \text{const.}$ unter der Hammer-Abbildung ist eine algebraische Kurve vierten Grades".

2. Elimination von $\sin \Phi, \cos \Phi$

$$y/x = \frac{1}{2}R \sin \Phi / (R \cos \Phi \sin \frac{\Lambda}{2}) = \frac{1}{2} \frac{\tan \Phi}{\sin \frac{\Lambda}{2}} \implies$$

$$\tan \Phi = \frac{2y}{x} \sin \frac{\Lambda}{2}$$

$$\sin \Phi = \frac{\tan \Phi}{\sqrt{1 + \tan^2 \Phi}} = \frac{2 \sin \frac{\Lambda}{2}}{\sqrt{\frac{x^2 + 4y^2 \sin^2 \frac{\Lambda}{2}}{x^2}}} \frac{y}{x}$$

$\sin \Phi = \frac{2y \sin \frac{\Lambda}{2}}{\sqrt{x^2 + 4y^2 \sin^2 \frac{\Lambda}{2}}} \quad \text{3. Ergebnis}$	$\cos \Phi = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \Phi}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4y^2 \sin^2 \frac{\Lambda}{2}}} \quad \text{4. Ergebnis}$
---	--

$$(1 + \cos \Phi \cos \frac{\Lambda}{2})y^2 = 2R^2 \sin^2 \Phi \quad \left. \begin{array}{c} \\ \\ \text{4. Ergebnis} \end{array} \right] \implies$$

$$\frac{\sqrt{x^2 + 4y^2 \sin^2 \frac{\Lambda}{2}} + x \cos \frac{\Lambda}{2}}{\sqrt{x^2 + 4y^2 \sin^2 \frac{\Lambda}{2}}} y^2 = 8R^2 \frac{\sin^2 \frac{\Lambda}{2}}{x^2 + 4y^2 \sin^2 \frac{\Lambda}{2}} y^2$$

$$(x^2 + 4y^2 \sin^2 \frac{\Lambda}{2}) + \sqrt{x^2 + 4y^2 \sin^2 \frac{\Lambda}{2}} x \cos \frac{\Lambda}{2} = 8R^2 \sin^2 \frac{\Lambda}{2}$$

$$\sqrt{x^2 + 4y^2 \sin^2 \frac{\Lambda}{2}} x \cos \frac{\Lambda}{2} = 8R^2 \sin^2 \frac{\Lambda}{2} - x^2 - 4y^2 \sin^2 \frac{\Lambda}{2}$$

$$(x^2 + 4y^2 \sin^2 \frac{\Lambda}{2}) x^2 \cos^2 \frac{\Lambda}{2} = 64R^4 \sin^4 \frac{\Lambda}{2} - 16R^2 \sin^2 \frac{\Lambda}{2}$$

$$\cdot (x^2 + 4y^2 \sin^2 \frac{\Lambda}{2}) + (x^2 + 4y^2 \sin^2 \frac{\Lambda}{2})^2$$

$$x^4 (1 - \sin^2 \frac{\Lambda}{2}) + 4x^2 y^2 \sin^2 \frac{\Lambda}{2} (1 - \sin^2 \frac{\Lambda}{2}) = 64R^4 \sin^4 \frac{\Lambda}{2}$$

$$-16R^2 x^2 \sin^2 \frac{\Lambda}{2} - 64R^2 y^2 \sin^4 \frac{\Lambda}{2} + x^4 + 8x^2 y^2 \sin^2 \frac{\Lambda}{2} + 16y^4 \sin^4 \frac{\Lambda}{2} = 0$$

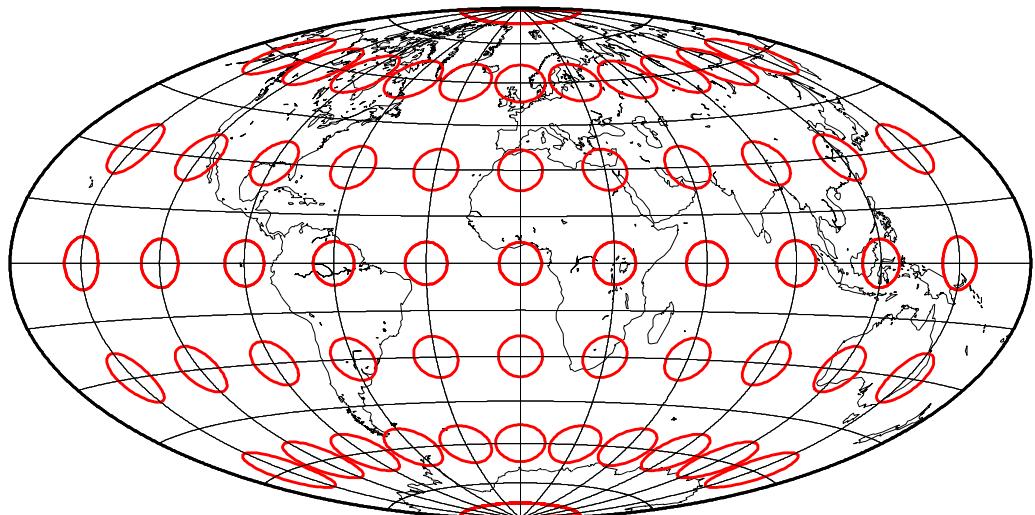
\implies

$$x^4 + 4x^2 y^2 (1 + \sin^2 \frac{\Lambda}{2}) + 16y^4 \sin^2 \frac{\Lambda}{2} - 64y^2 R^2 \sin^2 \frac{\Lambda}{2} - 16x^2 R^2 + 64R^4 \sin^2 \frac{\Lambda}{2} = 0$$

“Das Bild der Meridiane $\Lambda = \text{const.}$ unter der Hammer-Abbildung ist eine algebraische Kurve vierten Grades”.



Abbildungen 3-23, 3-24: Transversale flächentreue Azimutalabbildung



GMT 2002 Jan 17 10:53:01 pscoast -JH0/0.15cm -R-180/180/-90/90 -B30g30/g15 -Dc -A1000 -G255 -W0.25 -P -K -U/0/-2/c -X3 -Y18

Abbildung 3-25: Hammer-Abbildung: $c_1 = 2, c_2 = 1, c_3 = 1/2, c_4 = 1$

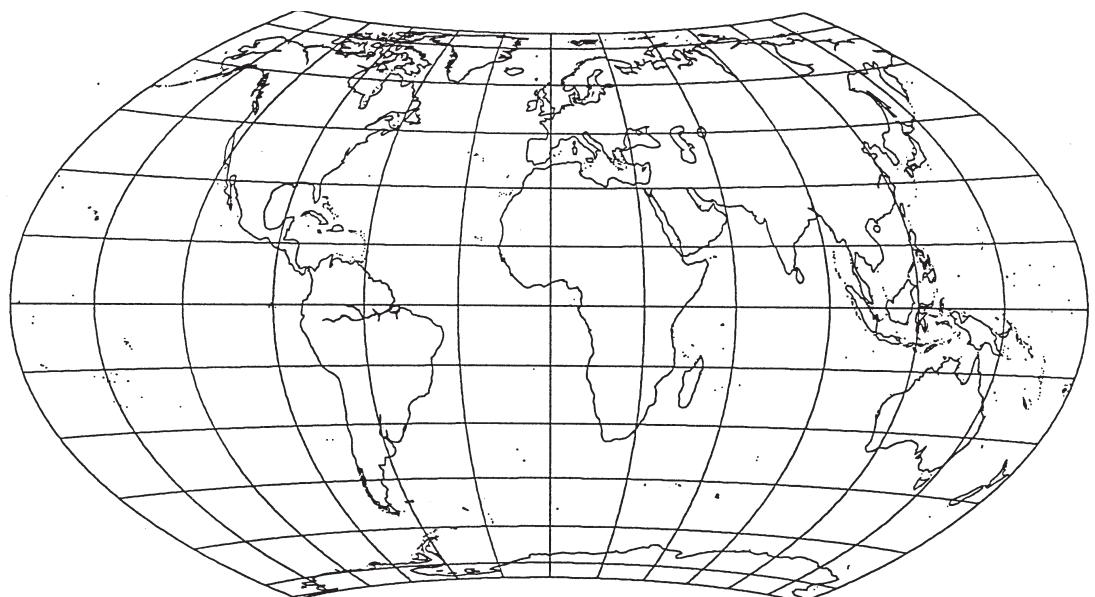


Abbildung 3-26: Hammer-Wagner-Abbildung (Wagner VII):
 $c_1 = 2.66723, c_2 = 1.24104, c_3 = 1/3, c_4 = 0.90631$

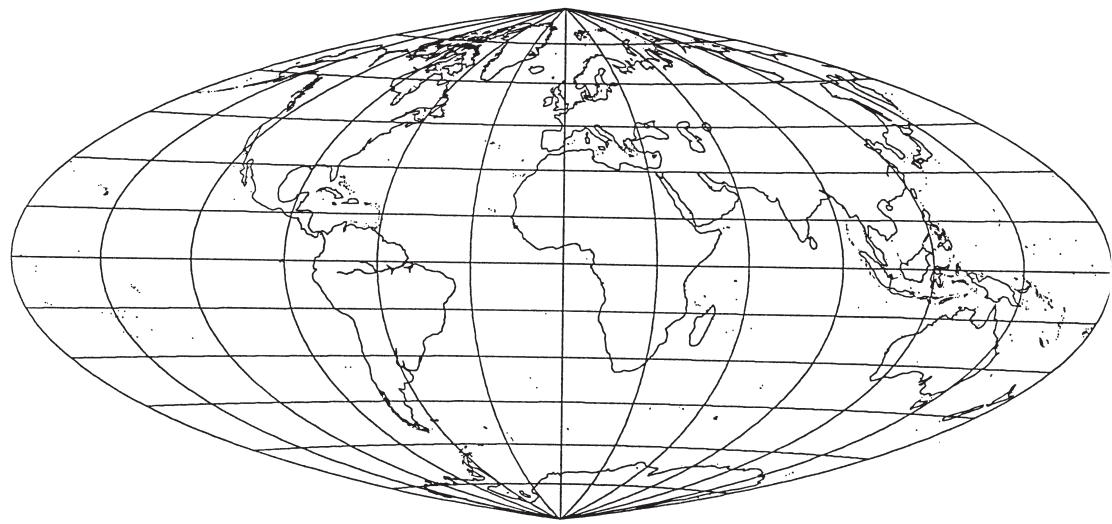


Abbildung 3-27: Eckert-Greifendorff-Abbildung:
 $c_1 = 4, c_2 = 1, c_3 = 1/4, c_4 = 1$

4 Zylinderabbildungen

Die Zylinderabbildungen haben zentrale Bedeutung als geodätische Abbildung (Abbildung eines Rotationsellipsoides in die Ebene: Landesvermessung).

- 4.1 Allgemeine Abbildungsgleichungen und Verzerrungsmaße für Zylinderabbildungen vom Typ äquidistant auf dem Äquator, im Falle der Kugel
- 4.2 Spezielle Zylinderabbildungen der Kugel, äquidistant auf dem Äquator
 - 4.2.1 Normale Zylinderabbildung, äquidistant auf dem Äquator und der Schar der Parallelkreise, konform auf dem Äquator
 - 4.2.2 Normale konforme Zylinderabbildung, äquidistant auf dem Äquator, Mercator Abbildung
 - 4.2.3 Normale flächentreue Zylinderabbildung, äquidistant und konform auf dem Äquator
- 4.3 Spezielle Zylinderabbildung der Kugel, äquidistant auf zwei Parallelkreisen
 - 4.3.1 Normale Zylinderabbildung, äquidistant auf zwei Parallelkreisen und der Schar der Parallelkreise, konform auf zwei Parallelkreisen
 - 4.3.2 Normale konforme Zylinderabbildung, äquidistant auf zwei Parallelkreisen
 - 4.3.3 Normale flächentreue Zylinderabbildung, äquidistant und konform auf zwei Parallelkreisen
- 4.4 Schiefachsige Zylinderabbildungen, äquidistant auf dem Grundkreis
 - 4.4.1 Schiefachsige Zylinderabbildung, äquidistant auf dem Grundkreis und der Schar der Hauptkreise, konform auf dem Grundkreis
 - 4.4.2 Transversale Zylinderabbildung, äquidistant auf dem Grundkreis (Hauptmeridian) und der Schar der Hauptkreise, konform auf dem Grundkreis
 - 4.4.3 Schiefachsige konforme Zylinderabbildung, äquidistant auf dem Grundkreis
 - 4.4.4 Transversale konforme Zylinderabbildung, äquidistant auf dem Grundkreis (Hauptmeridian)
 - 4.4.5 Schiefachsige flächentreue Zylinderabbildung, äquidistant und konform auf dem Grundkreis
 - 4.4.6 Transversale flächentreue Zylinderabbildung, äquidistant und konform auf dem Grundkreis
- 4.5 Schiefachsige Zylinderabbildung, äquidistant auf zwei Hauptkreisen
 - 4.5.1 Schiefachsige Zylinderabbildung, äquidistant auf zwei Hauptkreisen und der Schar der Hauptkreise, konform auf zwei Hauptkreisen
 - 4.5.2 Schiefachsige konforme Zylinderabbildung, äquidistant auf zwei Hauptkreisen

- 4.5.3 Schiefachsige flächentreue Zylinderabbildung, äquidistant und konform auf zwei Hauptkreisen
- 4.6 Allgemeine Abbildungsgleichungen und Verzerrungsmaße für flächentreue Pseudozylinderabbildungen der Kugel (unechte Zylinderabbildungen)
- 4.7 Spezielle flächentreue Pseudozylinderabbildungen der Kugel (unechte Zylinderabbildungen)
 - 4.7.1 Pseudozylinderabbildung vom Typ sinusoidal, äquidistant auf der Schar der Parallelkreise
 - 4.7.2 Pseudozylinderabbildung vom Typ elliptisch
 - 4.7.3 Pseudozylinderabbildung vom Typ parabolisch
 - 4.7.4 Pseudozylinderabbildung vom Typ geradlinig (rectilinear)
 - 4.7.5 Mischformen
- 4.8 Optimale Zylinderabbildungen der Kugel am Beispiel einer Abbildung vom Typ äquidistant auf zwei Parallelkreisen
 - 4.8.1 Winkeltreue Abbildung 4.3.2
 - 4.8.2 Flächentreue Abbildung 4.3.3
 - 4.8.3 Abstandstreue Abbildung 4.3.1
- 4.9 Allgemeine Abbildungsgleichungen und Verzerrungsmaße für Zylinderabbildungen vom Typ äquidistant auf dem Äquator, im Falle des Rotationsellipsoides
- 4.10 Spezielle Zylinderabbildungen des Rotationsellipsoides, äquidistant auf dem Äquator
 - 4.10.1 Normale Zylinderabbildung, äquidistant auf dem Äquator und der Schar der Parallelkreise, konform auf dem Äquator
 - 4.10.2 Normale konforme Zylinderabbildung, äquidistant auf dem Äquator
 - 4.10.3 Normale flächentreue Zylinderabbildung, äquidistant und konform auf dem Äquator
- 4.11 Allgemeine Abbildungsgleichungen und Verzerrungsmaße für Zylinderabbildungen vom Typ äquidistant auf dem Äquator, im Falle einer Drehfläche
- 4.12 Spezielle Zylinderabbildungen einer Drehfläche, äquidistant auf dem Äquator
 - 4.12.1 Normale Zylinderabbildung, äquidistant auf dem Äquator und der Schar der Parallelkreise
 - 4.12.2 Normale konforme Zylinderabbildung, äquidistant auf dem Äquator
 - 4.12.3 Normale flächentreue Zylinderabbildung, äquidistant und konform auf dem Äquator

4.1 Allgemeine Abbildungsgleichungen und Verzerrungsmaße für Zylinderabbildungen vom Typ äquidistant auf dem Äquator, im Falle der Kugel

Karte Φ : sphärische Koordinaten

$$\mathbf{X} = \Phi^{-1}(\mathbf{U}) : \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} \cos \Lambda \cos \Phi \\ \sin \Lambda \cos \Phi \\ \sin \Phi \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda \\ \Phi \end{bmatrix}$$

Metriktensor

$$\frac{\partial X^I}{\partial U^K} = R \begin{bmatrix} -\sin \Lambda \cos \Phi & -\cos \Lambda \sin \Phi \\ \cos \Lambda \cos \Phi & -\sin \Lambda \sin \Phi \\ 0 & \cos \Phi \end{bmatrix}$$

$$G_{KL} = \frac{\partial X^I}{\partial U^K} \frac{\partial X^I}{\partial U^L} = R^2 \begin{bmatrix} \cos^2 \Phi & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Karte φ : cartesische Koordinaten

$$\mathbf{x} = \varphi^{-1}(\mathbf{u}) : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Metrikensor

$$\frac{\partial x^i}{\partial u^k} = \delta_{ik}$$

$$g_{kl} = \delta_{kl}$$

Abbildungsgleichungen

Die Forderung, daß die Bildkoordinate y nur von Φ abhängen soll, die Bildkoordinate x nur von Λ , wobei der Äquator äquidistant abzubilden ist, führt auf den *Ansatz*

$$x = R\Lambda, \quad y = f(\Phi)$$

oder

$$\mathbf{x} = \varphi^{-1} \circ \bar{f}(\mathbf{U}) : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R\Lambda \\ f(\Phi) \end{bmatrix}$$

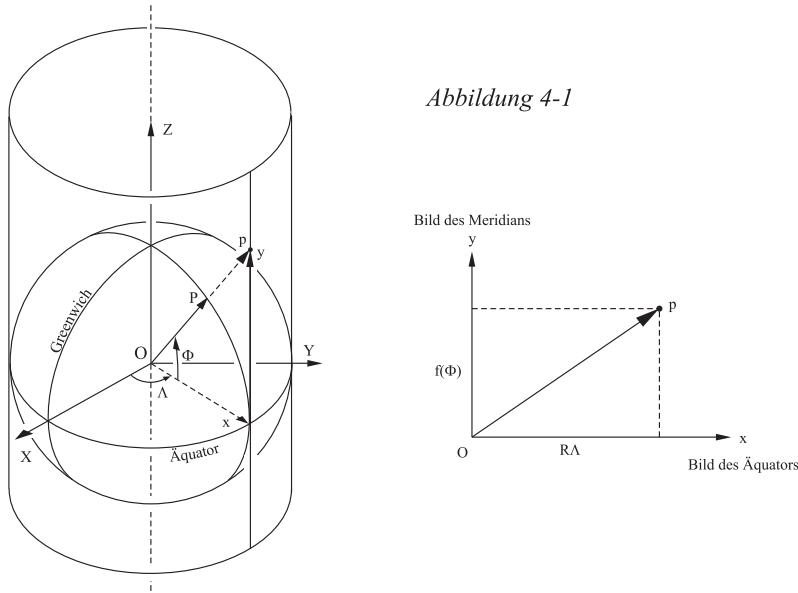


Abbildung 4-1

Deformationstensor

$$\frac{\partial x^i}{\partial U^K} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \Lambda} & \frac{\partial x}{\partial \Phi} \\ \frac{\partial y}{\partial \Lambda} & \frac{\partial y}{\partial \Phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & f'(\Phi) \end{bmatrix}$$

$$c_{KL} = g_{kl} \frac{\partial u^k}{\partial U^K} \frac{\partial u^l}{\partial U^L} = \delta_{kl} \frac{\partial u^k}{\partial U^K} \frac{\partial u^l}{\partial U^L} = \frac{\partial u^k}{\partial U^K} \frac{\partial u^k}{\partial U^L}$$

$$c_{KL} = \begin{bmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & f'^2(\Phi) \end{bmatrix}$$

Hauptstreckungen

$$\Lambda_1 = \sqrt{c_{11}/G_{11}} = \frac{1}{\cos \Phi}$$

Streckung in Richtung des Parallelkreises $\Phi = \text{const.}$

$$\Lambda_2 = \sqrt{c_{22}/G_{22}} = \frac{f'(\Phi)}{R}$$

Streckung in Richtung des Meridians $\Lambda = \text{const.}$

Parametrisierung des Drehzylinders

$$\mathbf{x} = r \cos u \mathbf{e}_1 + r \sin u \mathbf{e}_2 + v \mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^3 x^i \mathbf{e}_i$$

(u, v) Flächenparameter

4.2 Spezielle Zylinderabbildungen der Kugel, äquidistant auf dem Äquator

4.2.1 Normale Zylinderabbildung, äquidistant auf dem Äquator und der Schar der Parallelkreise, konform auf dem Äquator

Forderung der Äquidistanz auf der Schar der Parallelkreise:

$$\Lambda_2 = 1 \implies f'(\Phi)/R = 1 \implies df = R d\Phi \implies$$

$$f(\Phi) = R\Phi + \text{const.}$$

Forderung für $\Phi = 0$: $y(0) = 0 \implies \text{const.} = 0$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} \Lambda \\ \Phi \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_1 = \frac{1}{\cos \Phi}, \quad \Lambda_2 = 1$$

Auf dem Äquator ($\Phi = 0$) gilt $\Lambda_1 \Lambda_2 = 1$, d.h. wie früher folgt aus der Äquidistanz auf dem Äquator die Konformität auf dem Äquator.

4.2.2 Normale konforme Zylinderabbildung, äquidistant auf dem Äquator, Mercator Abbildung

Forderung der Konformität: $\Lambda_1 = \Lambda_2 \implies$

$$\frac{1}{\cos \Phi} = \frac{1}{R} \frac{df}{d\Phi} \implies df = R \frac{d\Phi}{\cos \Phi}$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} [\ln \cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)]' &= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)} \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)} \right]' \\ &= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}{2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{1}{\cos x} \end{aligned}$$

$$\int df = f(\Phi) = R \int \frac{d\Phi}{\cos \Phi} = R \ln \cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi}{2}\right) + \text{const.}$$

Forderung für $\Phi = 0$: $y(0) = 0 \implies \text{const.} = 0$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} \Lambda \\ \ln \cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi}{2}\right) \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} \Lambda \\ \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Phi}{2}\right) \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_1 = \Lambda_2 = \frac{1}{\cos \Phi}$$

Auf dem Äquator ($\Phi = 0$) gilt $\Lambda_1 = \Lambda_2 = 1$, d.h. Äquidistanz

4.2.3 Normale flächentreue Zylinderabbildung, äquidistant und konform auf dem Äquator

Forderung der Flächentreue: $\Lambda_1 \Lambda_2 = 1 \implies$

$$\frac{1}{\cos \Phi} \frac{f'(\Phi)}{R} = 1 \implies df = R \cos \Phi d\Phi$$

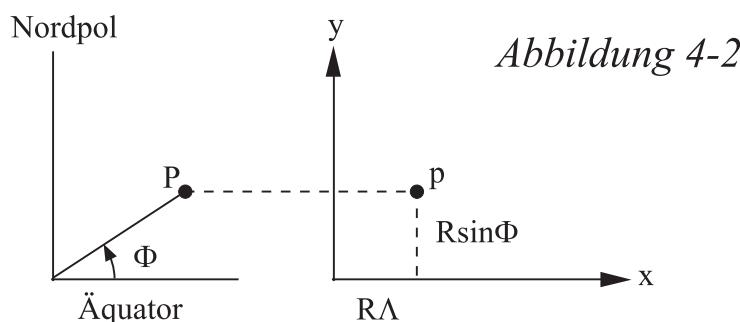
$$\int \cos x dx = \sin x$$

$$\int df = f(\Phi) = R \sin \Phi + \text{const.}$$

Forderung für $\Phi = 0$: $y(0) = 0 \implies \text{const.} = 0$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} \Lambda \\ \sin \Phi \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_1 = \frac{1}{\cos \Phi}, \quad \Lambda_2 = \cos \Phi$$



4.3 Spezielle Zylinderabbildung der Kugel, äquidistant auf zwei Parallelkreisen

Forderung:

Zwei Parallelkreise mit den Breiten Φ_1 und $\Phi_2 = -\Phi_1$, $\Phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, sollen äquidistant abgebildet werden.

Ansatz:

$$x = R\Lambda \cos \Phi_1, \quad y = f(\Phi)$$

oder

$$\mathbf{x} = \varphi^{-1} \circ \bar{f}(\mathbf{U}) : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R\Lambda \cos \Phi_1 \\ f(\Phi) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda \\ \Phi \end{bmatrix}$$

Der Ansatz $x = R\Lambda \cos \Phi_1$ ist zu motivieren: Ein Parallelkreis mit der Breite Φ_1 hat einen Radius $R \cos \Phi_1$. Ein Bogenstück eines solchen Parallelkreises hat die Länge $R\Lambda \cos \Phi_1$, welche äquidistant abgebildet werden soll.

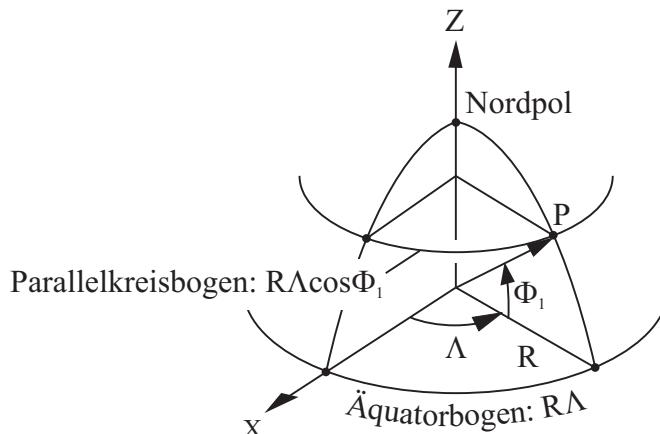


Abbildung 4-3

Metrikensor Kugel

$$G_{KL} = R^2 \begin{bmatrix} \cos^2 \Phi & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Metrikensor Ebene

$$g_{kl} = \delta_{kl} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Deformationstensor

$$\frac{\partial x^i}{\partial U^K} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \Lambda} & \frac{\partial x}{\partial \Phi} \\ \frac{\partial y}{\partial \Lambda} & \frac{\partial y}{\partial \Phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \cos \Phi_1 & 0 \\ 0 & f'(\Phi) \end{bmatrix}$$

$$c_{KL} = \frac{\partial u^k}{\partial U^K} \frac{\partial u^k}{\partial U^L} = \begin{bmatrix} R^2 \cos^2 \Phi_1 & 0 \\ 0 & f'^2(\Phi) \end{bmatrix}$$

Hauptstreckungen

$$\Lambda_1 = \sqrt{c_{11}/G_{11}} = \frac{\cos \Phi_1}{\cos \Phi}$$

Streckung in Richtung des Parallelkreises $\Phi = \text{const.}$

$$\Lambda_2 = \sqrt{c_{22}/G_{22}} = \frac{f'(\Phi)}{R}$$

Streckung in Richtung des Meridians $\Lambda = \text{const.}$

4.3.1 Normale Zylinderabbildung, äquidistant auf zwei Parallelkreisen und der Schar der Parallelkreise, konform auf zwei Parallelkreisen

Ableitung wie 4.2.1

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} \Lambda \cos \Phi_1 \\ \Phi \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_1 = \frac{\cos \Phi_1}{\cos \Phi}, \quad \Lambda_2 = 1$$

4.3.2 Normale konforme Zylinderabbildung, äquidistant auf zwei Parallelkreisen

Ableitung wie 4.2.2

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = R \cos \Phi_1 \begin{bmatrix} \Lambda \\ \ln \cot(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi}{2}) \end{bmatrix}$$

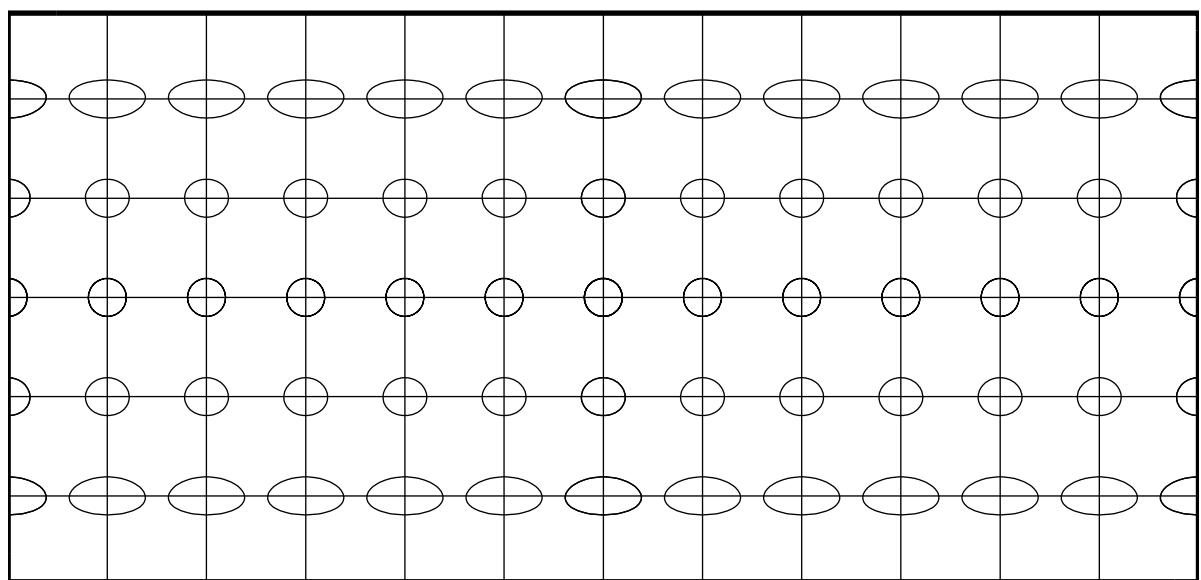
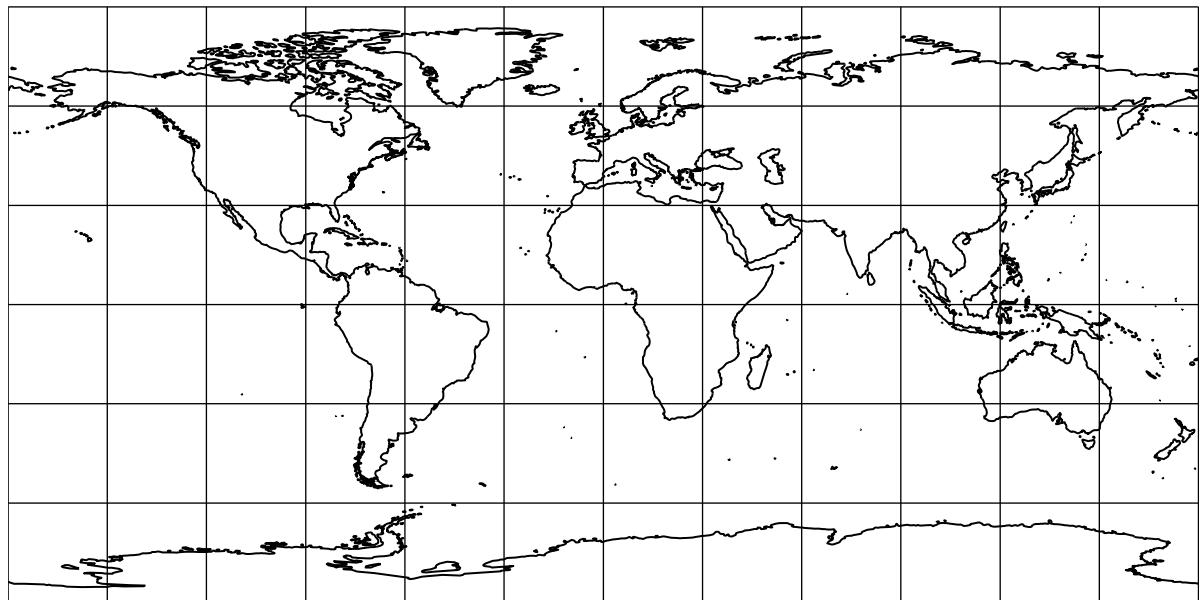
$$\Lambda_1 = \frac{\cos \Phi_1}{\cos \Phi}, \quad \Lambda_2 = \frac{\cos \Phi_1}{\cos \Phi}$$

4.3.3 Normale flächentreue Zylinderabbildung, äquidistant und konform auf zwei Parallelkreisen

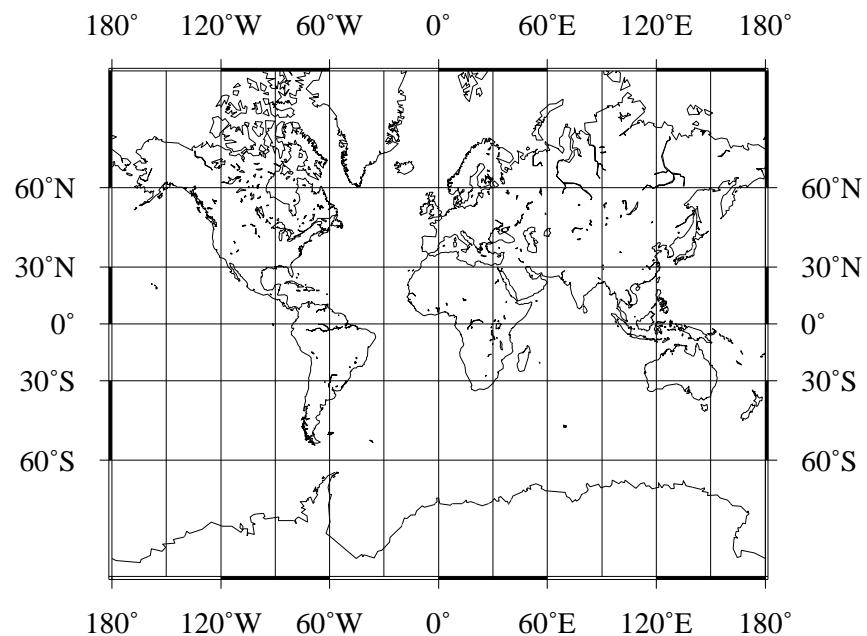
Ableitung wie 4.2.3

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} \Lambda \cos \Phi_1 \\ \frac{\sin \Phi}{\cos \Phi_1} \end{bmatrix}$$

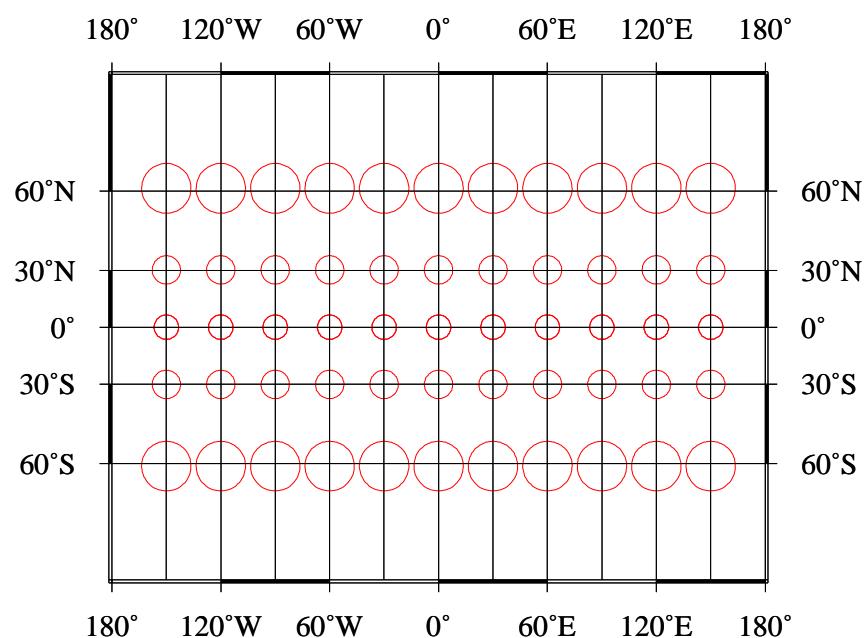
$$\Lambda_1 = \frac{\cos \Phi_1}{\cos \Phi}, \quad \Lambda_2 = \frac{\cos \Phi}{\cos \Phi_1}$$



Abbildungen 4-4, 4-5: Mittabstandstreue Zylinderabbildung

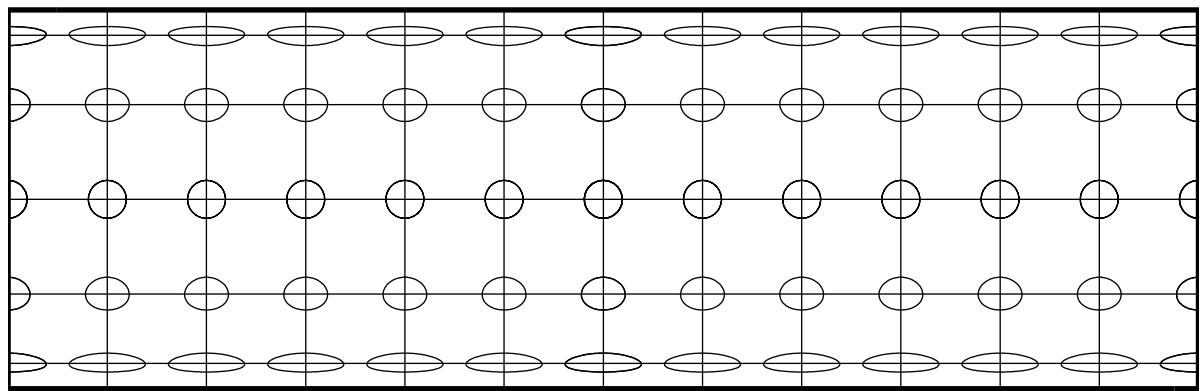
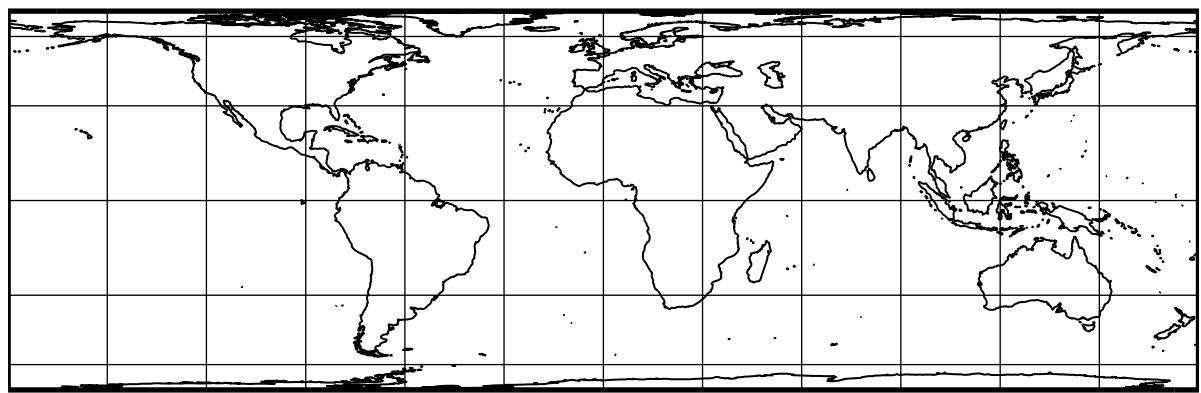


GMT 2002 Jan 10 14:47:37 | pscoast -Jm0.3e-3cm -R-179.99999/180/-80/80 -Ba60g30/a30g30 -Dc -A1000 -G255 -W0.25 -P -Uc -X5 -Y17



GMT 2002 Jan 10 14:47:38 | psxy -Jm0.3e-3cm -R-179.99999/180/-80/80 -O -SE -Ba60g30/a30g30 -W2/255/0/0 -O -N -Uc

Abbildungen 4-6, 4-7: Winkeltreue Zylinderabbildung (Mercator)



Abbildungen 4-8, 4-9: Flächentreue Zylinderabbildung

4.4 Schiefachsige Zylinderabbildungen, äquidistant auf dem Grundkreis

Karte Φ : sphärische Koordinaten

$$\mathbf{X} = \Phi^{-1}(\mathbf{U}) : \begin{bmatrix} X^* \\ Y^* \\ Z^* \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} \cos A \cos B \\ \sin A \cos B \\ \sin B \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$

Metrikensor

$$G_{KL} = R^2 \begin{bmatrix} \cos^2 B & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Karte φ : cartesische Koordinaten

$$\mathbf{x} = \varphi^{-1}(\mathbf{u}) : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Metrikensor

$$g_{kl} = \delta_{kl}$$

Abbildungsgleichungen

$$x = x(A), \quad y = y(B)$$

“der Grundkreis soll äquidistant abgebildet werden”

$$x = RA, \quad y = f(B)$$

Deformationstensor

$$c_{KL} = \begin{bmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & f'^2(B) \end{bmatrix}$$

Hauptstreckungen

$$\Lambda_1 = \sqrt{c_{11}/G_{11}} = \frac{1}{\cos B}$$

Streckung in Richtung des Parallelkreises $B = \text{const.}$

$$\Lambda_2 = \sqrt{c_{22}/G_{22}} = R^{-1}f'(B)$$

Streckung in Richtung des Hauptkreises $A = \text{const.}$

Spezialisierung auf die transversale Lage

Zusammenhang Metallänge A , Metabreite B und Länge Λ , Breite Φ für transversale Lagen, abgeleitet aus Grundformeln der sphärischen Trigonometrie

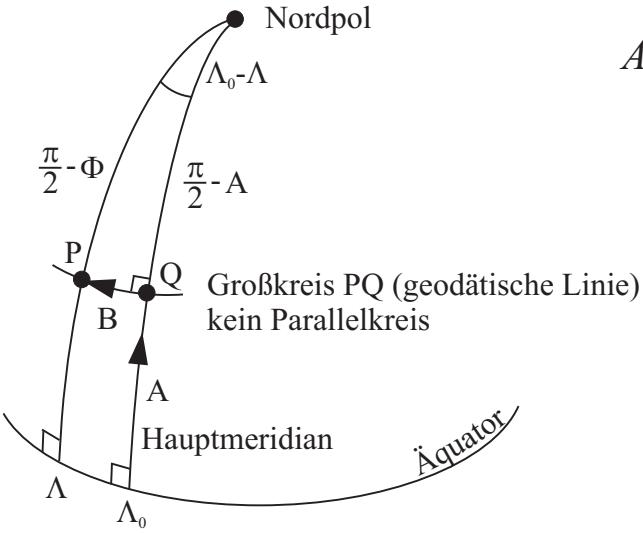


Abbildung 4-10

rechtswinklig-sphärisches Dreieck

$$1. \sin B = \sin(\Lambda_0 - \Lambda) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \Phi\right)$$

\Rightarrow

$$\boxed{\sin B = -\sin(\Lambda - \Lambda_0) \cos \Phi} : B(\Lambda, \Phi; \Lambda_0)$$

$$2. \cos(\Lambda_0 - \Lambda) = \cos(\Lambda - \Lambda_0) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \Phi\right) \tan\left(\frac{\pi}{2} - A\right)$$

\Rightarrow

$$\boxed{\tan A = \frac{\tan \Phi}{\cos(\Lambda - \Lambda_0)}} : A(\Lambda, \Phi; \Lambda_0)$$

$$3. \cos\left(\frac{\pi}{2} - \Phi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - A\right) \cos B$$

\Rightarrow

$$\boxed{\sin \Phi = \sin A \cos B} : \Phi(A, B) \text{ inverse Transformation}$$

4.

$$\boxed{\sin(\Lambda - \Lambda_0) = -\frac{\sin B}{\cos \Phi} = -\frac{\sin B}{\sqrt{1 - \sin^2 A \cos^2 B}}} : \Lambda(A, B; \Lambda_0) \text{ inverse Transformation}$$

4.4.1 Schiefachsige Zylinderabbildung, äquidistant auf dem Grundkreis und der Schar der Hauptkreise, konform auf dem Grundkreis

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} \arccot \frac{-\cos \Phi_0 \tan \Phi + \sin \Phi_0 \cos(\Lambda - \Lambda_0)}{\sin(\Lambda - \Lambda_0)} - \Omega_0 \\ \arcsin [\sin \Phi_0 \sin \Phi + \cos \Phi_0 \cos \Phi \cos(\Lambda - \Lambda_0)] \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_1 = \frac{1}{\cos B} = \frac{1}{\cos (\arcsin [\sin \Phi_0 \sin \Phi + \cos \Phi_0 \cos \Phi \cos(\Lambda - \Lambda_0)])}$$

$$\Lambda_2 = 1$$

4.4.2 Transversale Zylinderabbildung, äquidistant auf dem Grundkreis (Hauptmeridian) und der Schar der Hauptkreise, konform auf dem Grundkreis

$$\Lambda_0 = 270^\circ + \Lambda^0, \quad \Phi_0 = 0, \quad \Omega_0 = 90^\circ + \Omega^\circ$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} \arctan \frac{\tan \Phi}{\cos(\Lambda - \Lambda^0)} - \Omega^\circ \\ \arcsin [-\cos \Phi \sin(\Lambda - \Lambda^0)] \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_1 = \frac{1}{\cos B} = \frac{1}{\cos (\arcsin [-\cos \Phi \sin(\Lambda - \Lambda^0)])}$$

$$\Lambda_2 = 1$$

4.4.3 Schiefachsige konforme Zylinderabbildung, äquidistant auf dem Grundkreis

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} A \\ \ln \cot(\frac{\pi}{4} - \frac{B}{2}) \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} A \\ \ln \tan(\frac{\pi}{4} + \frac{B}{2}) \end{bmatrix}$$

$$= R \begin{bmatrix} A \\ \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sin B}{1-\sin B} \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} A \\ \operatorname{artanh}(\sin B) \end{bmatrix}$$

$$= R \begin{bmatrix} \arccot \frac{-\cos \Phi_0 \tan \Phi + \sin \Phi_0 \cos(\Lambda - \Lambda_0)}{\sin(\Lambda - \Lambda_0)} - \Omega_0 \\ \operatorname{artanh} [\sin \Phi_0 \sin \Phi + \cos \Phi_0 \cos \Phi \cos(\Lambda - \Lambda_0)] \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_1 = \Lambda_2 = \frac{1}{\cos B} = \frac{1}{\cos (\operatorname{arcsin} [\sin \Phi_0 \sin \Phi + \cos \Phi_0 \cos \Phi \cos(\Lambda - \Lambda_0)])}$$

4.4.4 Transversale konforme Zylinderabbildung, äquidistant auf dem Grundkreis (Hauptmeridian)

Kugel: J.H. Lambert (1772)
 Rotationsellipsoid: C.F. Gauß (1822)

$$\Lambda_0 = 270^\circ + \Lambda^0, \Phi_0 = 0, \Omega_0 = 90^\circ + \Omega^0$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= R \begin{bmatrix} A \\ \ln \cot(\frac{\pi}{4} - \frac{B}{2}) \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} A \\ \ln \tan(\frac{\pi}{4} + \frac{B}{2}) \end{bmatrix} \\ &= R \begin{bmatrix} A \\ \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sin B}{1-\sin B} \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} A \\ \operatorname{artanh}(\sin B) \end{bmatrix} \\ &= R \begin{bmatrix} \arctan \frac{\tan \Phi}{\cos(\Lambda - \Lambda^0)} - \Omega^0 \\ \operatorname{artanh}[-\cos \Phi \sin(\Lambda - \Lambda^0)] \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\Lambda_1 = \Lambda_2 = \frac{1}{\cos B} = \frac{1}{\cos(\arcsin[-\cos \Phi \sin(\Lambda - \Lambda^0)])}$$

Rotationsellipsoid: *Universal Transversal Mercatorprojektion (UTM):* zwischen 80° südl. und nördl. Breite, $l = 60$ Meridianstreifen von $360^\circ/l = 6^\circ$ Länge, Militärkarten USA, NATO; 1951 durch die Internationale Association für Geodäsie (IAG) für Landesvermessungen empfohlen.

Parallelkreise sind die Koordinatenlinien $B = \text{const.}$
 Hauptkreise sind die Koordinatenlinien $A = \text{const.}$

Konventionell wird die y -Koordinate positiv nach Osten gezählt ("Rechtswert"); die x -Koordinate ist identisch ("Hochwert").

Hochwert: $x_c = x$ (nördlich) Rechtswert: $y_c = -y$ (östlich)

Skizze zur transversalen Lage

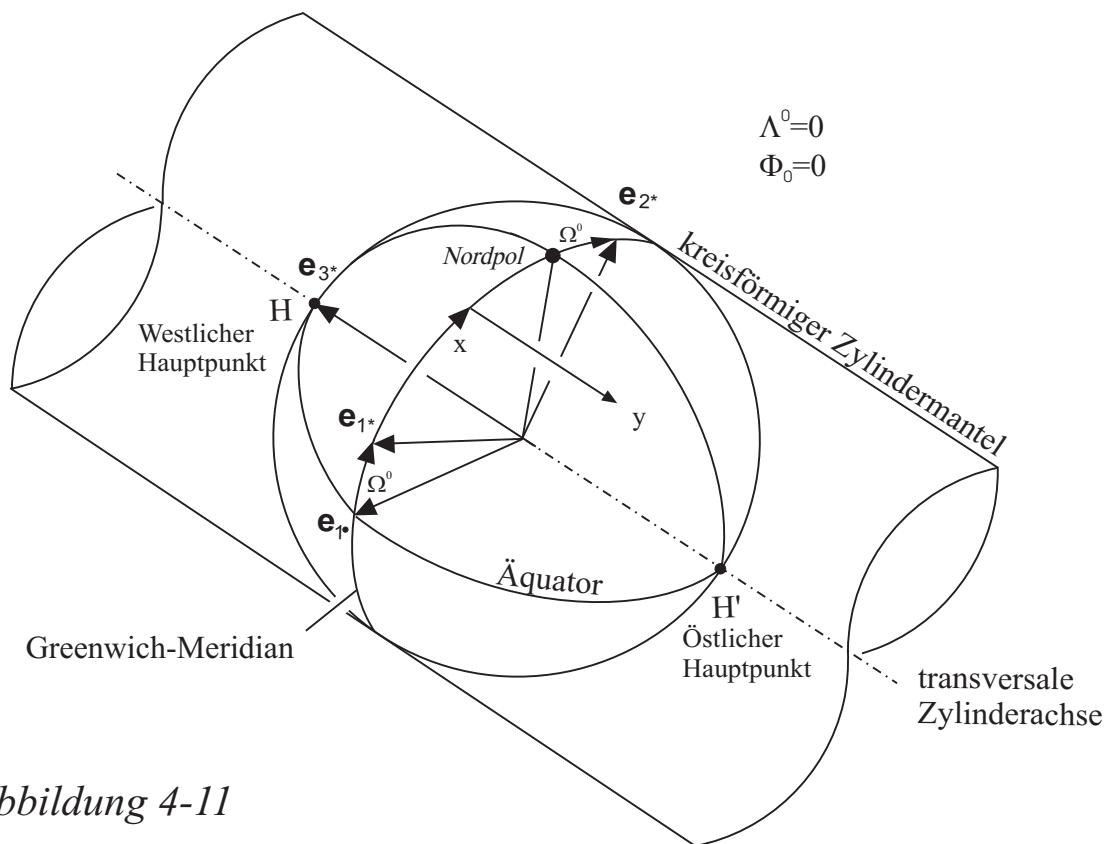


Abbildung 4-11

4.4.5 Schiefachsige flächentreue Zylinderabbildung, äquidistant und konform auf dem Grundkreis

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} A \\ \sin B \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} \arccot \frac{-\cos \Phi_0 \tan \Phi + \sin \Phi_0 \cos(\Lambda - \Lambda_0)}{\sin(\Lambda - \Lambda_0)} - \Omega_0 \\ \sin \Phi_0 \sin \Phi + \cos \Phi_0 \cos \Phi \cos(\Lambda - \Lambda_0) \end{bmatrix}$$

4.4.6 Transversale flächentreue Zylinderabbildung, äquidistant und konform auf dem Grundkreis

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} \arctan \frac{\tan \Phi}{\cos(\Lambda - \Lambda^0)} - \Omega^0 \\ -\cos \Phi \sin(\Lambda - \Lambda^0) \end{bmatrix}$$

4.5 Schiefachsige Zylinderabbildung, äquidistant auf zwei Hauptkreisen

Abbildungsgleichungen

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} RA \cos B_1 \\ f(B) \end{bmatrix}$$

Hauptstreckungen

$$\Lambda_1 = \frac{\cos B_1}{\cos B}, \quad \Lambda_2 = \frac{1}{R} f'(B)$$

4.5.1 Schiefachsige Zylinderabbildung, äquidistant auf zwei Hauptkreisen und der Schar der Hauptkreise, konform auf zwei Hauptkreisen

Ableitung wie 4.2.1

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= R \begin{bmatrix} A \cos B_1 \\ B \end{bmatrix} \\ &= R \begin{bmatrix} \left(\operatorname{arccot} \frac{-\cos \Phi_0 \tan \Phi + \sin \Phi_0 \cos(\Lambda - \Lambda_0)}{\sin(\Lambda - \Lambda_0)} \right) - \Omega_0 \\ \cdot \left(\cos \left(\arcsin [\sin \Phi_0 \sin \Phi_1 + \cos \Phi_0 \cos \Phi_1 \cos(\Lambda_1 - \Lambda_0)] \right) \right) \\ \arcsin [\sin \Phi_0 \sin \Phi + \cos \Phi_0 \cos \Phi \cos(\Lambda - \Lambda_0)] \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4.5.2 Schiefachsige konforme Zylinderabbildung, äquidistant auf zwei Hauptkreisen

Ableitung wie 4.2.2

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= R \cos B_1 \begin{bmatrix} A \\ \ln \cot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{B}{2} \right) \end{bmatrix} \\ &= R \cos \left(\arcsin [\sin \Phi_0 \sin \Phi_1 + \cos \Phi_0 \cos \Phi_1 \cos(\Lambda_1 - \Lambda_0)] \right) \\ &\quad \cdot \begin{bmatrix} \operatorname{arccot} \frac{-\cos \Phi_0 \tan \Phi + \sin \Phi_0 \cos(\Lambda - \Lambda_0)}{\sin(\Lambda - \Lambda_0)} - \Omega_0 \\ \operatorname{artanh} [\sin \Phi_0 \sin \Phi + \cos \Phi_0 \cos \Phi \cos(\Lambda - \Lambda_0)] \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4.5.3 Schiefachsige flächentreue Zylinderabbildung, äquidistant und konform auf zwei Hauptkreisen

Ableitung wie 4.2.3

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} A \cos B_1 \\ \frac{\sin B}{\cos B_1} \end{bmatrix}$$

$$= R \begin{bmatrix} \left(\operatorname{arccot} \frac{-\cos \Phi_0 \tan \Phi + \sin \Phi_0 \cos(\Lambda - \Lambda_0)}{\sin(\Lambda - \Lambda_0)} - \Omega_0 \right) \\ \cdot \cos \left(\arcsin [\sin \Phi_0 \sin \Phi_1 + \cos \Phi_0 \cos \Phi_1 \cos(\Lambda_1 - \Lambda_0)] \right) \\ \frac{\sin \Phi_0 \sin \Phi + \cos \Phi_0 \cos \Phi \cos(\Lambda - \Lambda_0)}{\cos \left(\arcsin [\sin \Phi_0 \sin \Phi_1 + \cos \Phi_0 \cos \Phi_1 \cos(\Lambda_1 - \Lambda_0)] \right)} \end{bmatrix}$$

Spezialisierung auf transversale Lage offenkundig !

Verzerrungswerte zylindrischer Abbildungen

<i>Abbildung</i>	$\pm\Phi^\circ$	Λ_1	Λ_2	$\Lambda_1\Lambda_2$	<i>maximale Winkelverzerrung</i> $2\arcsin\frac{\Lambda_1-\Lambda_2}{\Lambda_1+\Lambda_2}$	
<i>normale Zyl.abb.</i>	0	1	1	1,000	$0^\circ 0'$	
<i>äquidistant auf dem Äquator und der Schar der Parallelkreise</i>	30	1,155	1	1,155	$8^\circ 14'$	<i>quadratische Plattkarte</i>
	60	2	1	2,000	$38^\circ 57'$	4.2.1
	90	∞	1	∞	$180^\circ 0'$	
<i>normale Zyl.abb. flächentreu äquidistant und konform auf dem Äquator</i>	0	1	1	1	$0^\circ 0'$	<i>Lambertabb.</i>
	30	1,155	0,866	1	$16^\circ 26'$	4.2.3
	60	2	0,500	1	$73^\circ 44'$	
	90	∞	0	1	$180^\circ 0'$	
<i>normale Zyl.abb. äquidistant auf 2 Parallel-kreisen und der Schar der Parallelkreise</i>	0	0,707	1	0,707	$19^\circ 45'$	<i>rechteckige Plattkarte</i>
	15	0,732	1	0,732	$17^\circ 48'$	
	30	0,816	1	0,816	$11^\circ 36'$	4.3.1
	45	1	1	1	$0^\circ 0'$	
	60	1,414	1	1,414	$19^\circ 45'$	
	75	2,732	1	2,732	$55^\circ 18'$	
$\Phi_1 = +45$	90	∞	1	∞	$180^\circ 0'$	
$\Phi_2 = -\Phi_1$						
<i>normale Zyl.abb. konform äquidistant auf dem Äquator</i>	0	1	1	1	0°	<i>Mercatorproj.</i>
	30	1,155	1,155	1,294	0°	4.2.2
	60	2	2	4	0°	
	90	∞	∞	∞	0°	

4.6 Allgemeine Abbildungsgleichungen und Verzerrungsmaße für flächentreue Pseudozyylinderabbildungen der Kugel (unechte Zylinderabbildungen)

Als *echte* Kartenentwürfe werden solche Abbildungen einer Fläche in die Ebene bezeichnet, bei denen die Bilder der *Längenkreise Geraden* und die Bilder der *Breitenkreise Kreise oder Geraden* sind. Andernfalls sprechen wir von *unechten* oder *Pseudoabbildungen*, hier von *unechten* oder *Pseudozyylinderabbildungen*. Es dominieren die *flächentreuen* Abbildungen.

Angenommen, der unechte Kartenentwurf sei *flächentreu*; die Bilder des Äquators $\Phi = 0$ und des Mittelmeridians $\Lambda = 0$ seien *geradlinig* und mögen senkrecht aufeinander stehen. Die Parallelkreisbilder seien *äquidistant* oder nicht und sie mögen als *Parallelstrecken zum Äquatorbild* erscheinen. Der Entwurf sei symmetrisch zum Mittelmeridian.

Abbildungsgleichungen

Ansatz:

$$x = x(\Lambda, \Phi) = R\Lambda \cos \Phi g(\Phi)$$

$$y = y(\Phi) = Rf(\Phi)$$

Im Falle $g(\Phi) = 1$ sind die Bilder der Parallelkreise *äquidistant*.

Deformationstensor

$$\frac{\partial x^i}{\partial U^K} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \Lambda} & \frac{\partial x}{\partial \Phi} \\ \frac{\partial y}{\partial \Lambda} & \frac{\partial y}{\partial \Phi} \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} \cos \Phi g & -\Lambda \sin \Phi g + \Lambda \cos \Phi g' \\ 0 & f' \end{bmatrix}$$

$$c_{KL} = \frac{\partial x^i}{\partial U^K} \frac{\partial x^i}{\partial U^L}$$

$$c_{11} = \left(\frac{\partial x}{\partial \Lambda} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \Lambda} \right)^2 = R^2 \cos^2 \Phi g^2$$

$$c_{12} = \frac{\partial x}{\partial \Lambda} \frac{\partial x}{\partial \Phi} + \frac{\partial y}{\partial \Lambda} \frac{\partial y}{\partial \Phi} = R \cos \Phi g (-R \Lambda \sin \Phi g + R \Lambda \cos \Phi g')$$

$$c_{22} = \left(\frac{\partial x}{\partial \Phi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \Phi} \right)^2 = (-R \Lambda \sin \Phi g + R \Lambda \cos \Phi g')^2 + R^2 f'^2$$

$$c_{KL} = R^2 \begin{bmatrix} \cos^2 \Phi g^2 & -\Lambda \sin \Phi \cos \Phi g^2 + \Lambda \cos^2 \Phi gg' \\ -\Lambda \sin \Phi \cos \Phi g^2 + \Lambda \cos^2 \Phi gg' & \Lambda^2 \sin^2 \Phi g^2 + f'^2 + \Lambda^2 \cos^2 \Phi g'^2 - 2\Lambda^2 \sin \Phi \cos \Phi gg' \end{bmatrix}$$

Metriktensor Urbild

$$G_{KL} = R^2 \begin{bmatrix} \cos^2 \Phi & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Hauptstreckungen

$$c_{KL} - \Lambda_S^2 G_{KL} = R^2 \begin{bmatrix} \cos^2 \Phi (g^2 - \Lambda_S^2) & -\Lambda \sin \Phi \cos \Phi g^2 + \Lambda \cos^2 \Phi gg' \\ -\Lambda \sin \Phi \cos \Phi g^2 + \Lambda \cos^2 \Phi gg' & \Lambda^2 \sin^2 \Phi g^2 + f'^2 + \Lambda^2 \cos^2 \Phi g'^2 - 2\Lambda^2 \sin \Phi \cos \Phi gg' - \Lambda_S^2 \end{bmatrix}$$

charakteristische Gleichung

$$\cos^2 \Phi ((g^2 - \Lambda_S^2)(\Lambda^2 \sin^2 \Phi g^2 + f'^2 + \Lambda^2 \cos^2 \Phi g'^2 - 2\Lambda^2 \sin \Phi \cos \Phi gg' - \Lambda_S^2)) - (-\Lambda \sin \Phi \cos \Phi g^2 + \Lambda \cos^2 \Phi gg')^2 = 0$$

$$\forall \cos^2 \Phi \neq 0$$

\iff

biquadratische Gleichung

$$\Lambda_S^4 - \Lambda_S^2 (\Lambda^2 \sin^2 \Phi g^2 + f'^2 + g^2 + \Lambda^2 \cos^2 \Phi g'^2 - 2\Lambda^2 \sin \Phi \cos \Phi gg') + g^2 f'^2 = 0$$

$$\Lambda_S^2 = \frac{1}{2}(\Lambda^2 \sin^2 \Phi g^2 + f'^2 + g^2 + \Lambda^2 \cos^2 \Phi g'^2 - 2\Lambda^2 \sin \Phi \cos \Phi gg')$$

$$\pm \sqrt{\frac{1}{4}(\Lambda^2 \sin^2 \Phi g^2 + f'^2 + g^2 + \Lambda^2 \cos^2 \Phi g'^2 - 2\Lambda^2 \sin \Phi \cos \Phi gg')^2 - g^2 f'^2} = a \pm b$$

$$(\Lambda_S^2)_1 = a + b, \quad (\Lambda_S^2)_2 = a - b$$

$$(\Lambda_S)_{1,2} = \pm \sqrt{(\Lambda_S^2)_1} = \pm \sqrt{a + b}$$

$$(\Lambda_S)_{3,4} = \pm \sqrt{(\Lambda_S^2)_2} = \pm \sqrt{a - b}$$

Forderung der Flächentreue:

$$\begin{aligned} (\Lambda_S)_{1,2}(\Lambda_S)_{3,4} &= \sqrt{a+b}\sqrt{a-b} = 1 \implies \\ a^2 - b^2 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}(\Lambda^2 \sin^2 \Phi g^2 + f'^2 + g^2 + \Lambda^2 \cos^2 \Phi g'^2 - 2\Lambda^2 \sin \Phi \cos \Phi gg')^2 \\ - \frac{1}{4}(\Lambda^2 \sin^2 \Phi g^2 + f'^2 + g^2 + \Lambda^2 \cos^2 \Phi g'^2 - 2\Lambda^2 \sin \Phi \cos \Phi gg')^2 + g^2 f'^2 &= 1 \\ \iff \boxed{f' = g^{-1}} \iff \boxed{g = f'^{-1}} \end{aligned}$$

Allgemeine Struktur der Abbildungsgleichungen

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x(\Lambda, \Phi) = R\Lambda \cos \Phi \frac{1}{f'(\Phi)} = \frac{R^2 \Lambda \cos \Phi}{\frac{dy}{d\Phi}} \\ y &= y(\Phi) = Rf(\Phi) \end{aligned}}$$

Hauptstreckungen

$$\begin{aligned} \Lambda_S^4 - \Lambda_S^2 \left(\frac{\Lambda^2 \sin^2 \Phi}{f'^2} + f'^2 + \frac{1}{f'^2} + \Lambda^2 \cos^2 \Phi \frac{f''^2}{f'^4} + 2\Lambda^2 \sin \Phi \cos \Phi \frac{f''}{f'^3} \right) + 1 &= 0 \\ \Lambda_S^4 - \Lambda_S^2 (f')^{-4} (\Lambda^2 \sin^2 \Phi f'^2 + f'^6 + f'^2 + \Lambda^2 \cos^2 \Phi f''^2 + 2\Lambda^2 \sin \Phi \cos \Phi f' f'') + 1 &= 0 \\ \Lambda_S^2 = \frac{1}{2f'^4} (\Lambda^2 \sin^2 \Phi f'^2 + f'^6 + f'^2 + \Lambda^2 \cos^2 \Phi f''^2 + 2\Lambda^2 \sin \Phi \cos \Phi f' f'') \\ \pm \sqrt{\frac{1}{4f'^8} (\Lambda^2 \sin^2 \Phi f'^2 + f'^6 + f'^2 + \Lambda^2 \cos^2 \Phi f''^2 + 2\Lambda^2 \sin \Phi \cos \Phi f' f'')^2 - 1} \end{aligned}$$

Beispiel: $f'(\Phi) = 1$

$$\begin{aligned} \Lambda_S^2 &= \frac{1}{2}(2 + \Lambda^2 \sin^2 \Phi) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(4 + 4\Lambda^2 \sin^2 \Phi + \Lambda^4 \sin^4 \Phi - 4)} \\ \Lambda_S^2 &= \frac{1}{2}(2 + \Lambda^2 \sin^2 \Phi) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(4 + \Lambda^2 \sin^2 \Phi)\Lambda^2 \sin^2 \Phi} \end{aligned}$$

$$\Lambda_S^2 = \frac{1}{2}(2 + \Lambda^2 \sin^2 \Phi) \pm \frac{1}{2}\Lambda \sin \Phi \sqrt{4 + \Lambda^2 \sin^2 \Phi}$$

$$(\Lambda_S)_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{2 + \Lambda^2 \sin^2 \Phi + \Lambda \sin \Phi \sqrt{4 + \Lambda^2 \sin^2 \Phi}}$$

$$(\Lambda_S)_{3,4} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{2 + \Lambda^2 \sin^2 \Phi - \Lambda \sin \Phi \sqrt{4 + \Lambda^2 \sin^2 \Phi}}$$

Spezialfall: $\Phi = 0 : (\Lambda_S)_{1,2} = (\Lambda_S)_{3,4} = \pm 1$
Konformität !

4.7 Spezielle flächentreue Pseudozyylinderabbildungen der Kugel (unechte Zylinderabbildungen)

4.7.1 Pseudozyylinderabbildung vom Typ sinusoidal, äquidistant auf der Schar der Parallelkreise

Abbildungsgleichungen

Ansatz: $x = R\Lambda \cos \Phi$
 $y = Rf(\Phi)$ Bilder der Parallelkreise äquidistant

d.h. $g(\Phi) = \frac{1}{f'(\Phi)} = 1$ oder $f'(\Phi) = 1 \implies$
 $= 0$ wegen $f(0) = 0$
 $f(\Phi) = \Phi + \text{const.}$

Abbildungsgleichungen

$$\boxed{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R\Lambda \cos \Phi \\ R\Phi \end{bmatrix}}$$

Struktur der Koordinatenlinien

(i) $\Phi = \frac{y}{R} : x = R\Lambda \cos \frac{y}{R}$

(ii) $\frac{x}{R\Lambda} = \cos \Phi \implies \Phi = \arccos \frac{x}{R\Lambda} \quad y = R \arccos \frac{x}{R\Lambda}$

Die Struktur der Koordinatenlinien ist sinusoidal.

J. Cossin (1570), N. Sanson (1650), J. Flamsteed (1646-1719)

Inverse Abbildungsgleichungen

gegeben: (x, y) ; gesucht: (Λ, Φ)

$$\boxed{\begin{aligned}\Lambda &= \frac{x}{R \cos \frac{y}{R}} \\ \Phi &= \frac{y}{R}\end{aligned}}$$

Häufig wird der Koordinatenursprung auf die wählbare Länge Λ_0 gelegt; in diesem Fall lauten die Koordinatengleichungen $x = R(\Lambda - \Lambda_0) \cos \Phi$, $y = R\Phi$, d.h., daß jetzt der *Mittelmeridian* bei Λ_0 liegt!

4.7.2 Pseudozylinerabbildung vom Typ elliptisch

Vorgegeben sei die Struktur der Koordinatenlinien im Bild und zwar hier von Typ *elliptisch*, d.h.

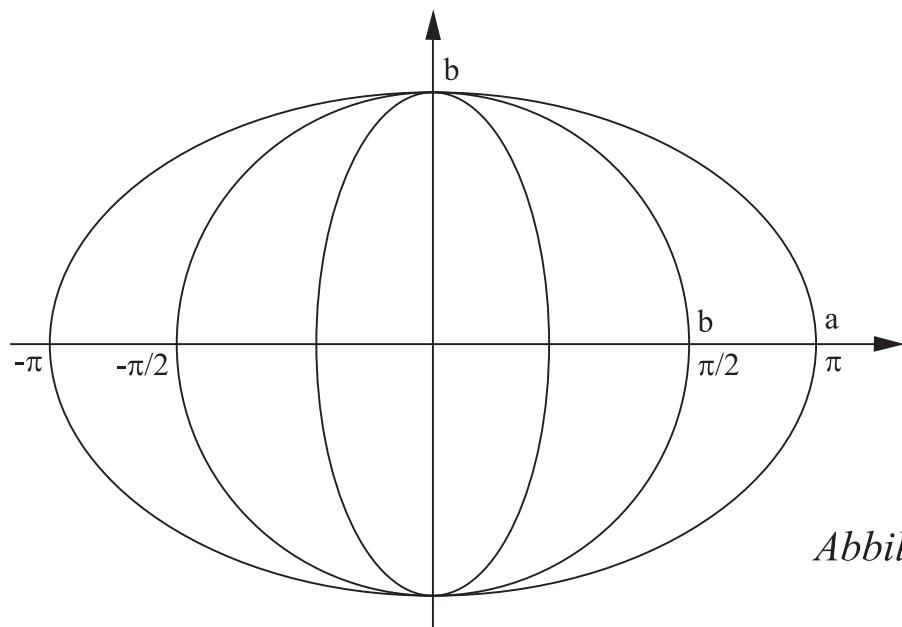


Abbildung 4-12

allg. Ellipsengleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- (i) Die Halbachse b ist konstant, während $a(\Lambda)$ als Halbachse von der Länge Λ abhängt. Die Halbachse b wird wie folgt festgelegt:

Die Halbkugel $-\pi/2 \leq \Lambda \leq +\pi/2$ wird auf einen zur Halbkugelfläche flächengleichen Kreis abgebildet !

Halbkugelfläche Kreisfläche

$$2\pi R^2 \quad \pi r^2 = \pi b^2$$

$$\implies r = b = R\sqrt{2}$$

$$\implies \frac{x^2}{a^2(\Lambda)} + \frac{y^2}{2R^2} = 1$$

- (ii) Ansatz: $x = a(\Lambda) \cos t, y = b \sin t = R\sqrt{2} \sin t$

$$t = t(\Phi)$$

t bezeichnet den Ellipsenparameter. Offensichtlich erfüllt der Ansatz die Ellipsengleichung. Der Ansatz für die Halbachse $a(\Lambda) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} R \Lambda$ wird durch die *äquidistante Abbildung auf dem Äquator*, hier $t = 0$, begründet, insbesondere $a(\frac{\pi}{2}) = b = R\sqrt{2}$!

$$\frac{\partial x^i}{\partial U^K}; \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad U^1 = \Lambda, \quad U^2 = \Phi$$

$$c_{KL} = \frac{\partial x^i}{\partial U^K} \frac{\partial x^i}{\partial U^L} \quad \text{Deformationstensor}$$

$$G_{KL} \quad \text{Metriktensor Urbild Kugel}$$

$$c_{KL} - \Lambda_S^2 G_{KL} \quad \text{allgemeine Eigenwertaufgabe}$$

$$|c_{KL} - \Lambda_S^2 G_{KL}| = 0 \quad \text{charakteristische Gleichung
hier vom biquadratischen Typ}$$

$$\Lambda_S^2 = c \pm d$$

$$(\Lambda_S)_{1,2}(\Lambda_S)_{3,4} = \sqrt{c+d}\sqrt{c-d} = \sqrt{c^2-d^2} = 1$$

Postulat der Flächentreue !

Ergebnis:

$$\cos \Phi = \pm \frac{4}{\pi} \frac{dt}{d\Phi} \cos^2 t$$

Trennung der Variablen

nur positives Vorzeichen

$$\cos \Phi d\Phi = + \frac{4}{\pi} \cos^2 t dt$$

$$\int_0^\Phi \cos \Phi' d\Phi' = \int_0^t \frac{4}{\pi} \cos^2 t' dt' \implies$$

$$\pi \sin \Phi = 2t + \sin 2t$$

Dies ist eine transzendente Gleichung für $t(\Phi)$, Φ vorgegeben. Sie ist eine spezielle *Kepler-Gleichung*, benutzt nach J. Kepler, siehe Vorlesung Satelliten-geodäsie.

Lösungen der speziellen Kepler-Gleichung

Φ°	t
0	0
10	0, 137.24
20	0, 275.48
30	0, 415.85
40	0, 559.74
50	0, 709.10
60	0, 866.98
70	1, 039.00
80	1, 238.77
90	$\frac{\pi}{2}$

Abbildungsgleichungen

$x = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} R \Lambda \cos t$ $y = R\sqrt{2} \sin t$ $2t + \sin 2t = \pi \sin \Phi$
--

Unter der Breite $\Phi = 40^\circ 44'$ verläuft der Parallelkreis, auf dem die Abbildung äquidistant und konform ist.

Deformationstensor

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial x}{\partial \Lambda} &= \frac{2\sqrt{2}}{\pi} R \cos t, \quad \frac{\partial x}{\partial \Phi} = -\frac{2\sqrt{2}}{\pi} R \Lambda \sin t \frac{dt}{d\Phi} \\
 \frac{\partial y}{\partial \Lambda} &= 0, \quad \frac{\partial y}{\partial \Phi} = R\sqrt{2} \cos t \frac{dt}{d\Phi} \\
 \frac{dt}{d\Phi} &= \frac{\pi \cos \Phi}{4 \cos^2 t}
 \end{aligned} \right] \\
 \left. \begin{aligned}
 c_{11} &= \left(\frac{\partial x}{\partial \Lambda} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \Lambda} \right)^2 = \frac{8}{\pi^2} R^2 \cos^2 t \\
 c_{12} &= \frac{\partial x}{\partial \Lambda} \frac{\partial x}{\partial \Phi} + \frac{\partial y}{\partial \Lambda} \frac{\partial y}{\partial \Phi} = -\frac{8}{\pi^2} R^2 \Lambda \sin t \cos t \frac{dt}{d\Phi} \\
 c_{22} &= \left(\frac{\partial x}{\partial \Phi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \Phi} \right)^2 = \frac{8}{\pi^2} R^2 \Lambda^2 \sin^2 t \left(\frac{dt}{d\Phi} \right)^2 + 2R^2 \cos^2 t \left(\frac{dt}{d\Phi} \right)^2
 \end{aligned} \right] \\
 \left. \begin{aligned}
 c_{11} &= \frac{8}{\pi^2} R^2 \cos^2 t \\
 c_{12} &= -\frac{8}{\pi^2} R^2 \Lambda \sin t \cos t \frac{\pi \cos \Phi}{4 \cos^2 t} \\
 &= -\frac{2}{\pi} R^2 \Lambda \tan t \cos \Phi \\
 c_{22} &= \frac{8}{\pi^2} R^2 \Lambda^2 \sin^2 t \frac{\pi^2 \cos^2 \Phi}{16 \cos^4 t} + 2R^2 \cos^2 t \frac{\pi^2 \cos^2 \Phi}{16 \cos^4 t} \\
 &= \frac{R^2 \cos^2 \Phi}{2 \cos^2 t} (\Lambda^2 \tan^2 t + \frac{\pi^2}{4})
 \end{aligned} \right]$$

Hauptstreckungen

$$c_{KL} - \Lambda_S^2 G_{KL} = R^2 \begin{bmatrix} \frac{8}{\pi^2} \cos^2 t - \Lambda_S^2 \cos^2 \Phi & -\frac{2}{\pi} \Lambda \tan t \cos \Phi \\ -\frac{2}{\pi} \Lambda \tan t \cos \Phi & \frac{\cos^2 \Phi}{2 \cos^2 t} (\Lambda^2 \tan^2 t + \frac{\pi^2}{4}) - \Lambda_S^2 \end{bmatrix}$$

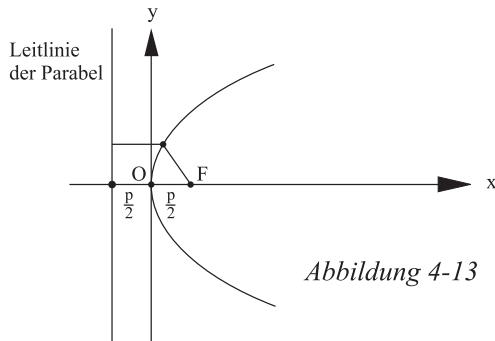
→ biquadratische charakteristische Gleichung

$$|c_{KL} - \Lambda_S^2 G_{KL}| = 0,$$

welche am besten numerisch gelöst wird !

4.7.3 Pseudozylinderabbildung vom Typ parabolisch

Vorgegeben sei die Struktur der Koordinatenlinien im Bild und zwar hier vom Typ *parabolisch*, d.h.



allg. Parabelgleichung

$$y^2 = 2px$$

Parabelachse in der x -Achse; der Scheitel der Parabel liegt auf der x -Achse

“Die Parabel ist die Menge aller Punkte, die von einem festen Punkt (*Brennpunkt*) und einer festen Geraden (*Leitlinie*) gleichen Abstand haben.”

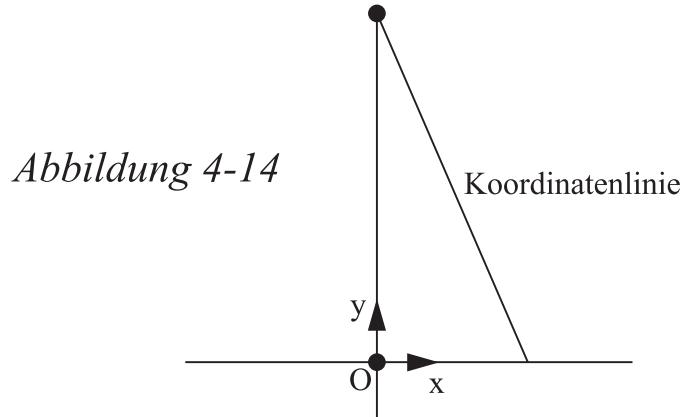
Abbildungsgleichungen

$$x = \sqrt{\frac{3}{\pi}} R \Lambda \left(2 \cos \frac{2\Phi}{3} - 1 \right)$$

$$y = \sqrt{3\pi} R \sin \frac{\Phi}{3}$$

4.7.4 Pseudozylinderabbildung vom Typ geradlinig (rectilinear)

Vorgegeben sei die Struktur der Koordinatenlinien im Bild und zwar hier vom Typ *geradlinig* (rectilinear), d.h.



allg. Geradengleichung

$$y = mx + n$$

Abbildungsgleichungen

$$x = \frac{2R\Lambda}{\sqrt{6\pi}} \sqrt{4 - 3 \sin |\Phi|}$$

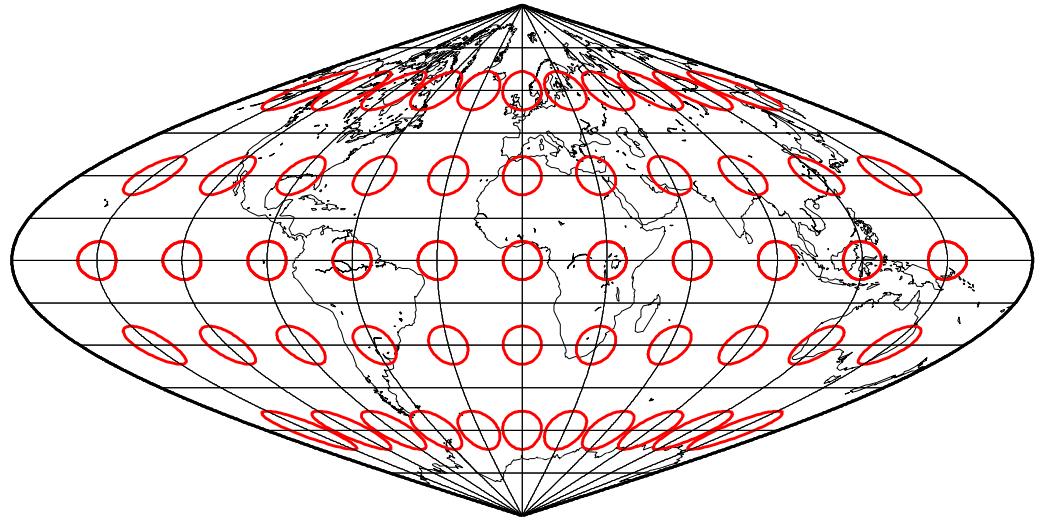
$$y = \left(\sqrt{\frac{2\pi}{3}} R (2 - \sqrt{4 - 3 \sin |\Phi|}) \right) sign \Phi$$

Struktur der Koordinatenlinien

$$\sqrt{4 - 3 \sin |\Phi|} = \frac{\sqrt{6\pi}}{2R\Lambda} x$$

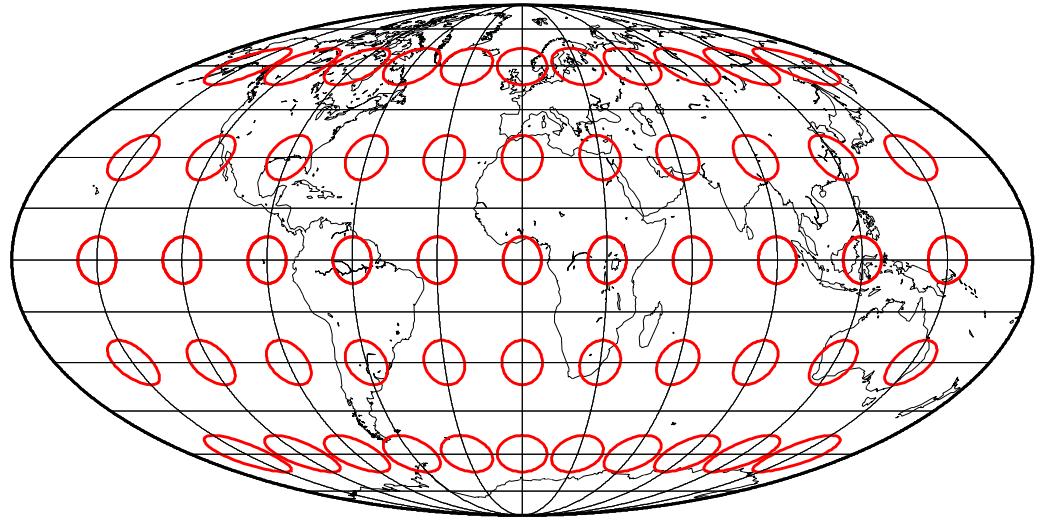
$$y = \left(\sqrt{\frac{2\pi}{3}} R (2 - \frac{\sqrt{6\pi}}{2R\Lambda} x) \right) sign \Phi$$

$$y = (-\pi \frac{x}{\Lambda} + R \sqrt{\frac{8\pi}{3}}) sign \Phi$$



GMT 2002 Jan 10 15:03:18 pscoast -JI0/0.15cm -R-180/180/-90/90 -B30g30/15g15 -Dc -A1000 -G255 -W0.25 -P -K -U/0/-2/c -X3 -Y18

Abbildung 4-15: Pseudozylinerabbildung vom Typ sinusoidal (J. Cossin, N. Sanson, J. Flamsteed)



GMT 2002 Jan 10 15:12:39 pscoast -JW0/0.15cm -R-180/180/-90/90 -B30g30/15g15 -Dc -A1000 -G255 -W0.25 -P -K -U/0/-2/c -X3 -Y18

Abbildung 4-16: Pseudozylinerabbildung vom Typ elliptisch (C.B. Mollweide)

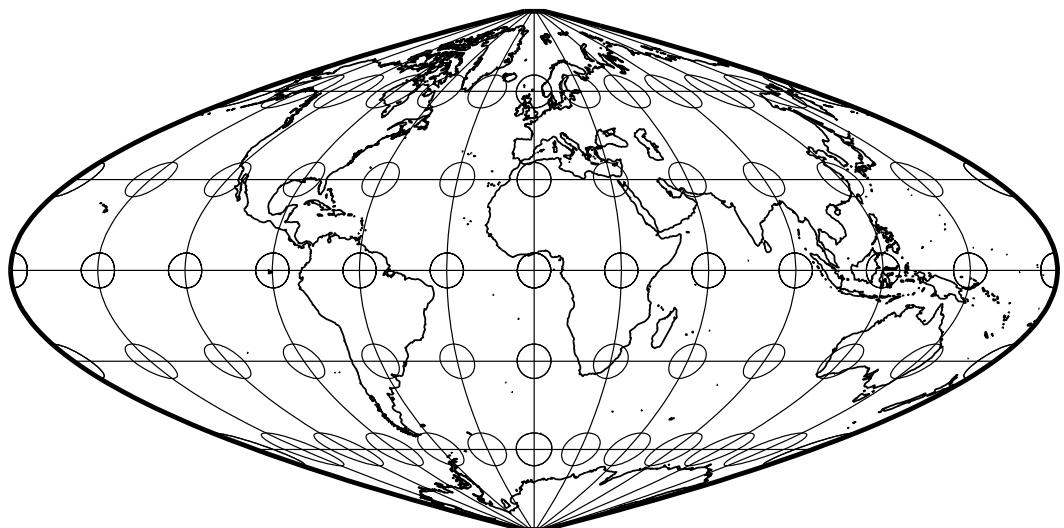


Abbildung 4.17: Pseudozylinderabbildung vom Typ parabolisch (J.E.E. Craster)

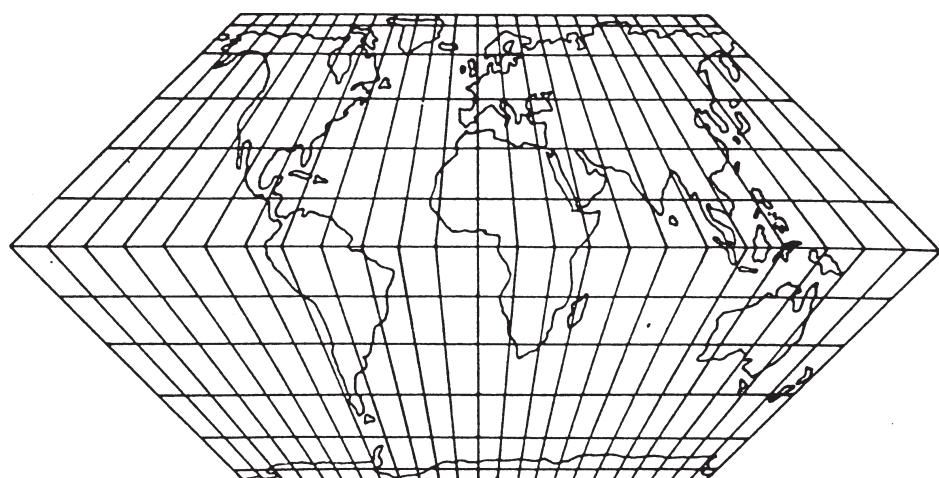


Abbildung 4.18: Pseudozylinderabbildung vom Typ geradlinig (rectilinear, Eckert II)

4.7.5 Mischformen

Als ein Beispiel für Mischformen von flächentreuen Zylinderabbildungen betrachten wir die *Lambert flächentreue Zylinderabbildung* und die *Sanson-Flamsteed flächentreue Pseudozylinderabbildung und sinusoidalen Typ*:

1. Variante:

gewichtetes Mittel der Gleichung der Parallelen:

Ansatz: $y(\Phi) = R(\alpha \sin \Phi + \beta \Phi) / (\alpha + \beta)$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ \text{Lambert} & \text{Sanson-Flamsteed} \end{matrix}$

$$x(\Lambda, \Phi) = R^2 \frac{\Lambda \cos \Phi}{\frac{dy}{d\Phi}}, \quad y(\Phi) = Rf(\Phi)$$

$$\frac{dy}{d\Phi} = \frac{R(\alpha \cos \Phi + \beta)}{\alpha + \beta} \implies$$

Abbildungsgleichungen

$$x(\Lambda, \Phi) = \frac{R(\alpha+\beta)\Lambda \cos \Phi}{\alpha \cos \Phi + \beta}$$

$$y(\Phi) = \frac{R(\alpha \sin \Phi + \beta \Phi)}{\alpha + \beta}$$

$\alpha = \beta = 1$: P. Foucaut (1862)

2. Variante:

gewichtetes Mittel der Gleichung der Längenkreise (Meridiane):

Ansatz: $x(\Lambda, \Phi) = R\Lambda(\alpha + \beta \cos \Phi) / (\alpha + \beta)$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ \text{Lambert} & \text{Sanson-Flamsteed} \end{matrix}$

$$x(\Lambda, \Phi) = R^2 \frac{\Lambda \cos \Phi}{\frac{dy}{d\Phi}}, \quad y(\Phi) = Rf(\Phi)$$

$$\frac{dy}{d\Phi} = \frac{R^2 \Lambda \cos \Phi}{x(\Lambda, \Phi)} = R \frac{\cos \Phi (\alpha + \beta)}{\alpha + \beta \cos \Phi}$$

$$y(\Phi) = R(\alpha + \beta) \int_0^\Phi d\Phi' \frac{\cos \Phi'}{\alpha + \beta \cos \Phi'}$$

z. B. $\alpha = \beta = 1 \implies$

Abbildungsgleichungen

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \frac{R}{2}\Lambda(1 + \cos \Phi) = x(\Lambda, \Phi) \\ y &= 2R(\Phi - \tan \frac{\Phi}{2}) = y(\Phi) \end{aligned}}$$

Nell–Hammer–Abbildung (1890/1900)

4.8 Optimale Zylinderabbildungen der Kugel am Beispiel einer Abbildung vom Typ äquidistant auf zwei Parallelkreisen

In den Anwendungen eignen sich Abbildungsgebiete ausgehend vom Äquator und hin zu Breiten von $\Phi = \pm 85^\circ$. Der Flächeninhalt der Kugelzone zwischen Äquator und dem Breitenkreis Φ ist

$$S = 2\pi \sin \Phi, \quad dS = 2\pi \cos \Phi d\Phi$$

(z. B. J. Dreszer: Mathematik Handbuch, H. Deutsch Verlag, Zürich 1975, Seite 56)

Airyscher Verzerrungsindikator

$$\varepsilon_A^2 = \frac{1}{2}((\Lambda_1 - 1)^2 + (\Lambda_2 - 1)^2)$$

Verzerrungsenergie

$$I_A = \frac{1}{S} \int_S \varepsilon_A^2 dS = \frac{1}{2S} \int_S ((\Lambda_1 - 1)^2 + (\Lambda_2 - 1)^2) dS$$

4.8.1 Winkeltreue Abbildung 4.3.2

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} \Lambda \cos \Phi_0 \\ \cos \Phi_0 \ln \tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\Phi}{2}) \end{bmatrix}$$

$$\text{Hauptstreckungen } \Lambda_1 = \Lambda_2 = \frac{\cos \Phi_0}{\cos \Phi}$$

Airyscher Verzerrungsindikator:

$$\varepsilon_A^2 = \left(\frac{\cos \Phi_0}{\cos \Phi} - 1 \right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \Phi} (\cos^2 \Phi_0 - 2 \cos \Phi_0 \cos \Phi + \cos^2 \Phi)$$

$$\begin{aligned} I_A &= \frac{1}{\sin \Phi} \int_0^\Phi d\Phi' \frac{\cos \Phi'}{\cos^2 \Phi'} (\cos^2 \Phi_0 - 2 \cos \Phi_0 \cos \Phi' + \cos^2 \Phi') \\ &= \frac{1}{\sin \Phi} \left(\int_0^\Phi d\Phi' \frac{\cos^2 \Phi_0}{\cos \Phi'} - 2 \int_0^\Phi d\Phi' \cos \Phi_0 + \int_0^\Phi d\Phi' \cos \Phi' \right) \\ &= \frac{1}{\sin \Phi} \left(\cos^2 \Phi_0 \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Phi}{2} \right) - 2\Phi \cos \Phi_0 + \sin \Phi \right) \\ &\quad \left. \begin{aligned} \int \frac{d\Phi}{\cos \Phi} &= \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Phi}{2} \right) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin \Phi}{1 - \sin \Phi} \\ \int d\Phi &= \Phi \\ \int d\Phi \cos \Phi &= \sin \Phi \end{aligned} \right] \end{aligned}$$

Um die Konstante Φ_0 so zu bestimmen, daß I_A auf dem mit den Breitenkreisen $\Phi = \pm 85^\circ$ begrenzten Abbildungsgebiet ein Minimum ergibt, setzen wir $dI_A/d\Phi_0 = 0 : \Rightarrow$

$$\begin{aligned} -2 \sin \hat{\Phi}_0 \cos \hat{\Phi}_0 \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Phi}{2} \right) + 2\Phi \sin \hat{\Phi}_0 &= 0 \\ \sin \hat{\Phi}_0 &\neq 0 \end{aligned} \right] \Rightarrow$$

$$\cos \hat{\Phi}_0 = \frac{\Phi}{\ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Phi}{2} \right)}$$

$$\underline{\Phi = 85^\circ}: \hat{\Phi}_0 = \pm 61,72^\circ, \sqrt{I_A} = 0,5426$$

4.8.2 Flächentreue Abbildung 4.3.3

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} \Lambda \cos \Phi_0 \\ \sin \Phi / \cos \Phi_0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Hauptstreckungen } \Lambda_1 = \frac{\cos \Phi_0}{\cos \Phi}, \Lambda_2 = \frac{\cos \Phi}{\cos \Phi_0}$$

Airyscher Verzerrungsindikator:

$$\begin{aligned}\varepsilon_A^2 &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\cos \Phi_0}{\cos \Phi} - 1 \right)^2 + \left(\frac{\cos \Phi}{\cos \Phi_0} - 1 \right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\cos^2 \Phi_0 - 2 \cos \Phi_0 \cos \Phi + \cos^2 \Phi}{\cos^2 \Phi} + \frac{\cos^2 \Phi_0 - 2 \cos \Phi_0 \cos \Phi + \cos^2 \Phi}{\cos^2 \Phi_0} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\cos^4 \Phi_0 - 2 \cos^3 \Phi_0 \cos \Phi + 2 \cos^2 \Phi_0 \cos^2 \Phi - 2 \cos \Phi_0 \cos^3 \Phi + \cos^4 \Phi}{\cos^2 \Phi_0 \cos^2 \Phi}\end{aligned}$$

$$I_A = \frac{1}{2 \sin \Phi} \int_0^\Phi d\Phi' \frac{1}{\cos \Phi' \cos^2 \Phi_0} \left(\cos^4 \Phi_0 - 2 \cos^3 \Phi_0 \cos \Phi' + 2 \cos^2 \Phi_0 \cos^2 \Phi' - 2 \cos \Phi_0 \cos^3 \Phi' + \cos^4 \Phi' \right)$$

$$\begin{aligned}\int \frac{d\Phi'}{\cos \Phi'} &= \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Phi'}{2} \right) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin \Phi'}{1 - \sin \Phi'} \\ \int d\Phi' &= \Phi' \\ \int \cos^2 \Phi' d\Phi' &= \frac{\Phi'}{2} + \frac{\sin 2\Phi'}{4} = \frac{\Phi'}{2} + \frac{1}{2} \sin \Phi' \cos \Phi' \\ \int \cos \Phi' d\Phi' &= \sin \Phi' \\ \int \cos^3 \Phi' d\Phi' &= \frac{1}{3} \sin \Phi' (2 + \cos^2 \Phi')\end{aligned}\right]$$

$$\begin{aligned}I_A = I_A(\Phi_0) &= \frac{1}{2 \sin \Phi} \left(\cos^2 \Phi_0 \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Phi}{2} \right) - 2\Phi \cos \Phi_0 \right. \\ &\quad \left. + 2 \sin \Phi - \frac{1}{\cos \Phi_0} (\Phi + \frac{1}{2} \sin 2\Phi) + \frac{1}{3} \frac{\sin \Phi}{\cos^2 \Phi_0} (2 + \cos^2 \Phi) \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dI_A}{d\Phi_0} &= 0 \implies \\ &-2 \sin \hat{\Phi}_0 \cos \hat{\Phi}_0 \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Phi}{2} \right) + 2\Phi \sin \hat{\Phi}_0 \\ &- \frac{\sin \hat{\Phi}_0}{\cos^2 \hat{\Phi}_0} (\Phi + \frac{1}{2} \sin 2\Phi) + \frac{2}{3} \frac{\sin \hat{\Phi}_0}{\cos^3 \hat{\Phi}_0} \sin \Phi (2 + \cos^2 \Phi) = 0 \\ &\sin \hat{\Phi}_0 \neq 0 \wedge \cos^3 \hat{\Phi}_0 \neq 0\end{aligned}\right]$$

$$-3 \cos^4 \hat{\Phi}_0 \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Phi}{2}\right) + 3\Phi \cos^3 \hat{\Phi}_0 - 3 \cos \hat{\Phi}_0 \left(\frac{\Phi}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\Phi\right) + (2 + \cos^2 \Phi) \sin \Phi = 0$$

algebraische Gleichung vierten Grades für $\cos^4 \hat{\Phi}_0 = x$:

$$x^4 + ax^3 + bx + c = 0$$

$$\cos^4 \hat{\Phi}_0 - \frac{\Phi}{\ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Phi}{2}\right)} \cos^3 \hat{\Phi}_0 + \frac{2\Phi + \sin 2\Phi}{4 \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Phi}{2}\right)} \cos \hat{\Phi}_0 - \frac{2 + \cos^2 \Phi}{3 \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Phi}{2}\right)} \sin \Phi = 0$$

$$a = -\frac{\Phi}{\ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Phi}{2}\right)}, \quad b = +\frac{2\Phi + \sin 2\Phi}{4 \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Phi}{2}\right)}, \quad c = -\frac{2 + \cos^2 \Phi}{3 \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Phi}{2}\right)} \sin \Phi$$

$$\underline{\Phi = 85^\circ}: \hat{\Phi}_0 = \pm 49^\circ, 31 \sqrt{I_A} = 0,5248$$

4.8.3 Abstandstreue Abbildung 4.3.1

äquidistant auf zwei Parallelkreisen $\pm \Phi_0$ und der Schar der Hauptkreise (Meridiane)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} \Lambda \cos \Phi_0 \\ \Phi \end{bmatrix}$$

$$\text{Hauptstreckungen } \Lambda_1 = \frac{\cos \Phi_0}{\cos \Phi}, \Lambda_2 = 1$$

Airyscher Verzerrungsindikator:

$$\varepsilon_A^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\cos \Phi_0}{\cos \Phi} - 1 \right)^2$$

$$I_A \text{ (Fall c)} = \frac{1}{2} I_A \text{ (Fall a)}$$

$$\underline{\Phi = 85^\circ}: \hat{\Phi}_0 = \pm 61,72^\circ, \sqrt{I_A} = 0,3837$$

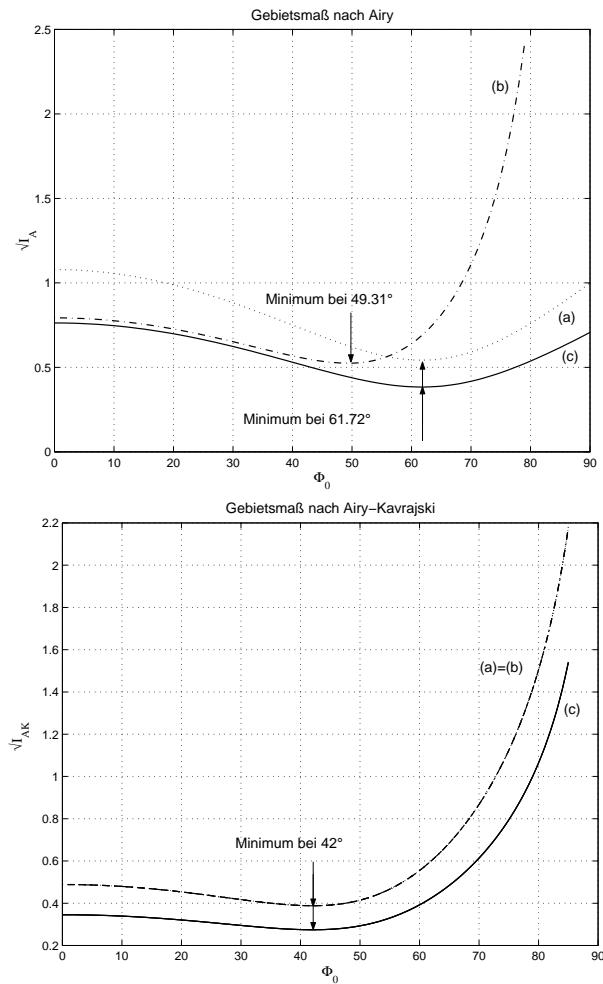
Ergebnis:

Nach dem Kriterium von G.B. Airy sind die abstandstreuen Abbildungen die besten, die flächentreuen Abbildungen sind besser als die winkeltreuen Abbildungen.

Im Folgenden sind die vollständigen Funktionen

$$\sqrt{I_A(\Phi_0)}, \sqrt{I_{AK}(\Phi_0)}$$

dargestellt: Nach dem *Kriterium von Airy* sind die *abstandstreuen Zylinderabbildungen* die besten. Die flächentreuen Abbildungen sind bis zu einer Breite von etwa $\Phi = 56^\circ$ besser als die winkeltreuen. Nach dem *Kriterium von Airy-Kavrajski* sind die *abstandstreuen Zylinderabbildungen* ebenfalls am besten. Allerdings sind die winkel- und flächentreuen Abbildungen *gleich gut*, aber schlechter als die abstandstreuen.



Literatur zum Thema "vorteilhafte Abbildungen in der Atlaskartographie":

Airy G B (1861), Francula N (1971), Grafarend E W (1995), Grafarend E W and Niermann A (1984), Grafarend E W and Syffus R (1998b), Hojovec V and Jokl L (1981), Jordan W (1875), Jordan W (1896), Kaltsikis C (1980), Kavrajski V V (1958)

4.9 Allgemeine Abbildungsgleichungen und Verzerrungsmaße für Zylinderabbildungen vom Typ äquidistant auf dem Äquator, im Falle des Rotationsellipsoides

Karte Φ : ellipsoidische Koordinaten

$$\mathbf{X} = \Phi^{-1}(\mathbf{U}) : \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \frac{A}{\sqrt{1 - E^2 \sin^2 \Phi}} \begin{bmatrix} \cos \Lambda \cos \Phi \\ \sin \Lambda \cos \Phi \\ (1 - E^2) \sin \Phi \end{bmatrix}$$

große Halbachse des Rotationsellipsoides A

kleine Halbachse des Rotationsellipsoides B

erste numerische Exzentrizität $E : \sqrt{\frac{A^2 - B^2}{A^2}} = \sqrt{1 - \frac{B^2}{A^2}}$
ellipsoidische Länge Λ und Breite Φ

$$\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda \\ \Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \arctan Y X^{-1} \\ \arctan \frac{1}{1-E^2}(Z/\sqrt{X^2 + Y^2}) \end{bmatrix}$$

Metriktensor

$$\mathbf{G}_\Lambda := \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \Lambda} = \frac{A \cos \Phi}{\sqrt{1 - E^2 \sin^2 \Phi}} (-\sin \Lambda \mathbf{E}_1 + \cos \Lambda \mathbf{E}_2)$$

$$\mathbf{G}_\Phi := \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \Phi} = -\frac{A(1 - E^2)}{(1 - E^2 \sin^2 \Phi)^{3/2}} (\cos \Lambda \sin \Phi \mathbf{E}_1 + \sin \Lambda \sin \Phi \mathbf{E}_2 - \cos \Phi \mathbf{E}_3)$$

$$< \mathbf{G}_\Lambda | \mathbf{G}_\Lambda > = G_{\Lambda\Lambda} = G_{11} = \frac{A^2 \cos^2 \Phi}{1 - E^2 \sin^2 \Phi}$$

$$< \mathbf{G}_\Phi | \mathbf{G}_\Phi > = G_{\Phi\Phi} = G_{22} = \frac{A^2 (1 - E^2)^2}{(1 - E^2 \sin^2 \Phi)^3}$$

$$< \mathbf{G}_\Lambda | \mathbf{G}_\Phi > = 0$$

$$G_{KL} = \frac{\partial X^I}{\partial U^K} \frac{\partial X^I}{\partial U^L} = \begin{bmatrix} \frac{A^2 \cos^2 \Phi}{1 - E^2 \sin^2 \Phi} & 0 \\ 0 & \frac{A^2 (1 - E^2)^2}{(1 - E^2 \sin^2 \Phi)^3} \end{bmatrix}$$

Karte φ : cartesische Koordinaten

$$\mathbf{x} = \varphi^{-1}(\mathbf{u}) : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \end{bmatrix}$$

Metriktenor

$$\frac{\partial x^i}{\partial u^k} = \delta_{ik}$$

$$g_{kl} = \delta_{kl}$$

Abbildungsgleichungen

Die Forderung, dass die Bildkoordinate y nur von der ellipsoidischen Breite Φ abhängen soll, die Bildkoordinate x nur von der Länge Λ , wobei *der Äquator äquidistant abzubilden ist*, führt auf den Ansatz

$$x = A\Lambda, \quad y = f(\Phi)$$

oder

$$\mathbf{x} = \varphi^{-1} \circ \bar{f}(\mathbf{U}) : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\Lambda \\ f(\Phi) \end{bmatrix}$$

Deformationstensor

$$c_{KL} = g_{kl} \frac{\partial u^k}{\partial U^K} \frac{\partial u^l}{\partial U^L} = \delta_{kl} \frac{\partial u^k}{\partial U^K} \frac{\partial u^l}{\partial U^L} = \frac{\partial x^i}{\partial U^K} \frac{\partial x^i}{\partial U^L}$$

$$c_{11} = \left(\frac{\partial x}{\partial \Lambda} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \Lambda} \right)^2, \quad c_{12} = \left(\frac{\partial x}{\partial \Lambda} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial \Phi} \right) + \left(\frac{\partial y}{\partial \Lambda} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial \Phi} \right)$$

$$c_{22} = \left(\frac{\partial x}{\partial \Phi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \Phi} \right)^2$$

$$\frac{\partial x}{\partial \Lambda} = A, \quad \frac{\partial x}{\partial \Phi} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial \Lambda} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial \Phi} = f'(\Phi)$$

$$c_{KL} = \begin{bmatrix} A^2 & 0 \\ 0 & f'^2(\Phi) \end{bmatrix}$$

Hauptstreckungen

$$\Lambda_1 = \sqrt{c_{11}/G_{11}} = \frac{\sqrt{1 - E^2 \sin^2 \Phi}}{\cos \Phi}$$

Streckung in Richtung des Parallelkreises $\Phi = \text{const.}$

$$\Lambda_2 = \sqrt{c_{22}/G_{22}} = \frac{f'(\Phi)}{A(1 - E^2)} (1 - E^2 \sin^2 \Phi)^{3/2} \quad \begin{array}{l} \text{Streckung in Richtung des Meridiens } \Lambda = \text{const.} \\ \end{array}$$

Struktur der Koordinatenlinien

(i) $x = A\Lambda$

Gerade durch den Ursprung für $\Lambda = \text{const.}$

(ii) $y = f(\Phi)$

Gerade durch den Ursprung für $\Phi = \text{const.}$

4.10 Spezielle Zylinderabbildungen des Rotationsellipsoides, äquidistant auf dem Äquator

4.10.1 Normale Zylinderabbildung, äquidistant auf dem Äquator und der Schar der Parallelkreise, konform auf dem Äquator

Forderung der Äquidistanz auf der Schar der Parallelkreise:

$$\begin{aligned} \Lambda_2 = 1 &\implies \frac{f'(\Phi)}{A(1 - E^2)} (1 - E^2 \sin^2 \Phi)^{3/2} = 1 \implies \\ df &= A(1 - E^2) \frac{d\Phi}{(1 - E^2 \sin^2 \Phi)^{3/2}} \\ f(\Phi) &= A(1 - E^2) \int_0^\Phi \frac{d\Phi'}{(1 - E^2 \sin^2 \Phi')^{3/2}} \end{aligned}$$

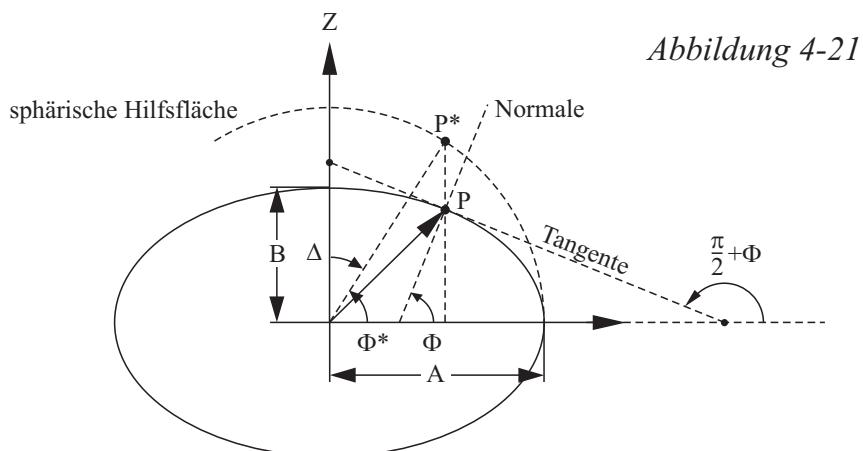


Abbildung 4-21

Das Integral $\int_0^\Phi \frac{d\Phi'}{(1 - E^2 \sin^2 \Phi')^{3/2}} A(1 - E^2)$, welches die Länge eines Meridianbogens vom Äquator zu einem Parallelkreis unter der Breite Φ angibt, soll nachfolgend in einen Standard eines elliptischen Integrals überführt werden. Dazu führen wir die *reduzierte Breite* Φ^* (konventionelle Bezeichnung β) ein:

$$\tan \Phi^* = \frac{B}{A} \tan \Phi = \sqrt{1 - E^2} \tan \Phi$$

Ableitung: $\sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{X^{*2} + Y^{*2}} = A \cos \Phi^*$

$$Z^* = A \sin \Phi^*$$

Der Punkt P hat dieselbe Abzisse wie der Punkt P^* auf der Hilfskugel von Radius A .

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \cos \Lambda \cos \Phi^* \\ A \sin \Lambda \cos \Phi^* \\ B \sin \Phi^* \end{bmatrix}$$

In der Parameterdarstellung $X(\Lambda, \Phi^*)$ des Rotationsellipsoids folgt $X(\Lambda, \Phi^*)$, $Y(\Lambda, \Phi^*)$ direkt aus der Identität $\Lambda = \Lambda^*$, $\sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{X^{*2} + Y^{*2}} = A \cos \Phi^*$. Die Darstellung $Z(\Phi^*)$ ergibt sich dann aus der Gleichung des Rotationsellipsoides.

$$E_{A,B}^2 := \{(X, Y, Z) : \frac{X^2}{A^2} + \frac{Z^2}{B^2} = 1\} \subset \mathbb{R}^3$$

$$\begin{aligned} \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}} &= (1 - E^2) \tan \Phi = \frac{B}{A} \tan \Phi^* \\ \frac{B}{A} &= \sqrt{1 - E^2} \end{aligned} \quad \Rightarrow$$

$$\tan \Phi^* = \sqrt{1 - E^2} \tan \Phi = \frac{B}{A} \tan \Phi \quad \text{q.e.d.}$$

$$f(\Phi) = A(1 - E^2) \int_0^\Phi \frac{d\Phi'}{(1 - E^2 \sin^2 \Phi')^{3/2}} = A \int_0^{\Phi^*} \sqrt{1 - E^2 \cos^2 \Phi'^2} d\Phi'$$

$$\mathbf{E}(x; E) = \int_0^x \sqrt{1 - E^2 \sin^2 x'} dx'$$

elliptisches Integral zweiter Art (elliptic integral of the second kind)

siehe: I. S. GRADSHTEYN and I. M. RYZHIK:

Table of integrals, series and products, Academic Press, New York
1980

Seite 905, Formel 8.111.3

$$\begin{aligned}
f(\Phi) &= A(1 - E^2) \int_0^\Phi \frac{d\Phi'}{(1 - E^2 \sin^2 \Phi')^{3/2}} = A \int_0^{\Phi^*} \sqrt{1 - E^2 \cos^2 \Phi'^*} d\Phi'^* \\
&= A \int_\Delta^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - E^2 \sin^2 \Delta'} d\Delta' \\
&= A \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - E^2 \sin^2 \Delta'} d\Delta' - A \int_0^\Delta \sqrt{1 - E^2 \sin^2 \Delta'} d\Delta' \\
&= A \{ \mathbf{E}(\frac{\pi}{2}; E) - \mathbf{E}(\Delta; E) \}
\end{aligned}$$

$$f(\Phi) = A \{ \mathbf{E}(\frac{\pi}{2}; E) - \mathbf{E}[\frac{\pi}{2} - \arctan(\frac{B}{A} \tan \Phi); E] \}$$

Hauptstreckungen

$$\Lambda_1 = \frac{\sqrt{1 - E^2 \sin^2 \Phi}}{\cos \Phi}, \quad \Lambda_2 = 1$$

4.10.2 Normale konforme Zylinderabbildung, äquidistant auf dem Äquator

Forderung der Konformität: $\Lambda_1 = \Lambda_2 \implies$

$$\frac{\sqrt{1 - E^2 \sin^2 \Phi}}{\cos \Phi} = \frac{(1 - E^2 \sin^2 \Phi)^{3/2}}{A(1 - E^2)} f'(\Phi) \implies$$

$$df = \frac{A(1 - E^2)}{\cos \Phi} \frac{1}{1 - E^2 \sin^2 \Phi} d\Phi$$

$$f(\Phi) = A \int_0^\Phi \frac{d\Phi'}{\cos \Phi'} \frac{1 - E^2}{1 - E^2 \sin^2 \Phi'}$$

[]

“isometrische Breite”

$$f(\Phi) = A \int_0^\Phi d\Phi' \left(\frac{1}{\cos \Phi'} - \frac{E}{2} \left(\frac{E \cos \Phi'}{1 + E \sin \Phi'} + \frac{E \cos \Phi'}{1 - E \sin \Phi'} \right) \right)$$

“Partialbruchzerlegung”

$$f(\Phi) = A \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Phi}{2}\right) - \frac{AE}{2} \ln \frac{1 + E \sin \Phi}{1 - E \sin \Phi}$$

Abbildungsgleichungen

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\Lambda \\ A \ln \left[\left(\frac{1-E \sin \Phi}{1+E \sin \Phi} \right)^{E/2} \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Phi}{2}\right) \right] \end{bmatrix}$$

Hauptstreckungen

$$\Lambda_1 = \Lambda_2 = \frac{\sqrt{1 - E^2 \sin^2 \Phi}}{\cos \Phi}$$

4.10.3 Normale flächentreue Zylinderabbildung, äquidistant und konform auf dem Äquator

Forderung der Flächentreue: $\Lambda_1 \Lambda_2 = 1 \implies$

$$\frac{\sqrt{1 - E^2 \sin^2 \Phi}}{\cos \Phi} \frac{f'(\Phi)}{A(1 - E^2)} (1 - E^2 \sin^2 \Phi)^{3/2} = 1 \implies$$

$$df = A(1 - E^2) \frac{\cos \Phi}{(1 - E^2 \sin^2 \Phi)^2} d\Phi$$

$$f(\Phi) = A(1 - E^2) \int_0^\Phi \frac{\cos \Phi'}{(1 - E^2 \sin^2 \Phi')^2} d\Phi'$$

$$f(\Phi) = \frac{A(1 - E^2)}{4E} \left(\ln \frac{1 + E \sin \Phi}{1 - E \sin \Phi} + \frac{2E \sin \Phi}{1 - E^2 \sin^2 \Phi} \right)$$

Beweis:

$$\int_0^x \frac{\cos x' dx'}{(1 - E^2 \sin^2 x')^2} = \frac{1}{E} \int_0^x \frac{d(E \sin x')}{(1 - E^2 \sin^2 x')^2} = \frac{1}{E} \int_0^{E \sin x} \frac{dy}{(1 - y^2)^2}$$

$$\frac{1}{(1 - y^2)^2} = \frac{1}{(1 + y)^2(1 - y)^2} = \frac{A}{(1 - y)^2} + \frac{B}{1 - y} + \frac{C}{(1 + y)^2} + \frac{D}{1 + y}$$

$$A(1 + y)^2 + B(1 + y)^2(1 - y) + C(1 - y)^2 + D(1 - y)^2(1 + y) = 1 \implies$$

$$\begin{aligned}
A(1+2y+y^2) + B(1+y-y^2-y^3) + C(1-2y+y^2) + D(1-y-y^2+y^3) &= 1 \\
\left. \begin{array}{l} \text{(i)} \ y^3 : -B + D = 0 \\ \text{(ii)} \ y^2 : A - B + C - D = 0 \\ \text{(iii)} \ y : 2A + B - 2C - D = 0 \\ \text{(iv)} \ 1 : A + B + C + D = 1 \end{array} \right] \\
-\text{(ii)} + \text{(iv)} \quad 2(B + D) = 1 \\
\left. \begin{array}{l} \text{(i)} \quad -B + D = 0 \\ \text{(ii)} \quad A + C = \frac{1}{2} \\ \text{(iii)} \quad 2(A - C) = 0 \end{array} \right] \Rightarrow B = D = \frac{1}{4} \\
B = D = \frac{1}{4}; \quad \left. \begin{array}{l} \text{(ii)} : A + C = \frac{1}{2} \\ \text{(iii)} \quad 2(A - C) = 0 \end{array} \right] \Rightarrow A = C = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Fortsetzung Integral:

$$\frac{1}{E} \int_0^{E \sin x} \frac{dy}{(1-y^2)^2} = \frac{1}{4E} \int_0^{E \sin x} \frac{1}{(1-y)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{1+y} dy$$

Standardintegrale

$$\left. \begin{array}{l} \int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln |ax+b| \\ \int \frac{dx}{(x+1)^2} = -\frac{1}{x+1}, \quad \int \frac{dx}{(-x+1)^2} = \frac{1}{-x+1} \end{array} \right]$$

Fortsetzung Integral:

$$\frac{1}{4E} \left[\ln \left(\frac{1+y}{1-y} \right) + \frac{1}{1-y} - \frac{1}{1+y} \right]_0^{E \sin x} = \frac{1}{4E} \left[\ln \left(\frac{1+E \sin x}{1-E \sin x} \right) + \frac{2E \sin x}{1-E^2 \sin^2 x} \right] \quad \text{q.e.d.}$$

Abbildungsgleichungen

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\Lambda \\ \frac{A(1-E^2)}{4E} \left(\ln \frac{1+E \sin \Phi}{1-E \sin \Phi} + \frac{2E \sin \Phi}{1-E^2 \sin^2 \Phi} \right) \end{bmatrix}$$

Hauptstreckungen

$$\Lambda_1 = \frac{\sqrt{1-E^2 \sin^2 \Phi}}{\cos \Phi}, \quad \Lambda_2 = \frac{\cos \Phi}{\sqrt{1-E^2 \sin^2 \Phi}}$$

4.11 Allgemeine Abbildungsgleichungen und Verzerrungsmaße für Zylinderabbildungen vom Typ äquidistant auf dem Äquator, im Falle einer Drehfläche

Karte Φ

$$\mathbf{X} = \Phi^{-1}(\mathbf{U}) :$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(\Phi) \cos \Lambda \\ F(\Phi) \sin \Lambda \\ G(\Phi) \end{bmatrix}$$

z.B. Rotationsellipsoid:

$$F(\Phi) = \frac{A \cos \Phi}{\sqrt{1 - E^2 \sin^2 \Phi}}$$

$$G(\Phi) = \frac{A(1 - E^2) \sin \Phi}{\sqrt{1 - E^2 \sin^2 \Phi}}$$

$$U = \Lambda = \arctan Y X^{-1}$$

$$V = \Phi \quad \text{nicht allgemein darstellbar}$$

Metriktenor

$$\mathbf{G}_\Lambda := \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \Lambda} = -F(\Phi) \sin \Lambda \mathbf{E}_1 + F(\Phi) \cos \Lambda \mathbf{E}_2$$

$$\mathbf{G}_\Phi := \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \Phi} = F'(\Phi) \cos \Lambda \mathbf{E}_1 + F'(\Phi) \sin \Lambda \mathbf{E}_2 + G'(\Phi) \mathbf{E}_3$$

$$\langle \mathbf{G}_\Lambda | \mathbf{G}_\Lambda \rangle = F^2(\Phi) = G_{11}(\Phi)$$

$$\langle \mathbf{G}_\Phi | \mathbf{G}_\Phi \rangle = F'^2(\Phi) + G'^2(\Phi) = G_{22}(\Phi)$$

$$\langle \mathbf{G}_\Lambda | \mathbf{G}_\Phi \rangle = -FF' \sin \Lambda \cos \Lambda + FF' \sin \Lambda \cos \Lambda = 0$$

$$G_{KL} = \frac{\partial X^I}{\partial U^K} \frac{\partial X^I}{\partial U^L} = \begin{bmatrix} F^2(\Phi) & 0 \\ 0 & F'^2(\Phi) + G'^2(\Phi) \end{bmatrix}$$

Karte φ : cartesische Koordinaten

$$\mathbf{x} = \varphi^{-1}(\mathbf{u}) : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \end{bmatrix}$$

Metriktensor

$$\frac{\partial x^i}{\partial u^k} = \delta_{ik}, \quad g_{kl} = \delta_{kl}$$

Abbildungsgleichungen

Die Forderung, daß die Bildkoordinaten y nur von der Breite der Drehfläche Φ abhängen soll, die Bildkoordinate x nur von der Länge Λ , wobei *der Äquator äquidistant abzubilden* ist, führt auf den *Ansatz*

$$x = F(0)\Lambda, \quad y = f(\Phi)$$

oder

$$\mathbf{x} = \varphi^{-1} \circ \bar{f}(\mathbf{U}) : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(0)\Lambda \\ f(\Phi) \end{bmatrix}$$

Deformationstensor

$$c_{KL} = g_{kl} \frac{\partial u^k}{\partial U^K} \frac{\partial u^l}{\partial U^L} = \delta_{kl} \frac{\partial u^k}{\partial U^K} \frac{\partial u^l}{\partial U^L} = \frac{\partial x^i}{\partial U^K} \frac{\partial x^i}{\partial U^L}$$

$$c_{11} = \left(\frac{\partial x}{\partial \Lambda} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \Lambda} \right)^2 = F^2(0)$$

$$c_{12} = \frac{\partial x}{\partial \Lambda} \frac{\partial x}{\partial \Phi} + \frac{\partial y}{\partial \Lambda} \frac{\partial y}{\partial \Phi} = 0$$

$$c_{22} = \left(\frac{\partial x}{\partial \Phi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \Phi} \right)^2 = f'^2(\Phi)$$

$$c_{KL} = \begin{bmatrix} F^2(0) & 0 \\ 0 & f'^2(\Phi) \end{bmatrix}$$

Hauptstreckungen

$$\Lambda_1 = \sqrt{c_{11}/G_{11}} = \frac{F(0)}{F(\Phi)}$$

Streckung in Richtung des Parallelkreises $\Phi = const.$

$$\Lambda_2 = \sqrt{c_{22}/G_{22}} = \frac{f'(\Phi)}{\sqrt{F'^2(\Phi) + G'^2(\Phi)}}$$

Struktur der Koordinatenlinien:

- (i) $x = F(0)\Lambda$
Gerade durch den Ursprung für $\Lambda = const.$
- (ii) $x = f(\Phi)$
Gerade durch den Ursprung für $\Phi = const.$

4.12 Spezielle Zylinderabbildungen einer Drehfläche, äquidistant auf dem Äquator

4.12.1 Normale Zylinderabbildung, äquidistant auf dem Äquator und der Schar der Parallelkreise

Forderung der Äquidistanz auf der Schar der Parallelkreise:

$$\Lambda_2 = 1 \implies \frac{f'(\Phi)}{\sqrt{F'^2(\Phi) + G'^2(\Phi)}} = 1 \implies$$

$$df = \sqrt{F'^2(\Phi) + G'^2(\Phi)} d\Phi$$

$$f(\Phi) = \int_0^\Phi \sqrt{F'^2(\Phi) + G'^2(\Phi)} d\Phi' + const.$$

$$f(0) = 0 \implies const. = 0$$

4.12.2 Normale konforme Zylinderabbildung, äquidistant auf dem Äquator

Forderung der Konformität:

$$\Lambda_1 = \Lambda_2 \implies$$

$$\begin{aligned} \frac{F(0)}{F(\Phi)} &= \frac{f'(\Phi)}{\sqrt{F'^2(\Phi) + G'^2(\Phi)}} \implies \\ df &= F(0) \frac{\sqrt{F'^2(\Phi) + G'^2(\Phi)}}{F(\Phi)} d\Phi \quad \left. \right] \implies \\ f(0) &= 0 \\ f(\Phi) &= \int_0^\Phi F(0) \frac{\sqrt{F'^2(\Phi') + G'^2(\Phi')}}{F(\Phi')} d\Phi' \end{aligned}$$

Abbildungsgleichungen

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = F(0) \begin{bmatrix} \Lambda \\ \int_0^\Phi \frac{\sqrt{F'^2(\Phi') + G'^2(\Phi')}}{F(\Phi')} d\Phi' \end{bmatrix}$$

Hauptstreckungen

$$\Lambda_1 = \Lambda_2 = \frac{F(0)}{F(\Phi)}$$

4.12.3 Normale flächentreue Zylinderabbildung, äquidistant und konform auf dem Äquator

Forderung der Flächentreue:

$$\Lambda_1 \Lambda_2 = 1 \implies$$

$$\begin{aligned} \frac{F(0)}{F(\Phi)} \frac{f'(\Phi)}{\sqrt{F'^2(\Phi) + G'^2(\Phi)}} &= 1 \implies \\ df = \frac{F(\Phi)}{F(0)} \sqrt{F'^2(\Phi) + G'^2(\Phi)} d\Phi & \quad \left. \right] \implies \\ f(0) = 0 & \end{aligned}$$

$$f(\Phi) = \frac{1}{F(0)} \int_0^\Phi F(\Phi') \sqrt{F'^2(\Phi') + G'^2(\Phi')} d\Phi'$$

Abbildungsgleichungen

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(0)\Lambda \\ \frac{1}{F(0)} \int_0^\Phi F(\Phi') \sqrt{F'^2(\Phi') + G'^2(\Phi')} d\Phi' \end{bmatrix}$$

Hauptstreckungen

$$\Lambda_1 = \frac{F(0)}{F(\Phi)}$$

$$\Lambda_2 = \frac{F(\Phi)}{F(0)} = \frac{1}{\Lambda_1}$$

Beispiel:

Torus $S_A^1 \times S_B^1$ "Produktmannigfaltigkeit", $A > B$, $0 < U < 2\pi$, $0 < V < 2\pi$

$$\mathbf{X} = \Phi^{-1}(\mathbf{U}) :$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A + B \cos V) \cos U \\ (A + B \cos V) \sin U \\ B \sin V \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (A + B \cos \Phi) \cos \Lambda \\ (A + B \cos \Phi) \sin \Lambda \\ B \sin \Phi \end{bmatrix}$$

Der *Torus* ist eine Fläche, die durch die *Rotation eines Kreises* vom Radius B um eine Gerade entsteht, welche zur Kreisebene gehört und im Abstand $A > B$ vom Mittelpunkt des Kreises verläuft.

$$F(\Phi) = A + B \cos \Phi$$

$$G(\Phi) = B \sin \Phi$$

$$U = \Lambda = \arctan Y X^{-1}$$

$$V = \Phi = \arctan \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2} - A}$$

Metriktensor

$$\mathbf{G}_\Lambda := \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \Lambda} = -(A + B \cos \Phi) \sin \Lambda \mathbf{E}_1 + (A + B \cos \Phi) \cos \Lambda \mathbf{E}_2$$

$$\mathbf{G}_\Phi := \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \Phi} = -B \sin \Phi \cos \Lambda \mathbf{E}_1 - B \sin \Phi \sin \Lambda \mathbf{E}_2 + B \cos \Phi \mathbf{E}_3$$

$$F'(\Phi) = -B \sin \Phi$$

$$G'(\Phi) = B \cos \Phi$$

$$\langle \mathbf{G}_\Lambda | \mathbf{G}_\Lambda \rangle = F^2(\Phi) = A^2 + 2AB \cos \Phi + B^2 \cos^2 \Phi = G_{11}(\Phi)$$

$$\langle \mathbf{G}_\Phi | \mathbf{G}_\Phi \rangle = F'^2(\Phi) + G'^2(\Phi) = B^2 = G_{22}(\Phi)$$

$$\langle \mathbf{G}_\Lambda | \mathbf{G}_\Phi \rangle = 0$$

$$G_{KL} = \begin{bmatrix} (A + B \cos \Phi)^2 & 0 \\ 0 & B^2 \end{bmatrix}$$

Abbildungsgleichungen

Als „Äquator“ definieren wir die Koordinatenlinie $\Phi = 0$ in der XY -Ebene, d.h. hier

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{\Phi=0} = \begin{bmatrix} (A + B) \cos \Lambda \\ (A + B) \sin \Lambda \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(X^2 + Y^2)|_{\Phi=0} = (A + B)^2$$

$$\sqrt{(X^2 + Y^2)|_{\Phi=0}} = A + B$$

$$F(0) = A + B$$

Damit lauten die Abbildungsgleichungen allgemein

$$x = (A + B)\Lambda, y = f(\Phi)$$

oder

$$\mathbf{x} = \varphi^{-1} \circ \bar{f}(\mathbf{U}) : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A + B)\Lambda \\ f(\Phi) \end{bmatrix}$$

Wir merken an, daß wir als „Äquator“ auch die Koordinatenlinie $\Phi = \pi$ hätten einführen können, woraus $F(\pi) = A - B$ gefolgt wäre.

Schnitt durch einen Torus

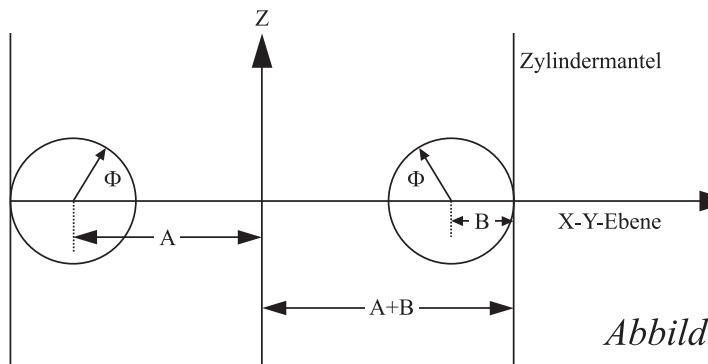


Abbildung 4-22

Deformationstensor

$$\begin{aligned} c_{KL} &= \begin{bmatrix} F^2(0) & 0 \\ 0 & f'^2(\Phi) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (A+B)^2 & 0 \\ 0 & f'^2(\Phi) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Hauptstreckungen

$$\Lambda_1 = \frac{F(0)}{F(\Phi)} = \frac{A+B}{A+B \cos \Phi}$$

$$\Lambda_2 = \frac{f'(\Phi)}{\sqrt{F'^2(\Phi) + G'^2(\Phi)}} = \frac{f'(\Phi)}{B}$$

zu 4.12.1: Normale Zylinderabbildung, äquidistant auf dem Äquator und der Schar der Parallelkreise

$$f(\Phi) = \int_0^\Phi B \, d\Phi' = B\Phi$$

Abbildungsgleichungen

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A+B)\Lambda \\ B\Phi \end{bmatrix}$$

zu 4.12.2: Normale konforme Zylinderabbildung, äquidistant auf dem Äquator

$$\begin{aligned} f(\Phi) &= (A+B) \int_0^\Phi \frac{B}{A+B \cos \Phi'} \, d\Phi' \\ &= (A+B) \int_0^\Phi \frac{d\Phi'}{AB^{-1} + \cos \Phi'} \end{aligned}$$

törüs, -i m (et. umstritten) 1.(vkl., nkl.) **a)** Wulst, zusammengedrehter Strick; **b)** f -i et iubae wuchtige Darstellung. 2. **a)** Schleife am Kranz; **b)** Muskel [lacertorum tori, athletarum, comantes tori mähniger Hals des Löwen]; *bsd.* Wamme des Stieres; **c)** (dcht., nkl) Böschung [riparum tori]. 3 . (dcht., nkl) **a)** Polster, gepolstertes Lager [-lecto impositus]; **b)** Sofa, Bett [torum sternere, in toro cubare]; **c)** Ehebett [genialis]; consors od. socia tori Ehefrau; *meton.* Ehe, Liebe, Liebschaft [sacra tori Hochzeitsfest]; **d)** Totenbett, Bahre [toros exstruere].

$$\int \frac{dx}{a + b \cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arc tan} \frac{\tan \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - b^2}}{a + b} \quad \forall a^2 > b^2$$

$$f(\Phi) = (A + B)B \frac{2}{\sqrt{A^2 - B^2}} \operatorname{arc tan} \frac{\tan \frac{\Phi'}{2} \sqrt{A^2 - B^2}}{A + B} \Big|_0^\Phi \Rightarrow$$

$$f(\Phi) = \frac{2B(A + B)}{\sqrt{A^2 - B^2}} \operatorname{arc tan} \frac{\tan \frac{\Phi}{2} \sqrt{A^2 - B^2}}{A + B}$$

Abbildungsgleichungen

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A + B)\Lambda \\ \frac{2B(A + B)}{\sqrt{A^2 - B^2}} \operatorname{arc tan} \frac{\sqrt{A^2 - B^2} \tan \frac{\Phi}{2}}{A + B} \end{bmatrix}$$

Hauptstreckungen

$$\Lambda_1 = \Lambda_2 = \frac{F(0)}{F(\Phi)} = \frac{A + B}{A + B \cos \Phi}$$

zu 4.12.3: Normale flächentreue Zylinderabbildung, äquidistant auf dem Äquator

$$\begin{aligned}
f(\Phi) &= \frac{B}{A+B} \int_0^\Phi (A + B \cos \Phi') d\Phi' \\
&= \frac{AB}{A+B} \int_0^\Phi d\Phi' + \frac{B^2}{A+B} \int_0^\Phi \cos \Phi' d\Phi' \\
&= \frac{AB}{A+B} \Phi + \frac{B^2}{A+B} \sin \Phi
\end{aligned}$$

Abbildungsgleichungen

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A+B)\Lambda \\ \frac{AB}{A+B}\Phi + \frac{B^2}{A+B} \sin \Phi \end{bmatrix}$$

Hauptstreckungen

$$\Lambda_1 = \frac{F(0)}{F(\Phi)} = \frac{A+B}{A+B \cos \Phi}$$

$$\Lambda_2 = \frac{1}{\Lambda_1} = \frac{A+B \cos \Phi}{A+B}$$

Diese Seite ist absichtlich leer

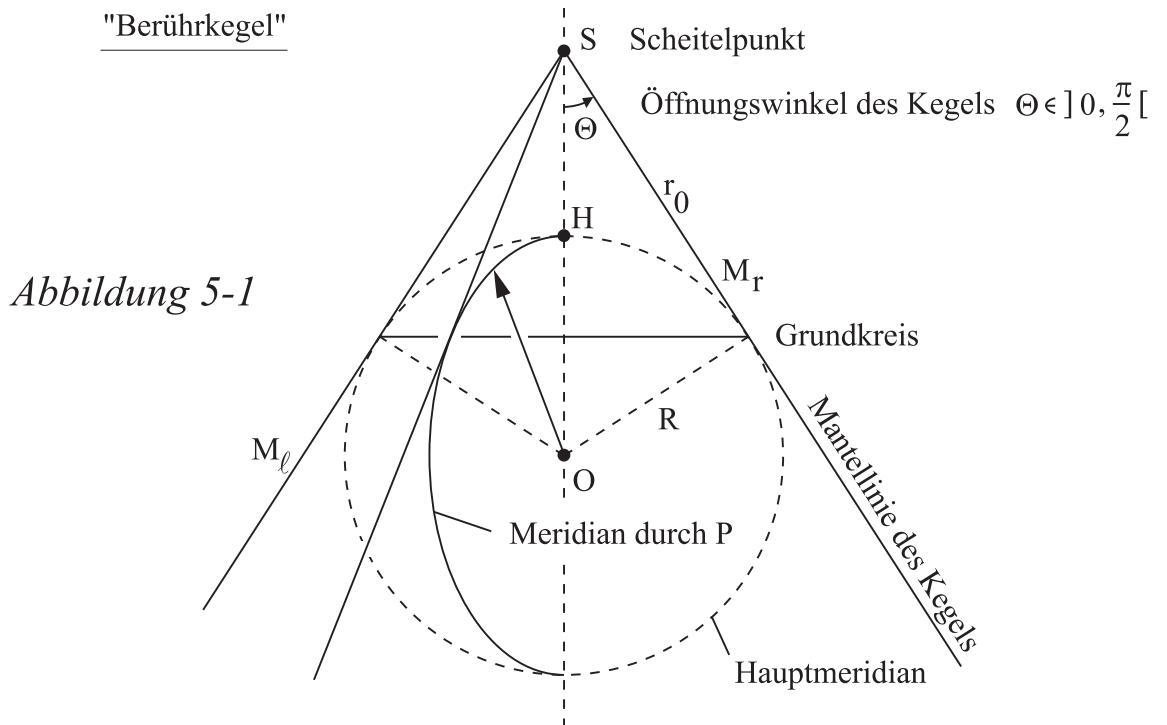
5 Kegelabbildungen

- 5.1 Allgemeine Abbildungsgleichungen und Verzerrungsmaße für Kegelabbildungen der Kugel
 - 5.1.1 Abbildungsgesetz für die Länge Λ
 - 5.1.2 Abbildungsgesetz für die Breite Φ
- 5.2 Spezielle Kegelabbildungen der Kugel
 - 5.2.1 Kegelabbildungen vom Typ äquidistant auf der Schar der Parallelkreise
 - 5.2.1.1 Variante vom Typ äquidistant und konform auf dem Grundkreis
 - 5.2.1.2 Variante vom Typ punktartiges Bild des Hauptpunktes, äquidistant und konform auf einem Parallelkreis
 - 5.2.1.3 Variante vom Typ äquidistant und konform auf zwei Parallelkreisen
 - 5.2.2 Konforme Kegelabbildungen
 - 5.2.2.1 Variante vom Typ äquidistant auf dem Grundkreis
 - 5.2.2.2 Variante vom Typ äquidistant auf zwei Parallelkreisen (Lambert konforme Kegelabbildung)
 - 5.2.3 Flächentreue Kegelabbildungen
 - 5.2.3.1 Variante vom Typ äquidistant und konform auf dem Grundkreis
 - 5.2.3.2 Variante vom Typ punktartiges Bild des Hauptpunktes, äquidistant und konform auf einem Parallelkreis
 - 5.2.3.3 Variante vom Typ äquidistant und konform auf zwei Parallelkreisen (Albers flächentreue Kegelabbildung)
- 5.3 Allgemeine Abbildungsgleichungen und Verzerrungsmaße für Kegelabbildungen des Rotationsellipsoides
- 5.4 Spezielle Kegelabbildungen des Rotationsellipsoides
 - 5.4.1 Kegelabbildungen vom Typ äquidistant auf der Schar der Parallelkreise
 - 5.4.2 Konforme Kegelabbildungen
 - 5.4.2.1 Variante vom Typ äquidistant auf dem Grundkreis
 - 5.4.2.2 Variante vom Typ äquidistant auf zwei Parallelkreisen (Lambert konforme Kegelabbildung)
 - 5.4.3 Flächentreue Kegelabbildungen
 - 5.4.3.1 Variante vom Typ äquidistant und konform auf dem Grundkreis
 - 5.4.3.2 Variante vom Typ punktartiges Bild des Hauptpunktes, äquidistant und konform auf einem Parallelkreis

- 5.4.3.3 Variante vom Typ äquidistant und konform auf zwei Parallelkreisen (Albers flächentreue Kegelabbildung)
- 5.5 Allgemeine Abbildungsgleichungen und Verzerrungsmaße für pseudo-konische Abbildungen der Kugel
- 5.6 Spezielle Abbildungsgleichungen für pseudo-konische Abbildungen der Kugel
 - 5.6.1 Stab-Werner Abbildung
 - 5.6.2 Bonne Abbildung

5.1 Allgemeine Abbildungsgleichungen und Verzerrungsmaße für Kegelabbildungen der Kugel

In normaler Lage sind die Kegelabbildungen besonders geeignet für die Darstellung von *Gebieten mittlerer Breite*.

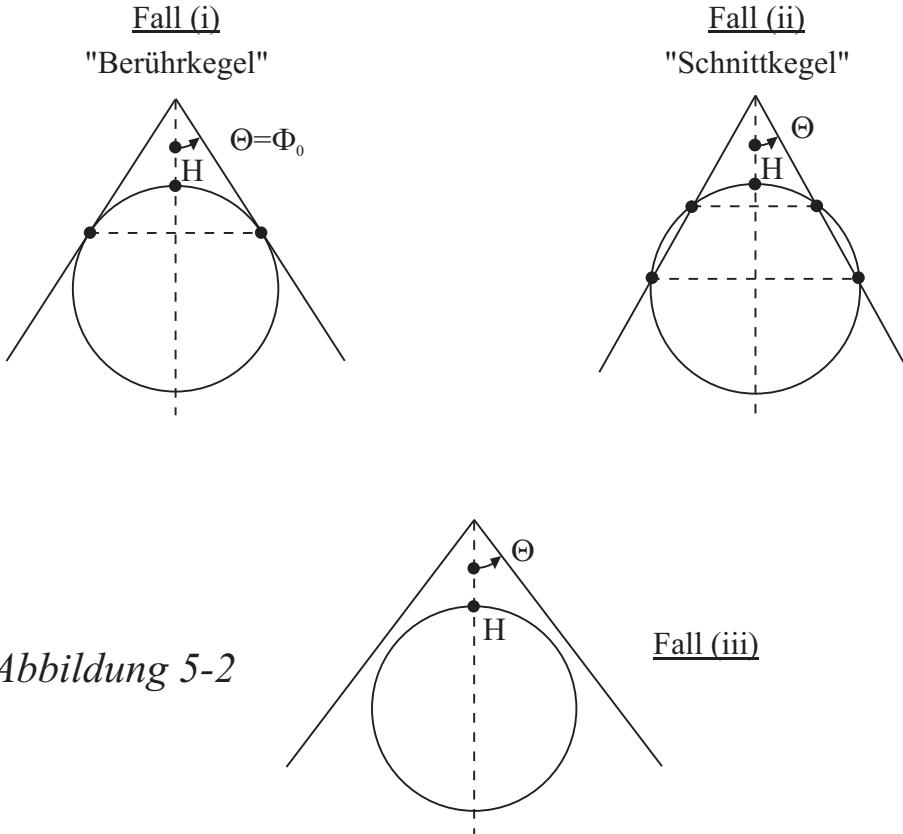


Charakteristische Eigenschaften der Kegelabbildungen:

Meridiane (Hauptkreise bei schiefachsiger Lage) werden als *Gerade* abgebildet, die sich in einem Punkt, dem Scheitelpunkt des Kegels, schneiden.

Parallelkreise werden auf *Stücke konzentrischer Kreise* mit dem Scheitelpunkt S als Mittelpunkt abgebildet.

Außer der *berührenden Lage* (Skizze) des Kegels gibt es den *Schnittkegel* (Schnitt der Kugel in zwei Parallelkreisen) oder den Fall, daß Kegel und Kugel *einen leeren Durchschnitt* haben, aber die Abbildung ist so konstruktiv, daß sie eine Interpretation der gegenseitigen Lage zuläßt.



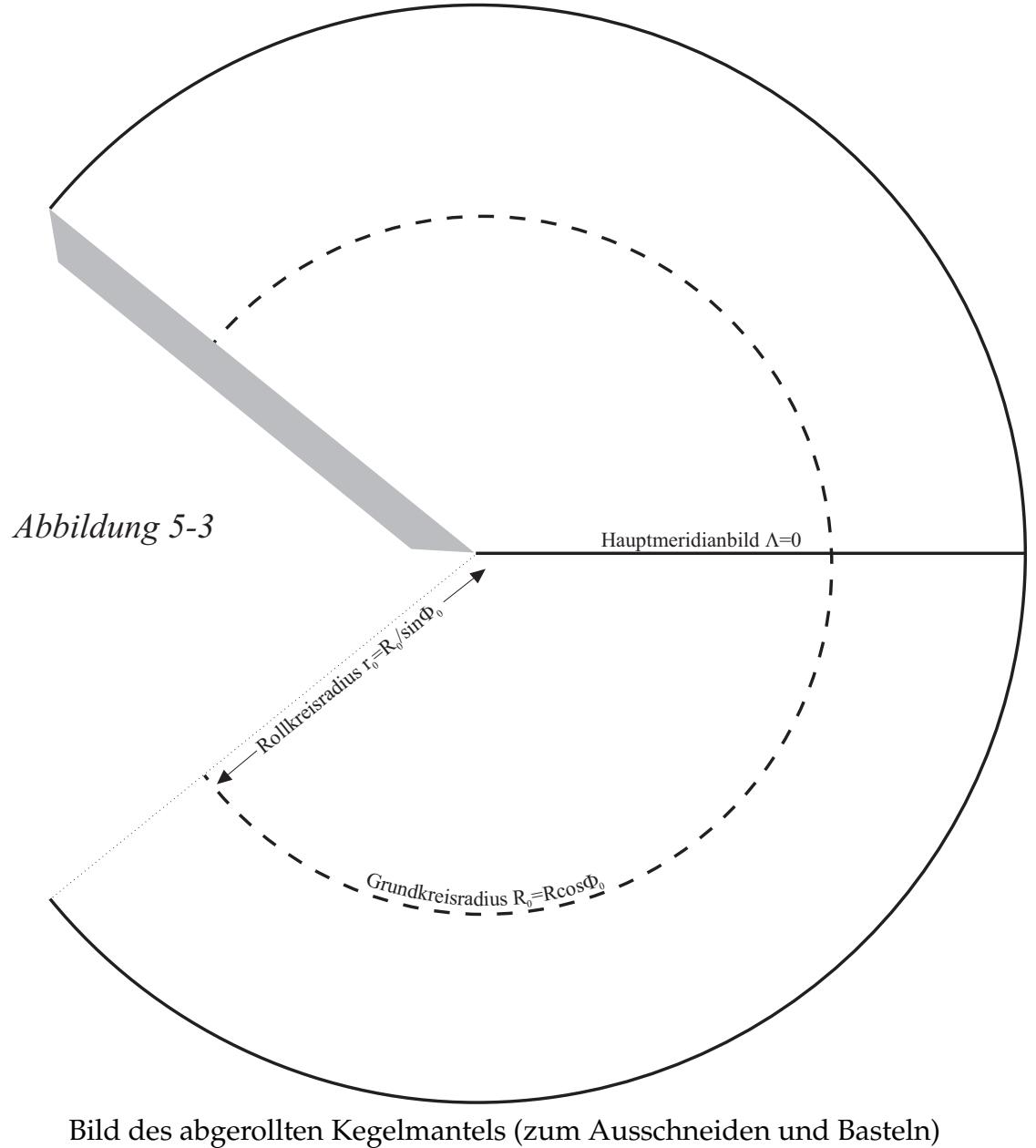
Konstruktionsprinzipien

Die Kegelachse fällt mit der Geraden durch den Hauptpunkt H und den Mittelpunkt O der Kugel zusammen.

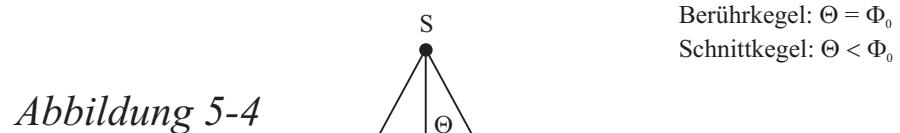
- (i) Abgebildet wird ein Punkt auf die in seiner Meridianebene liegende Mantellinie nach einer Abbildungsvorschrift, die bei gleicher Breite dem Bildpunkt p gleichen Abstand vom Scheitel zuordnet.
- (ii) Der Kegel wird längs der Mantellinie, die der Mantellinie $M_\ell S$ des Hauptmeridians diametral gegenüberliegt - in unserer Skizze $M_r S$ - aufgeschnitten und in der Ebene abgerollt und zwar von unten her.

Definition (Grundkreis, Circle of Contact):

Der *Grundkreis* ist derjenige Parallelkreis, der den Kegel berührt. Falls der Kegel nicht in der berührenden Lage vorliegt, wird er entlang der Kegelachse durch den Punkt H und den Mittelpunkt O der Kugel in die berührende Lage verschoben. Φ_0 heißt *Breite des Grundkreises* vom Radius $R_0 = R \cos \Phi_0$. Der Radius $r_0 = R_0 / \sin \Phi_0 = R \cot \Phi_0$ heißt *Rollkreisradius* oder *Grundkreisradius*.



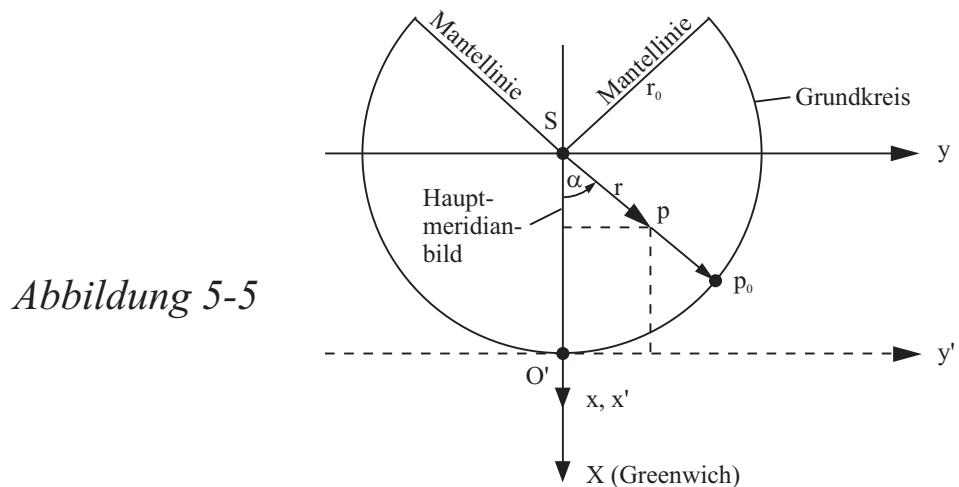
Diese Seite ist absichtlich leer



Die nachfolgende Skizze stellt den längs der Mantellinie aufgeschnittenen und in die Ebene abgerollten Projektionskegel dar.

$$x = r \cos \alpha, \quad x' = -r_0 + r \cos \alpha$$

$$y = r \sin \alpha, \quad y' = r \sin \alpha$$



5.1.1 Abbildungsgesetz für die Länge Λ

Der Winkel α des Bildpunktes p soll nur von der Länge Λ des Urbildpunktes P abhängen. Insbesondere müssen beim Abrollen des Kegels entsprechende Stücke auf dem Grundkreis und seinem Rollkreis gleich sein:

$$\begin{aligned} R_0 \Lambda &= r_0 \alpha \\ R_0 &= R \cos \Phi_0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad R \Lambda \cos \Phi_0 = r_0 \alpha = R_0 \frac{\alpha}{\sin \Phi_0} = R \frac{\cos \Phi_0}{\sin \Phi_0} \alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = \sin \Phi_0 \Lambda}$$

$\boxed{\sin \Phi_0 =: n}$ Projektionskonstante

$0 < n < 1$: $n = 1$: azimutale Abbildung: $\Phi_0 = \frac{\pi}{2}$

$n = 0$: Zylinderabbildung

5.1.2 Abbildungsgesetz für die Breite Φ

Der Bildradius r soll nur von der Breite Φ abhängen, d.h. $r = f(\frac{\pi}{2} - \Phi) = f(\Delta)$

Allgemeiner Abbildungsansatz

$$\mathbf{u} = \bar{f}(\mathbf{U}) : \begin{bmatrix} \alpha \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n\Lambda \\ f(\Delta) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \Lambda \\ \frac{\pi}{2} - \Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda \\ \Delta \end{bmatrix}$$

Karte Φ : sphärische Koordinaten

$$\mathbf{X} = \Phi^{-1}(\mathbf{U}) : \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} \cos \Lambda \cos \Phi \\ \sin \Lambda \cos \Phi \\ \sin \Phi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \Lambda \\ \frac{\pi}{2} - \Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda \\ \Delta \end{bmatrix}$$

Karte Φ für den Hauptpunkt nicht brauchbar !

Metrikensor des Urbildes

$$(G_{KL}) = \begin{bmatrix} R^2 \cos^2 \Phi & 0 \\ 0 & R^2 \end{bmatrix}$$

Karte φ : Polarkoordination

$$\mathbf{x} = \varphi^{-1}(\mathbf{u}) : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_0 + r \cos \alpha \\ r \sin \alpha \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \alpha \\ r \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial x^i}{\partial u^k} = \begin{bmatrix} -r \sin \alpha & +\cos \alpha \\ +r \cos \alpha & +\sin \alpha \end{bmatrix}$$

Metriktensor des Bildes

$$(g_{kl}) = \begin{bmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^2(\Delta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Deformationstensor

$$c_{KL} = g_{kl}(\mathbf{u} = \bar{f}(\mathbf{U})) \frac{\partial u^k}{\partial U^k} \cdot \frac{\partial u^l}{\partial U^L} = \begin{bmatrix} n^2 f^2(\Delta) & 0 \\ 0 & f'^2(\Delta) \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial u^k}{\partial U^K} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial \Lambda} & \frac{\partial \alpha}{\partial \Delta} \\ \frac{\partial r}{\partial \Lambda} & \frac{\partial r}{\partial \Delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & f'(\Delta) \end{bmatrix}$$

Hauptstreckungen

$$\Lambda_1 = \sqrt{c_{11}/G_{11}} = \frac{nf(\Delta)}{R \sin \Delta}$$

Streckung in Richtung des *Parallelkreises*
 $\Phi = \text{const. oder } \Delta = \text{const.}$

$$\Lambda_2 = \sqrt{c_{22}/G_{22}} = \frac{f'(\Delta)}{R}$$

Streckung in Richtung des *Meridians*
 $\Lambda = \text{const.}$

Parametrisierung des Drehkegels

$$\mathbf{x} = av \cos u \mathbf{e}_1 + bv \sin u \mathbf{e}_2 + cv \mathbf{e}_3$$

(u, v) Flächenparameter, C. F. Gauß (1825)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad \forall a = b \iff$$

$$x^2 + y^2 - \tan^2 \Phi_0 z^2 = 0, \quad \Phi_0 \quad \text{Öffnungswinkel}$$

$$\tan \Phi_0 = \frac{a}{c}$$

alternative Parametrisierung als Funktion des Öffnungswinkels

$$\mathbf{x} = c \sin \Phi_0 v \cos u \mathbf{e}_1 + c \sin \Phi_0 v \sin u \mathbf{e}_2 + c \cos \Phi_0 v \mathbf{e}_3$$

5.2 Spezielle Kegelabbildungen der Kugel

5.2.1 Kegelabbildungen vom Typ äquidistant auf der Schar der Parallelkreise

allgemeine Abbildungsgleichungen

$$\left. \begin{array}{l} \Lambda_2 = 1 \\ \Lambda_2 = \frac{f'(\Delta)}{R} \end{array} \right] \Rightarrow f'(\Delta) = R \Rightarrow f(\Delta) = R\Delta + c = R\frac{\pi}{2} - R\Phi + c$$

$$\left[\begin{array}{l} \alpha \\ r \end{array} \right] = \left[\begin{array}{l} n\Lambda \\ R\Delta + c \end{array} \right] = \left[\begin{array}{l} n\Lambda \\ R(\frac{\pi}{2} - \Phi) + c \end{array} \right]$$

$$\Lambda_1 = \frac{n(R\Delta + c)}{R \sin \Delta} = \frac{n[R(\frac{\pi}{2} - \Phi) + c]}{R \cos \Phi}, \quad \Lambda_2 = 1$$

Die nachfolgenden Varianten unterscheiden sich nur in der Festlegung der Integrationskonstanten c . Im allgemeinen wird der *Hauptpunkt* H (Nordpol) *nicht* auf einen Punkt abgebildet, sondern auf ein Kreisstück.

Die Forderung $c = 0$ ist äquivalent mit derjenigen der *punktartigen Abbildung* des Hauptpunktes H (Nordpol).

5.2.1.1 Variante vom Typ äquidistant und konform auf dem Grundkreis

Grundkreis $\Phi = \Phi_0, \Phi_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$ frei wählbar

Postulat: Äquidistanz auf dem Grundkreis Φ_0

$$\left. \begin{array}{l} R\Lambda \sin \Delta_0 = R\Lambda \cos \Phi_0 = r(\Delta_0)\alpha \\ r(\Delta_0) = R\Delta_0 + c \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$c = R(n^{-1} \sin \Delta_0 - \Delta_0) = R(\tan \Delta_0 - \Delta_0) \implies$$

Abbildungsgleichungen

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n\Lambda \\ R(\Delta + \tan \Delta_0 - \Delta_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda \sin \Phi_0 \\ R(\Phi_0 - \Phi + \cot \Phi_0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(\Phi_0 - \Phi + \cot \Phi_0) \cos(\Lambda \sin \Phi_0) \\ R(\Phi_0 - \Phi + \cot \Phi_0) \sin(\Lambda \sin \Phi_0) \end{bmatrix}$$

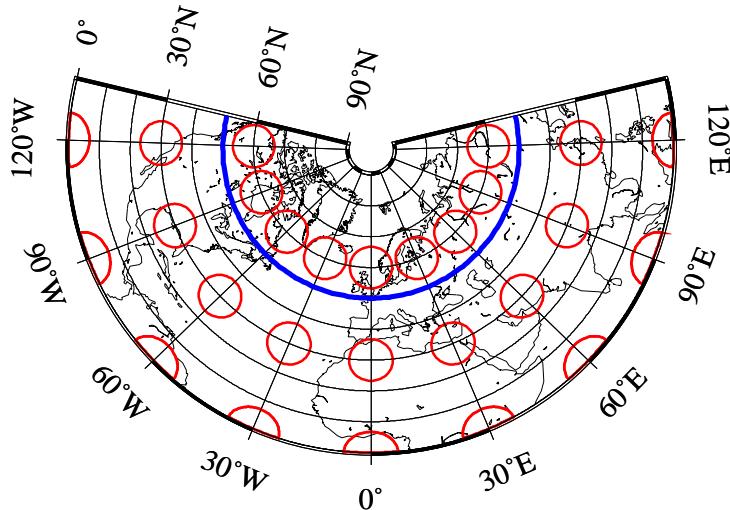
Hauptstreckungen

$$\Lambda_1 = \frac{n(\Delta + \tan \Delta_0 - \Delta_0)}{\sin \Delta} = \frac{\sin \Phi_0 (\Phi_0 - \Phi + \cot \Phi_0)}{\cos \Phi}$$

$$\Lambda_2 = 1$$

Grundkreis: $\Delta = \Delta_0$ oder $\Phi = \Phi_0$

$\Lambda_1 = \Lambda_2 = 1$ (Äquidistanz und Konformität auf dem Grundkreis)



GMT | 2002 Jan 10 15:15:21 | pscoast -JD-0/90/50/50.000000001/0.1cm -R-135/135/0/90 -B30g30Sn/30g10We -Dc -A1000 -G255 -W0.25p -P -K -U/-4/-2/c -X5 -Y18

C. Ptolemäus (85-150 n. Chr.)

Abbildung 5-6: Äquidistanter Kegelentwurf auf einem Berührkegel, $\Delta_0 = 40^\circ$, $\Phi_0 = 50^\circ$

5.2.1.2 Variante vom Typ punktartiges Bild des Hauptpunktes, äquidistant und konform auf einem Parallelkreis

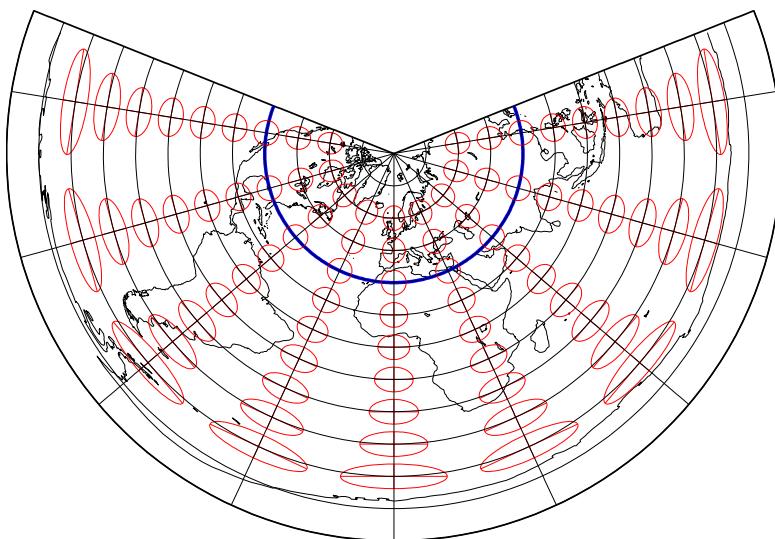


Abbildung 5-7: Äquidistanter Kegelentwurf mit dem Hauptpunkt als Punkt, $\Phi_1 = 50^\circ$

Die Projektionskonstante ist durch Φ_1 vorgegeben.

Erstes Postulat: Das Bild des Hauptpunktes H ist ein Punkt: $\Rightarrow c = 0$.

Zweites Postulat: Äquidistanz auf dem Parallelkreis $\Phi = \Phi_1$:

$$\begin{aligned} R\Lambda \cos \Phi_1 &= R\left(\frac{\pi}{2} - \Phi_1\right)\alpha & \Rightarrow \\ c = 0 & & \\ R\Lambda \cos \Phi_1 &= R\left(\frac{\pi}{2} - \Phi_1\right)n\Lambda \Rightarrow n = \frac{\cos \Phi_1}{\frac{\pi}{2} - \Phi_1} & \Rightarrow \end{aligned}$$

Abbildungsgleichungen

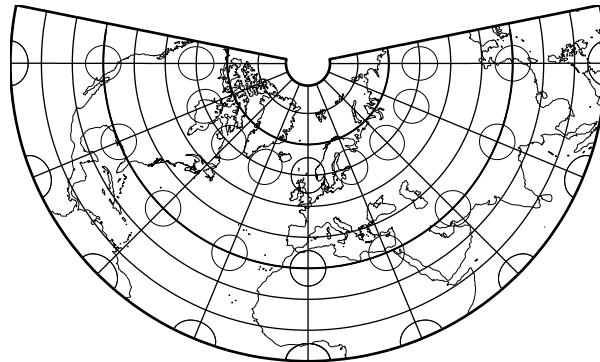
$$\begin{bmatrix} \alpha \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\cos \Phi_1}{\frac{\pi}{2} - \Phi_1}\Lambda \\ R\left(\frac{\pi}{2} - \Phi\right) \end{bmatrix}$$

$$x = R\left(\frac{\pi}{2} - \Phi\right) \cos[\Lambda \cos \Phi_1 / (\frac{\pi}{2} - \Phi_1)]$$

$$y = R\left(\frac{\pi}{2} - \Phi\right) \sin[\Lambda \cos \Phi_1 / (\frac{\pi}{2} - \Phi_1)]$$

Hauptstreckungen: $\Lambda_1 = \frac{\cos \Phi}{\cos \Phi_1} \frac{\frac{\pi}{2} - \Phi_1}{\frac{\pi}{2} - \Phi}, \quad \Lambda_2 = 1$

5.2.1.3 Variante vom Typ äquidistant und konform auf zwei Parallelkreisen



Französischer Astronom J.N. de l'Isle, de l'Isle Projektion, 1745

Abbildung 5-8: Äquidistanter Kegelentwurf auf zwei Parallelkreisen $\Phi_1 = 30^\circ, \Phi_2 = 70^\circ$

Postulat: Äquidistanz auf den Parallelkreisen Φ_1, Φ_2

$$R\Lambda \cos \Phi_1 = R\left(\frac{\pi}{2} - \Phi_1\right)\alpha$$

$$R\Lambda \cos \Phi_2 = R\left(\frac{\pi}{2} - \Phi_2\right)\alpha$$

$$\begin{aligned} R\Lambda \cos \Phi_i &= [R\left(\frac{\pi}{2} - \Phi_i\right) + c]n\Lambda \implies c = \frac{R}{n}[\cos \Phi_i - n\left(\frac{\pi}{2} - \Phi_i\right)] \\ &\implies \cos \Phi_1 - n\left(\frac{\pi}{2} - \Phi_1\right) = \cos \Phi_2 - n\left(\frac{\pi}{2} - \Phi_2\right) \implies \\ &n = \frac{\cos \Phi_1 - \cos \Phi_2}{\Phi_2 - \Phi_1} \implies \\ &c = R \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \Phi_1\right) \cos \Phi_2 - \left(\frac{\pi}{2} - \Phi_2\right) \cos \Phi_1}{\cos \Phi_1 - \cos \Phi_2} \end{aligned}$$

Abbildungsgleichungen

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\cos \Phi_1 - \cos \Phi_2}{\Phi_2 - \Phi_1} \Lambda \\ R \left((\frac{\pi}{2} - \Phi) + \frac{(\frac{\pi}{2} - \Phi_1) \cos \Phi_2 - (\frac{\pi}{2} - \Phi_2) \cos \Phi_1}{\cos \Phi_1 - \cos \Phi_2} \right) \end{bmatrix}$$

Hauptstreckungen

$$\Lambda_1 = \frac{(\frac{\pi}{2} - \Phi)(\cos \Phi_1 - \cos \Phi_2) + (\frac{\pi}{2} - \Phi_1) \cos \Phi_2 - (\frac{\pi}{2} - \Phi_2) \cos \Phi_1}{(\Phi_2 - \Phi_1) \cos \Phi}, \quad \Lambda_2 = 1$$

$$\sin \Phi_0 = n = \frac{\cos \Phi_1 - \cos \Phi_2}{\Phi_2 - \Phi_1}, \quad \Phi_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$$

Parallelkreise

$\Phi_1, \Phi_2: \Lambda_1 = \Lambda_2 = 1$ d.h. konform und äquidistant

5.2.2 Konforme Kegelabbildungen

Postulat der Konformität:

$$\begin{aligned} \Lambda_1 = \Lambda_2 &\Rightarrow \\ \frac{nf(\Delta)}{R \sin \Delta} = \frac{f'(\Delta)}{R} &\Rightarrow \frac{f'}{f} = \frac{n}{\sin \Delta} \Rightarrow \\ \int \frac{df}{f} = n \int \frac{d\Delta}{\sin \Delta} &\Rightarrow \ln f = n \ln \tan \frac{\Delta}{2} + \ln c \Rightarrow \\ r = f(\Delta) = c \left(\tan \frac{\Delta}{2} \right)^n &\Rightarrow f' = \frac{nf}{\sin \Delta} = cn \frac{\left(\tan \frac{\Delta}{2} \right)^n}{\sin \Delta} \Rightarrow \end{aligned}$$

Allgemeine Abbildungsgleichungen

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n\Lambda \\ c \left(\tan \frac{\Delta}{2} \right)^n \end{bmatrix}$$

Hauptstreckungen

$$\Lambda_1 = \Lambda_2 = \frac{cn(\tan \frac{\Delta}{2})^n}{R \sin \Delta} \quad \text{Konformität}$$

1. Fall

$$\Delta := 0: r = f(0) = 0$$

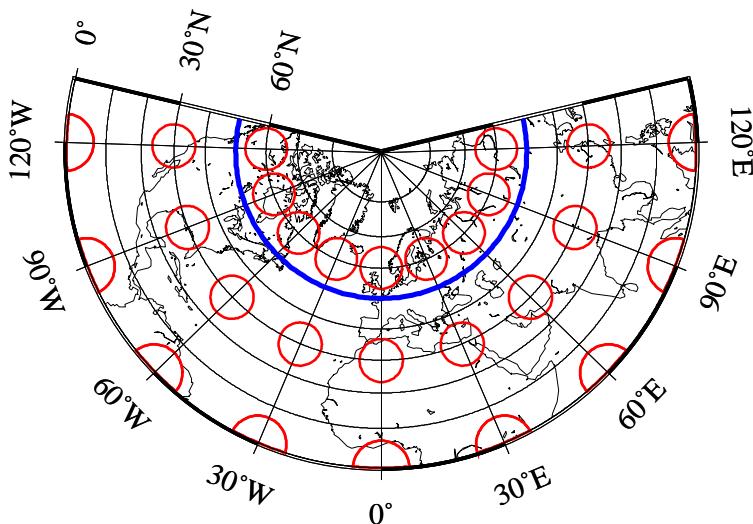
“der Hauptpunkt H wird *immer* auf einen Punkt abgebildet”

2. Fall

$$\Delta := \frac{\pi}{2}: r = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = c$$

“der Hauptparallelkreis $\Delta = \frac{\pi}{2}$ wird *immer* auf einen Kreis mit dem Radius c abgebildet”

5.2.2.1 Variante vom Typ äquidistant auf dem Grundkreis



GMT 2002 Jan 10 14:50:41 pscoast -Jl-0/90/50/50.000001/0.0005cm -R-135/135/0/89.9 -B30g30Sn/30g10We -Dc -A1000 -G255 -W0.25p -P -K -U/-4/-2/c -X5 -Y18

Abbildung 5-9: Konformer Kegelentwurf, äquidistant auf dem Grundkreis $\Phi_0 = 50^\circ$

Die Projektionskonstante $n = \sin \Phi_0$ ist durch Φ_0 vorgegeben !

Postulat: Äquidistanz auf dem Grundkreis Φ_0

$$R \cos \Phi_0 \Lambda = r(\Delta_0) \alpha = \left(c \left(\tan \frac{\Delta_0}{2} \right)^n \right) n \Lambda \implies$$

$$c = \frac{R \sin \Delta_0}{n \left(\tan \frac{\Delta_0}{2} \right)^n} = \frac{R \sin \Delta_0}{\cos \Delta_0 \left(\tan \frac{\Delta_0}{2} \right)^n} = \frac{R \tan \Delta_0}{\left(\tan \frac{\Delta_0}{2} \right)^n} \implies$$

Abbildungsgleichungen

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \Lambda \\ R \tan \Delta_0 \left(\frac{\tan \frac{\Delta}{2}}{\tan \frac{\Delta_0}{2}} \right)^n \end{bmatrix}$$

Hauptstreckungen

$$\Lambda_1 = \Lambda_2 = \frac{\sin \Delta_0}{\sin \Delta} \left(\frac{\tan \frac{\Delta}{2}}{\tan \frac{\Delta_0}{2}} \right)^n$$

$\Delta := \Delta_0$: $\Lambda_1 = \Lambda_2 = 1$: Äquidistanz auf dem Grundkreis

5.2.2.2 Variante vom Typ äquidistant auf zwei Parallelkreisen (J.H. Lambert, 1772 konforme Kegelabbildung)

Grundlegende Idee ist, die Projektionskonstante n durch die Äquidistanz der Abbildung auf den beiden Parallelkreisen $\Delta_1 = 90^\circ - \Phi_1$, $\Delta_2 = 90^\circ - \Phi_2$ festzulegen.

Postulat: Äquidistanz auf den Parallelkreisen Δ_1, Δ_2 , $\Lambda_1(\Delta_1) = \Lambda_1(\Delta_2) = 1$

siehe allgemeine Struktur der Hauptstreckungen unter 5.2.2 \implies

$$\frac{\left(\tan \frac{\Delta_1}{2} \right)^n}{\sin \Delta_1} = \frac{\left(\tan \frac{\Delta_2}{2} \right)^n}{\sin \Delta_2} \implies$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\tan \frac{\Delta_1}{2}}{\tan \frac{\Delta_2}{2}} \right)^n &= \frac{\sin \Delta_1}{\sin \Delta_2} \implies \\
n \left(\ln \tan \frac{\Delta_1}{2} - \ln \tan \frac{\Delta_2}{2} \right) &= \ln \sin \Delta_1 - \ln \sin \Delta_2 \\
\implies n &= \frac{\ln \sin \Delta_1 - \ln \sin \Delta_2}{\ln \tan \frac{\Delta_1}{2} - \ln \tan \frac{\Delta_2}{2}} \implies
\end{aligned}$$

$$n = \frac{\ln \frac{\sin \Delta_1}{\sin \Delta_2}}{\ln \frac{\tan \frac{\Delta_1}{2}}{\tan \frac{\Delta_2}{2}}} = \frac{\ln \frac{\cos \Phi_1}{\cos \Phi_2}}{\ln \frac{\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi_1}{2})}{\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi_2}{2})}
}$$

Die Projektionskonstante $n = \sin \Phi_0 = n(\Phi_1, \Phi_2)$ ist eine Funktion der Breiten Φ_1 und Φ_2 , in denen die Abbildung wegen

$$\Lambda_1(\Phi_1) = \Lambda_2(\Phi_1) = 1$$

äquidistant und konform ist.

Abbildungsgleichungen

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n\Lambda \\ R \frac{\cos \Phi_1}{n} \left(\frac{\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi_1}{2})}{\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi_1}{2})} \right)^n \end{bmatrix}$$

Beweis:

Auf der Basis der Äquidistanz der Abbildung des Parallelkreises Φ_1 ist nach 5.2.2.1

$$\begin{aligned}
(R \cos \Phi_1) \Lambda &= r(\Delta_1) \alpha = \left(c \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi_1}{2} \right)^n \right) n \Lambda \implies \\
c &= \frac{R \cos \Phi_1}{n [\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi_1}{2})]^n} = R \frac{\cos \Phi_1}{n} \frac{1}{[\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi_1}{2})]^n} .
\end{aligned}$$

Die allgemeine Abbildungsgleichung für die konforme Kegelabbildung lautet

$$r = c[\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi}{2})]^n,$$

in die wir $c(n, \Phi_1)$ einsetzen !

Abbildungsgleichungen

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n\Lambda \\ R \frac{\cos \Phi_2}{n} \left(\frac{\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi}{2})}{\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi_2}{2})} \right)^n \end{bmatrix}$$

Beweis:

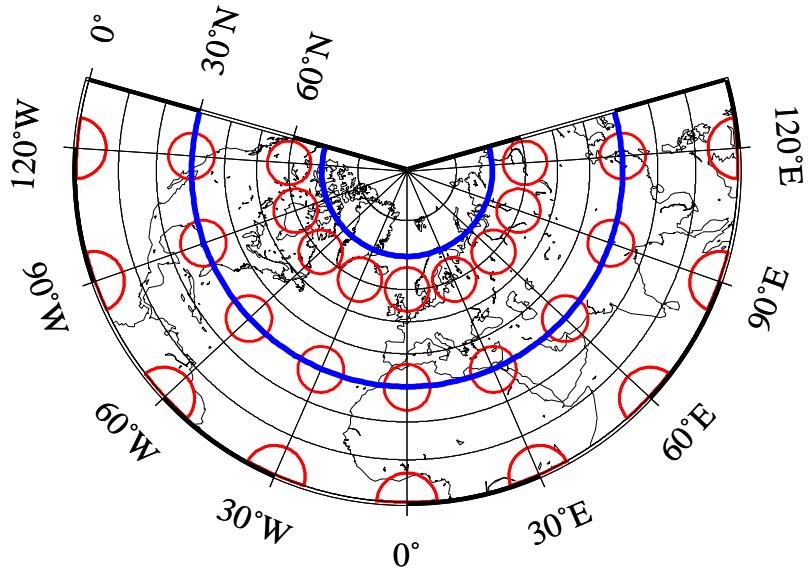
wie oben, ersetze Φ_1 durch Φ_2

Die Abbildungsgleichungen nehmen die cartesische Form für $x = r \cos \alpha$, $y = r \sin \alpha$ an !

Inverse Abbildungsgleichungen

$$\alpha = \arctan \frac{y}{x}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\begin{aligned} \Lambda &= \frac{1}{n}\alpha \\ \Phi &= \frac{\pi}{2} - 2 \arctan \left\{ \left[\frac{r}{R} \frac{n(\Phi_1, \Phi_2)}{\cos \Phi_1} \right] \frac{1}{n} \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi_1}{2} \right) \right\} \end{aligned}$$



GMT 2002 Jan 10 14:51:12 pscoast -JI-0/90/30/70/0.0005cm -R-135/135/0/89.9 -B30g30Sn/30g10We -Dc -A1000 -G255 -W0.25p -P -K -Uc -X5 -Y18

Abbildung 5-10: Konformer Kegelentwurf, äquidistant auf zwei Parallelkreisen $\Phi_1 = 30^\circ$, $\Phi_2 = 70^\circ$

Anwendung:

Bundesrepublik Deutschland 1:1.000.000, Normalausgabe, Hrsg. IFAG, Ausgabe 1991, $\Phi_1 = 48^\circ 40'$, $\Phi_2 = 52^\circ 40'$

Weltluftfahrtkarte 1:1.000.000, Luftfahrtkarten 1:500.000, Internationale Weltkarte 1:1.000.000

z.B. 48 Staaten der USA: $\Phi_1 = 33^\circ$, $\Phi_2 = 45^\circ$

z.B. Hawaii: $\Phi_1 = 20^\circ 40'$, $\Phi_2 = 23^\circ 20'$

Hauptstreckungen

$$\Lambda_1 = \Lambda_2 = \frac{\cos \Phi_1}{\cos \Phi} \left(\frac{\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi}{2})}{\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi_1}{2})} \right)^n = \frac{\cos \Phi_2}{\cos \Phi} \left(\frac{\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi}{2})}{\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi_2}{2})} \right)^n$$

5.2.3 Flächentreue Kegelabbildungen

Postulat der Flächentreue:

$$\begin{aligned}\Lambda_1 \Lambda_2 &= 1 \implies \\ \frac{nf(\Delta)}{R \sin \Delta} \frac{f'(\Delta)}{R} &= 1 \implies f f' = \frac{R^2}{n} \sin \Delta \implies \\ \int f df &= \int \frac{R^2}{n} \sin \Delta d\Delta \implies \frac{1}{2} f^2 = -\frac{R^2}{n} \cos \Delta + \frac{1}{2} c \implies \\ r = f(\Delta) &= \left(-2 \frac{R^2}{n} \cos \Delta + c \right)^{\frac{1}{2}} \implies \\ f'(\Delta) &= \frac{R^2}{n} \sin \Delta \frac{1}{f} = \frac{R^2}{n} \sin \Delta \left(-2 \frac{R^2}{n} \cos \Delta + c \right)^{-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Die Wurzel soll *reell* sein:

$$-2 \frac{R^2}{n} \cos \Delta + c \geq 0 ; \cos \Delta \leq 1 \implies c \geq 2 \frac{R^2}{n}$$

$$\underline{\Delta := \pi/2: r = f(\frac{\pi}{2}) = \sqrt{c}}$$

“Die Integrationskonstante c legt den Bildkreisradius des Hauptparallelkreises $\Delta = \pi/2$ fest.”

Allgemeine Abbildungsgleichungen

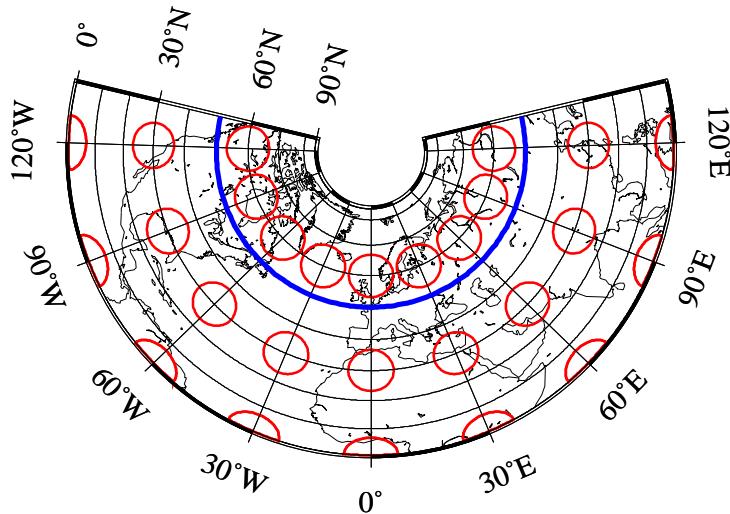
$$\begin{bmatrix} \alpha \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n\Lambda \\ (-2 \frac{R^2}{n} \cos \Delta + c)^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

Hauptstreckungen

$$\begin{aligned}\Lambda_1 &= \frac{n(-2R^2n^{-1} \cos \Delta + c)^{1/2}}{R \sin \Delta} \\ \Lambda_2 &= \frac{R \sin \Delta}{n(-2R^2n^{-1} \cos \Delta + c)^{1/2}}\end{aligned}$$

$\Lambda_1 \Lambda_2 = 1$ erfüllt !

5.2.3.1 Variante vom Typ äquidistant und konform auf dem Grundkreis



GMT 2002 Jan 10 14:51:59 pscoast -JB-0/90/50/50.000000001/0.1cm -R-135/135/0/90 -B30g30Sn/30g10We -Dc -A1000 -G255 -W0.25p -P -K -U/-4/-2/c -X5 -Y17

Abbildung 5-11: Flächentreuer Kegelentwurf, äquidistant und konform auf dem Grundkreis $\Phi_0 = 50^\circ$

Wiederum wird die Projektionskonstante n durch den äquidistant und konform abgebildeten Grundkreis Φ_0 festgelegt.

Postulat: Äquidistanz auf dem Grundkreis Φ_0

$$\begin{aligned} R\Lambda \sin \Delta_0 &= r(\Delta_0)\alpha \\ r(\Delta_0) &= \sqrt{-2R^2n^{-1} \cos \Delta_0 + c} \\ R\Lambda \sin \Delta_0 &= \sqrt{-2R^2n^{-1} \cos \Delta_0 + c} n\Lambda \implies \\ R^2 \sin^2 \Delta_0 &= (-2R^2n^{-1} \cos \Delta_0 + c)n^2 = (-2R^2 + c) \cos^2 \Delta_0 \implies \\ c &= R^2(\tan^2 \Delta_0 + 2) \end{aligned}$$

Abbildungsgleichungen

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n\Lambda \\ R(-2n^{-1} \sin \Phi + \cot^2 \Phi_0 + 2)^{1/2} \end{bmatrix}$$

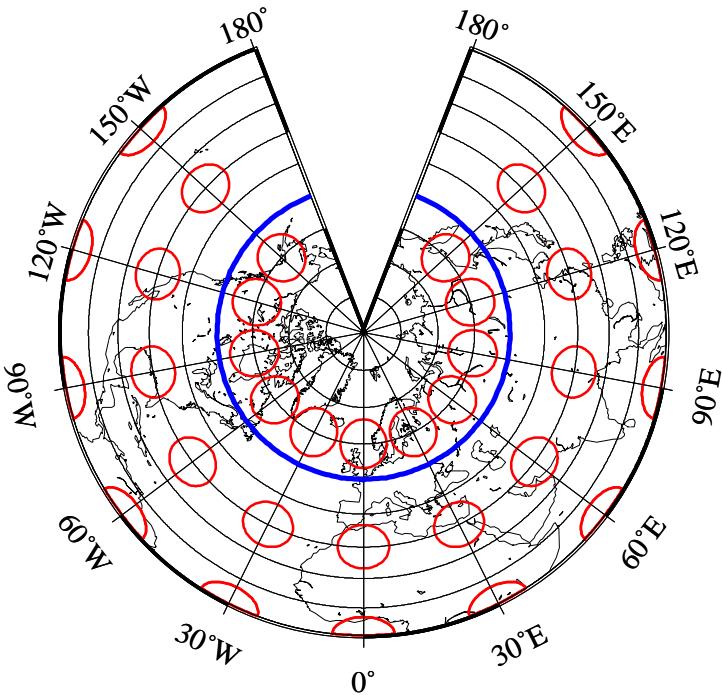
$$\begin{bmatrix} \alpha \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n\Lambda \\ Rn^{-1}\sqrt{-2n \sin \Phi + n^2 + 1} \end{bmatrix}$$

Hauptstreckungen

$$\Lambda_1 = \frac{\sqrt{-2n \sin \Phi + n^2 + 1}}{\cos \Phi}, \quad \Lambda_2 = \frac{\cos \Phi}{\sqrt{-2n \sin \Phi + n^2 + 1}}$$

Test $\Lambda_1(\Phi_0) = \Lambda_2(\Phi_0)$: Konformität

5.2.3.2 Variante vom Typ punktartiges Bild des Hauptpunktes, äquidistant und konform auf einem Parallelkreis



GMT 2002 Jan 10 14:52:53 pscoast -JB-0/40/50/90/0.1cm -R-180/180/0/90 -B30g30Sn/30g10We -Dc -A1000 -G255 -W0.25p -P -K -Uc -X5 -Y15

Abbildung 5-12: Flächentreuer Kegelentwurf, punktförmige Abbildung des Nordpols (Hauptpunkt), äquidistant und konform auf dem Parallelkreis $\Phi_1 = 50^\circ$

Postulat: Punktförmige Abbildung des Hauptpunktes

$$\left. \begin{array}{l} \Delta = 0 : r = f(0) = 0 \\ r(0) = (-2R^2n^{-1} + c)^{1/2} \end{array} \right] \implies c = 2R^2n^{-1}$$

$$\begin{aligned} r = f(\Delta) &= \sqrt{-2R^2n^{-1}\cos\Delta + 2R^2n^{-1}} = \sqrt{2n^{-1}}R\sqrt{1-\cos\Delta} \\ &= \sqrt{2n^{-1}}R\sqrt{2\sin^2\frac{\Delta}{2}} = \frac{2R}{\sqrt{n}}\sin\frac{\Delta}{2} \implies \end{aligned}$$

Abbildungsgleichungen

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n\Lambda \\ \frac{2R}{\sqrt{n}}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi}{2}\right) \end{bmatrix}$$

Hauptstreckungen

$$\Lambda_1 = \frac{2\sqrt{n}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi}{2}\right)}{\cos\Phi} = \frac{\sqrt{n}}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi}{2}\right)}, \quad \Lambda_2 = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi}{2}\right)}{\sqrt{n}}$$

Postulat: Äquidistanz auf dem Parallelkreis $\Delta_1 = \frac{\pi}{2} - \Phi_1$

$$R\Lambda \sin\Delta_1 = r(\Delta_1)\alpha \quad \left. \right] \implies \text{allgemeine Abbildungsgleichungen, siehe Vorseite}$$

$$R\Lambda \sin\Delta_1 = \left(\frac{2R}{\sqrt{n}}\sin\frac{\Delta_1}{2}\right)n\Lambda \implies$$

$$2\sin\frac{\Delta_1}{2}\cos\frac{\Delta_1}{2} = (2\sin\frac{\Delta_1}{2})\sqrt{n} \implies$$

$$n = \cos^2\frac{\Delta_1}{2} = \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi_1}{2}\right) \implies$$

Abbildungsgleichungen

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\cos^2(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi_1}{2})\Lambda] \\ \frac{2R}{\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi_1}{2})} \sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi}{2}) \end{bmatrix}$$

Hauptstreckungen

$$\Lambda_1 = \frac{\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi_1}{2})}{\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi}{2})}, \quad \Lambda_2 = \frac{\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi}{2})}{\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi_1}{2})}$$

Test:

$$\Lambda_1(\Phi_1) = \Lambda_2(\Phi_1) = 1$$

$$\text{Äquidistanz und Konformität auf dem Parallelkreis } \Delta_1 = \frac{\pi}{2} - \Phi_1$$

5.2.3.3 Variante vom Typ äquidistant und konform auf zwei Parallelkreisen (Albers flächentreue Kegelabbildung)

Geschichte: Lüneburger H.C. Albers

Albers, H.C.: Beschreibung einer neuen Kegelprojektion: Zach's Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde Nov. (1805) 450-459

Bonacker, W. und E. Anliker :

Heinrich Christian Albers, der Vorheber der flächentreuen Kegelrumpfprojektion, Petermann's Geographische Mitteilungen 76 (1930) 238-240

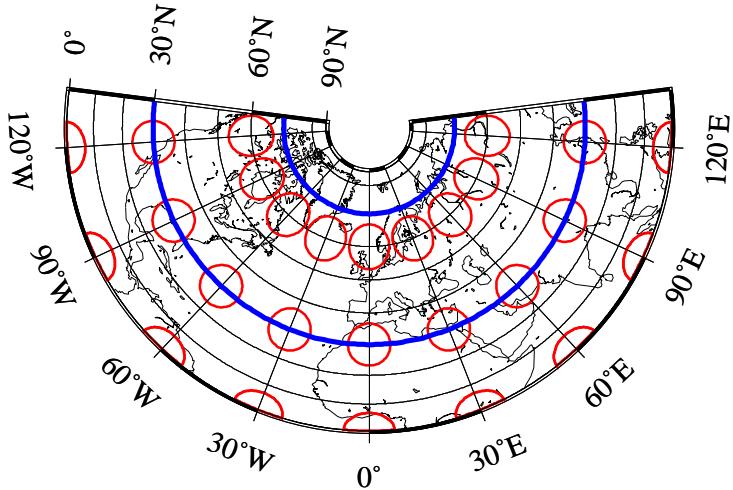
Beispiel:

alle 50 Staaten der USA, 1 : 2,5 Mio. Maßstab $\Phi_1 = +29,5^\circ$; $\Phi_2 = +45,5^\circ$: Maßstabsfehler kleiner als 1% im Zentrum der Karte mit einem Maximum

von $1\frac{1}{4}\%$ entlang der nördlichen und südlichen Grenzen

Alexander, Weltatlas, Klett-Verlag, Stuttgart 1982

- (i) Karten europäischer Länder, Maßstab 1:3 Mio, Netzmaschenweite 2°
- (ii) Physische Übersichten Nord und Südeuropa, 1:7,5 Mio, p. 42/43, Netzmaschenweite 5°



GMT 2002 Jan 10 14:53:25 pscoast -JB-0/90/30/70/0.1cm -R-135/135/0/90 -B30g30Sn/30g10We -Dc -A1000 -G255 -W0.25p -P -K -Uc -X5 -Y17

Abbildung 5-13: Flächentreuer Kegelentwurf, äquidistant und konform auf zwei Parallelkreisen, $\Delta_1 = 60^\circ$, $\Phi_1 = 30^\circ$, $\Delta_2 = 20^\circ$, $\Phi_2 = 70^\circ$

Postulat: Äquidistanz auf den Parallelkreisen Φ_1 und Φ_2

$$R \Lambda \sin \Delta_i = r(\Delta_i) \alpha \quad \forall i \in \{1, 2\} \quad \left. \right] \Rightarrow \\ r(\Delta_i) = \sqrt{-2R^2 n^{-1} \cos \Delta_i + c} \quad \left. \right]$$

$$R^2 \sin^2 \Delta_i = (-2R^2 n^{-1} \cos \Delta_i + c)n^2 \Rightarrow$$

$$c = R^2 \left(\frac{\sin^2 \Delta_i}{n^2} + 2 \frac{\cos \Delta_i}{n} \right) = \frac{R^2}{n^2} (\sin^2 \Delta_i + 2n \cos \Delta_i)$$

$$\Rightarrow \sin^2 \Delta_1 + 2n \cos \Delta_1 = \sin^2 \Delta_2 + 2n \cos \Delta_2 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
n &= -\frac{\sin^2 \Delta_1 - \sin^2 \Delta_2}{2(\cos \Delta_1 - \cos \Delta_2)} = \frac{\cos^2 \Delta_1 - \cos^2 \Delta_2}{2(\cos \Delta_1 - \cos \Delta_2)} \\
&= \frac{(\cos \Delta_1 - \cos \Delta_2)(\cos \Delta_1 + \cos \Delta_2)}{2(\cos \Delta_1 - \cos \Delta_2)} = \frac{\cos \Delta_1 + \cos \Delta_2}{2} \implies \\
&\boxed{n = \frac{1}{2}(\sin \Phi_1 + \sin \Phi_2)}
\end{aligned}$$

Abbildungsgleichungen

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n\Lambda \\ \frac{R}{n}\sqrt{\cos^2 \Phi_1 + 2n \sin \Phi_1 - 2n \sin \Phi} \end{bmatrix}$$

Beweis:

alternative Darstellung von c :

$$c = \frac{R^2}{n^2}(1 + \sin \Phi_1 \sin \Phi_2)$$

Ergebnis folgt aus

$$\begin{aligned}
\sin^2 \Delta_1 + 2n \cos \Delta_1 &= 1 - \cos^2 \Delta_1 + (\cos \Delta_1 + \cos \Delta_2) \cos \Delta_1 \\
&= 1 + \cos \Delta_1 \cos \Delta_2 !
\end{aligned}$$

Input von c in die allgemeinen Abbildungsgleichungen

$$\left. \begin{aligned}
r(\Delta)^2 &= -2\frac{R^2}{n} \cos \Delta + c \\
&= -\frac{2R^2}{n}(1 - 2 \sin^2 \frac{\Delta}{2}) + \frac{R^2}{n^2}(1 + \cos \Delta_1 \cos \Delta_2) \\
&= \frac{4R^2}{n} \sin^2 \frac{\Delta}{2} - 2\frac{R^2}{n} + \frac{R^2}{n^2}(1 + \cos \Delta_1 \cos \Delta_2) \\
&= \frac{4R^2}{n} \sin^2 \frac{\Delta}{2} + \frac{R^2}{n^2}(-2n + 1 + \cos \Delta_1 \cos \Delta_2)
\end{aligned} \right] \implies$$

$$n = \frac{1}{2}(\cos \Delta_1 + \cos \Delta_2)$$

$$\begin{aligned}
r(\Delta)^2 &= -2n + 1 + \cos \Delta_1 \cos \Delta_2 \\
&= 1 - \cos \Delta_1 - \cos \Delta_2 + \cos \Delta_1 \cos \Delta_2 \\
&= 1 - (1 - 2 \sin^2 \frac{\Delta_1}{2}) - (1 - 2 \sin^2 \frac{\Delta_2}{2}) + (1 - 2 \sin^2 \frac{\Delta_1}{2}) \cdot (1 - 2 \sin^2 \frac{\Delta_2}{2}) \\
&= 4 \sin^2 \frac{\Delta_1}{2} \sin^2 \frac{\Delta_2}{2} \\
\implies & \\
-2R^2 n^{-1} \cos \Delta + c &= 4R^2 n^{-1} \sin^2 \frac{\Delta}{2} + 4R^2 n^{-2} \sin^2 \frac{\Delta_1}{2} \sin^2 \frac{\Delta_2}{2} \\
&= 4R^2 n^{-2} (n \sin^2 \frac{\Delta}{2} + \sin^2 \frac{\Delta_1}{2} \sin^2 \frac{\Delta_2}{2}) \\
\implies & \\
r(\Delta) &= \frac{2R}{n} (n \sin^2 \frac{\Delta}{2} + \sin^2 \frac{\Delta_1}{2} \sin^2 \frac{\Delta_2}{2})^{1/2} \\
(\quad) &= n \sin^2 (\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi}{2}) + \sin^2 (\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi_1}{2}) \sin^2 (\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi_2}{2}) \\
\sin (\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}) &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}) \\
\sin^2 (\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}) &= \frac{1}{2} (\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}) = \frac{1}{2} (1 - \sin x) \\
\left. \begin{aligned} \sqrt{n \sin^2 \frac{\Delta}{2} + \sin^2 \frac{\Delta_1}{2} \sin^2 \frac{\Delta_2}{2}} &= \sqrt{n \frac{1}{2} (1 - \sin \Phi) + \frac{1}{4} (1 - \sin \Phi_1) (1 - \sin \Phi_2)} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{2n(1 - \sin \Phi) + 1 - (\sin \Phi_1 + \sin \Phi_2) + \sin \Phi_1 \sin \Phi_2} \end{aligned} \right] \implies \\
2n &= \sin \Phi_1 + \sin \Phi_2 \implies \\
\sin \Phi_1 \sin \Phi_2 &= \sin \Phi_1 (2n - \sin \Phi_1) = 2n \sin \Phi_1 - \sin^2 \Phi_1
\end{aligned}$$

Behauptung !

Inverse Abbildungsgleichungen

$\Lambda = \frac{\alpha}{n}$ $\Phi = \arcsin \frac{1}{2n} \left(\cos^2 \Phi_1 + 2n \sin \Phi_1 - \left(\frac{nr}{R} \right)^2 \right)$

Hauptstreckungen

$$\Lambda_1 = \frac{\sqrt{\cos^2 \Phi_1 + 2n \sin \Phi_1 - 2n \sin \Phi}}{\cos \Phi}, \quad \Lambda_2 = \Lambda_1^{-1}$$

Test:

$$\Lambda_1(\Phi_1) = \Lambda_2(\Phi_1) = 1 \wedge \Lambda_1(\Phi_2) = \Lambda_2(\Phi_2) = 1$$

Äquidistanz und Konformität

Bei Verwendung von Kegelabbildungen mit *zwei* äquidistant abgebildeten Parallelkreisen lassen sich im Vergleich zu Kegelabbildungen mit *einem* äquidistant abgebildeten Parallelkreis die Verzerrungen über eine größere Breitenausdehnung hinweg unter einer gewissen Schranke halten.

Beispiel: Winkelverzerrung ω

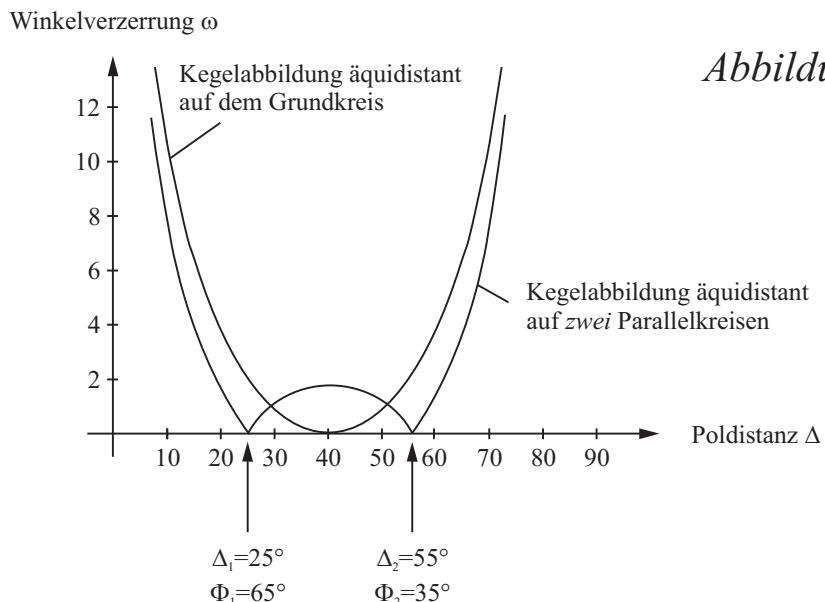
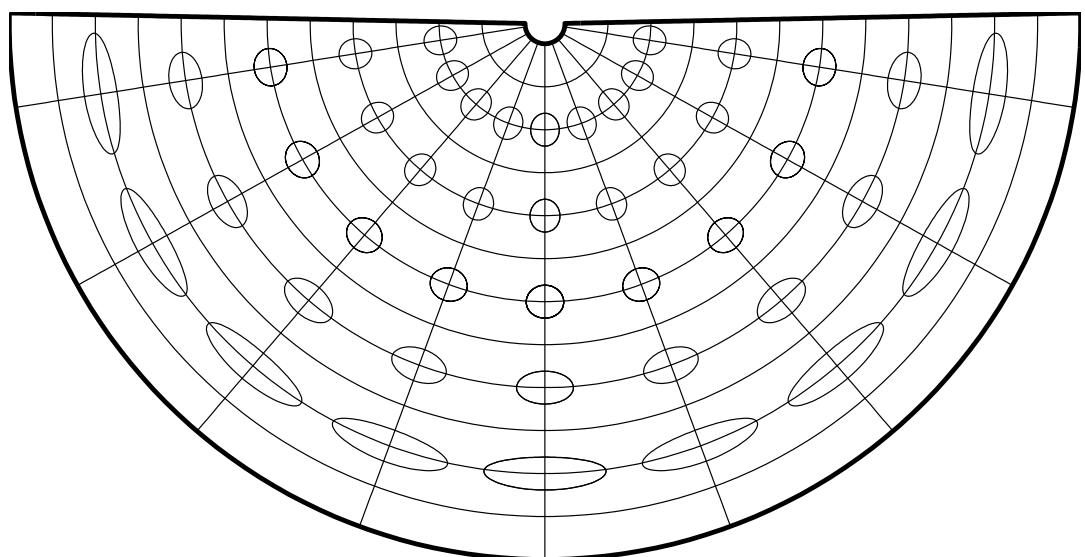
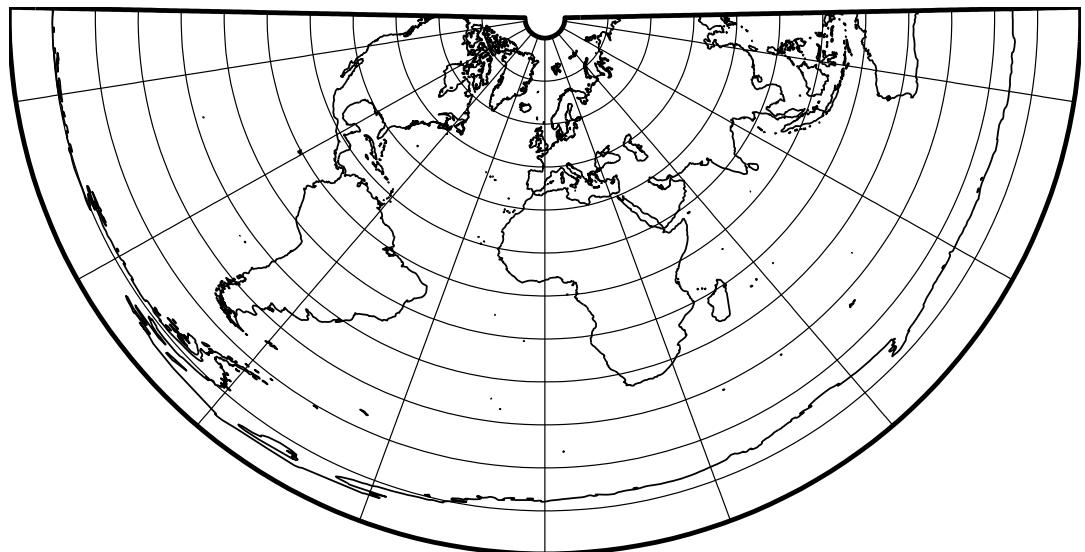


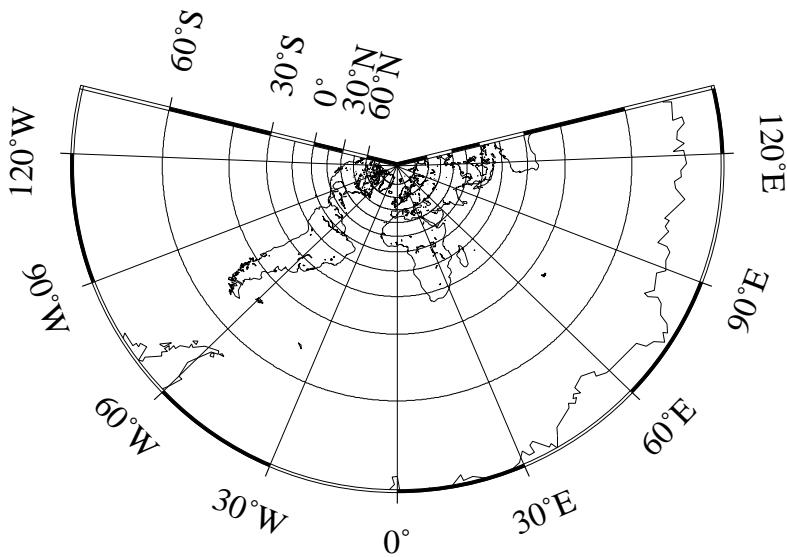
Abbildung 5-14

Kommentar zur Skizze:

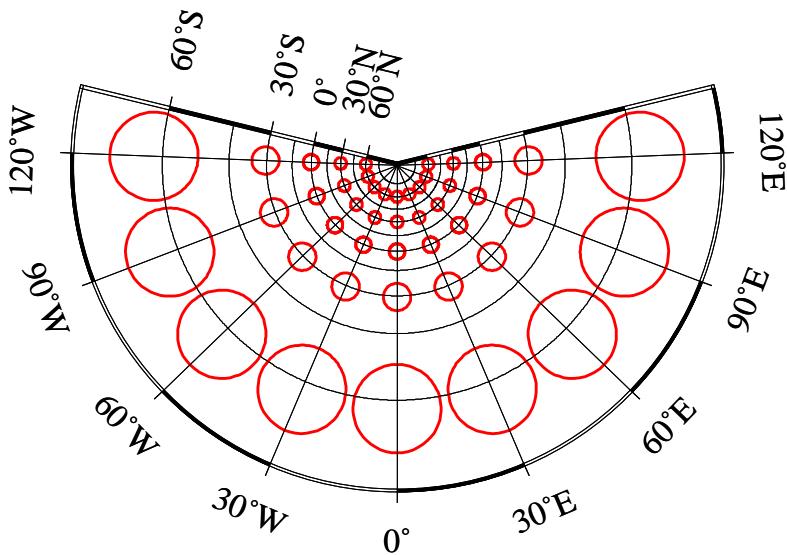
Die Verzerrungen wachsen zu beiden Seiten der äquidistanten Parallelkreise, polwärts schneller als äquatorwärts. In der inneren Zone steigen sie bis zu einem bestimmten Maximalwert. Im gesamten sind die Verzerrungen geringer als bei dem Entwurf mit äquidistantem Grundkreis (Berührungsreich).



Abbildungen 5-15, 5-16: Mittabstandstreue Kegelabbildung

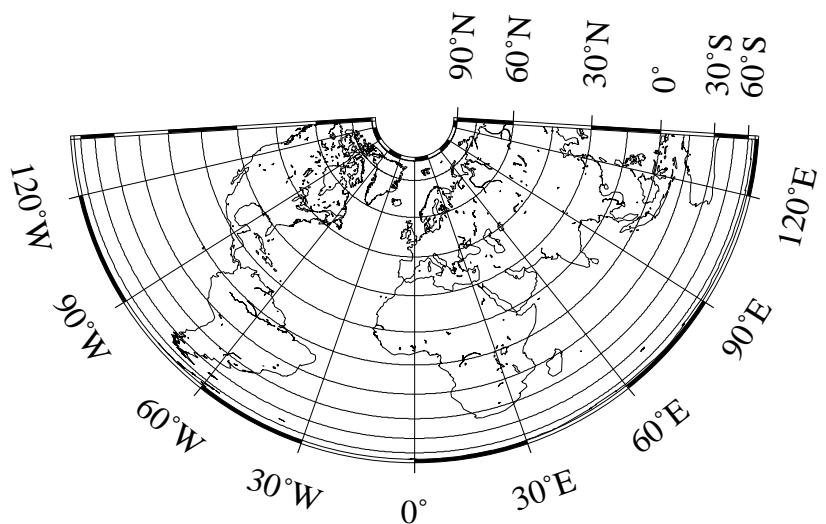


GMT 2002 Jan 10 14:53:53 pscoast -Ji-0/90/80/10/0.00015cm -R-135/135/-70/89.9 -B30g30Sn/30g15We -Dc -A1000 -G255 -W0.25p -P -Uc -X5 -Y20

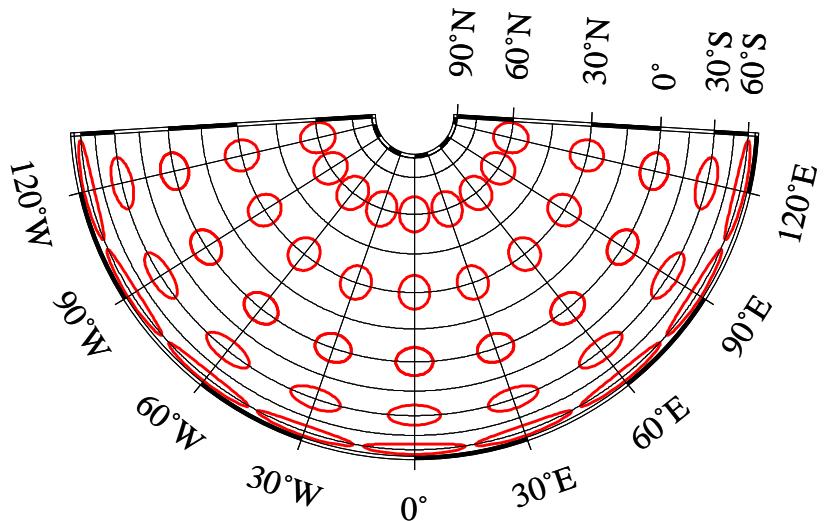


GMT 2002 Jan 10 14:53:53 psbasemap -Ji-0/90/80/10/0.00015cm -R-135/135/-70/89.9 -B30g30Sn/30g15We -G255 -P -K -Uc -X5 -Y20

Abbildungen 5-17, 5-18: Winkeltreue Kegelabbildung (Lambert)



GMT 2002 Jan 10 14:54:18 pscoast -JB-0/90/70/20/0.1cm -R-135/135/-70/90 -B30g30Sn/30g15wE -Dc -A1000 -G255 -W0.25p -P -Uc -X5 -Y20



GMT 2002 Jan 10 14:54:19 psbasemap -JB-0/90/70/20/0.1cm -R-135/135/-70/90 -B30g30Sn/30g15wE -G255 -P -K -Uc -X5 -Y20

Abbildungen 5-19, 5-20: Flächentreue Kegelabbildung (Albers)

5.3 Allgemeine Abbildungsgleichungen und Verzerrungsmaße für Kegelabbildungen des Rotationsellipsoides

Karte Φ : ellipsoidische Koordinaten

$$\mathbf{x} = \Phi^{-1}(\mathbf{U}) :$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \frac{A}{\sqrt{1 - E^2 \sin^2 \Phi}} \begin{bmatrix} \cos \Lambda \cos \Phi \\ \sin \Lambda \cos \Phi \\ (1 - E^2) \sin \Phi \end{bmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \Lambda \\ \frac{\pi}{2} - \Phi \\ \Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda \\ \Delta \\ \Delta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda \\ \Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \arctan Y X^{-1} \\ \arctan \frac{1}{1 - E^2} (Z / \sqrt{X^2 + Y^2}) \end{bmatrix}$$

Metrikensor des Urbildes

siehe Kapitel 3.3

$$G_{KL} = \frac{\partial X^I}{\partial U^K} \frac{\partial X^I}{\partial U^L} = \begin{bmatrix} \frac{A^2 \cos^2 \Phi}{1 - E^2 \sin^2 \Phi} & 0 \\ 0 & \frac{A^2 (1 - E^2)^2}{(1 - E^2 \sin^2 \Phi)^3} \end{bmatrix}$$

Karte φ : Polarkoordinaten

$$\mathbf{x} = \varphi^{-1}(\mathbf{u}) : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \alpha \\ r \sin \alpha \end{bmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \alpha \\ r \end{bmatrix}$$

Metrikensor des Bildes

$$g_{kl} = \begin{bmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^2(\Delta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad r = f(\Delta)$$

Deformationstensor

$$c_{KL} = g_{kl}(\mathbf{u} = \bar{f}(\mathbf{U})) \frac{\partial u^k}{\partial U^K} \frac{\partial u^l}{\partial U^L} = \begin{bmatrix} n^2 f^2(\Delta) & 0 \\ 0 & f'^2(\Delta) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \alpha \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n\Lambda \\ f(\Delta) \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial u^k}{\partial U^K} = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & f'(\Delta) \end{bmatrix}$$

Mit

$$M = \frac{1}{\kappa_1} = \frac{A(1-E^2)}{(1-E^2 \sin^2 \Phi)^{3/2}} \quad \text{"meridian radius of curvature"}$$

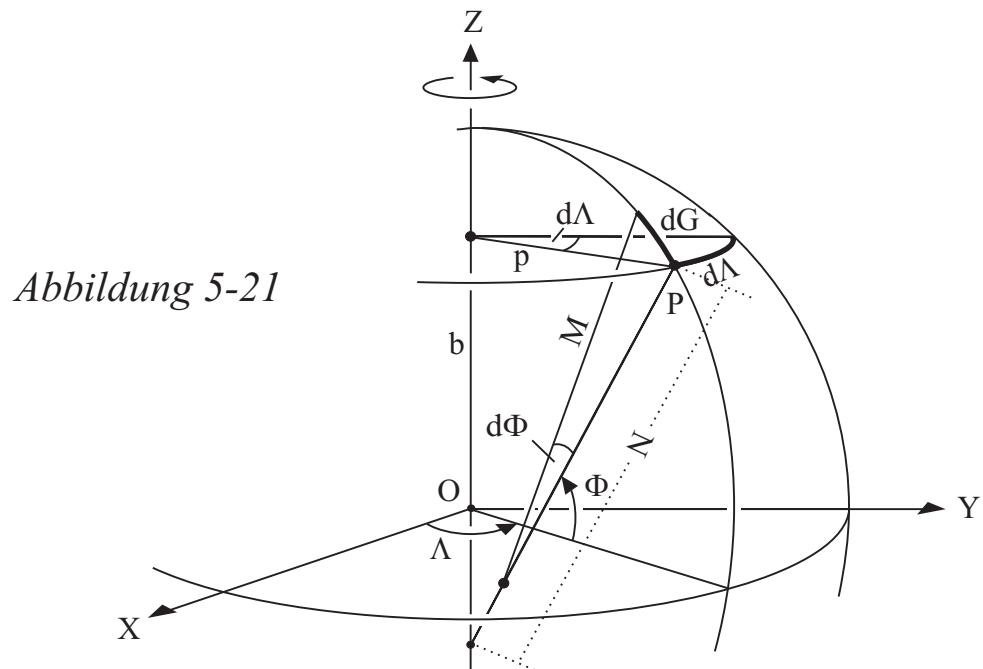
$$N = \frac{1}{\kappa_2} = \frac{A}{(1-E^2 \sin^2 \Phi)^{1/2}} \quad \text{"radius of curvature in the prime vertical"}$$

$$G_{KL} = \begin{bmatrix} N^2 \cos^2 \Phi & 0 \\ 0 & M^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N^2 \sin^2 \Delta & 0 \\ 0 & M^2 \end{bmatrix}$$

Hauptstreckungen

$$\Lambda_1 = \sqrt{c_{11}/G_{11}} = \frac{nf(\Delta)}{N \sin \Delta}$$

$$\Lambda_2 = \sqrt{c_{22}/G_{22}} = \frac{f'(\Delta)}{M}$$



Konstruktionsprinzipien

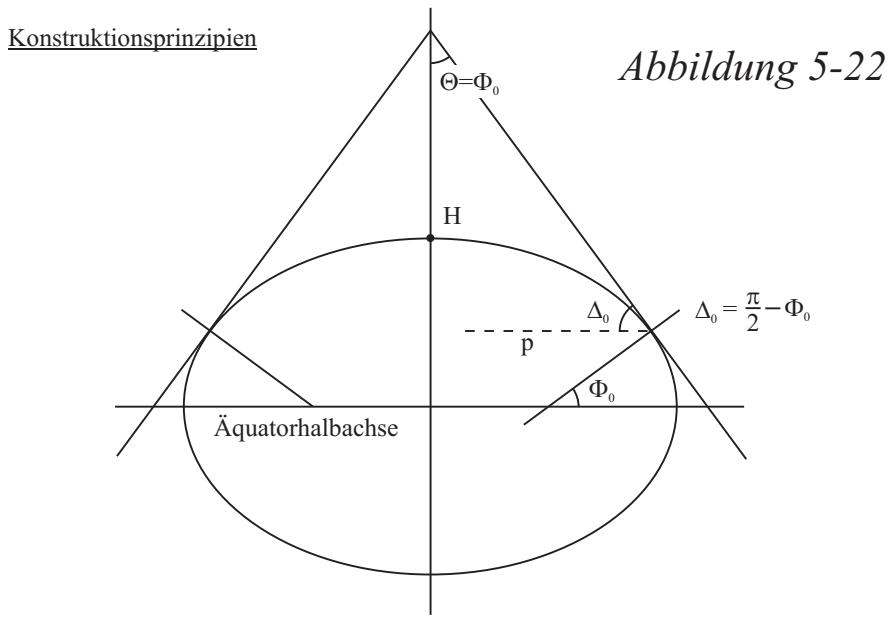


Abbildung 5-22

Durch die Wahl der flächennormalen (ellipsoidischen) Koordinaten zur Parametrisierung des Rotationsellipsoides ergibt sich für den halben Öffnungswinkel des Kreiskegels Φ_0 die Breite des Grund (Berühr-)kreises Φ_0 .

Zur Vereinfachung der Formeln wird der Ergänzungswinkel der Breite Φ_0 zu 90° , die Poldistanz Δ_0 , eingeführt: $\Delta = \frac{\pi}{2} - \Phi$.

5.4 Spezielle Kegelabbildungen des Rotationsellipsoides

5.4.1 Kegelabbildungen vom Typ äquidistant auf der Schar der Parallelkreise

$$\left. \begin{array}{l} \Lambda_2 = 1 \\ \Lambda_2 = \frac{f'(\Delta)}{M} \end{array} \right] \Rightarrow f'(\Delta) = M$$

$$f'(\Delta) = \frac{A(1 - E^2)}{(1 - E^2 \cos^2 \Delta)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow f(\Delta) = A(1 - E^2) \int (1 - E^2 \cos^2 \Delta)^{-3/2} d\Delta$$

$$= A(1 - E^2) \int_0^\Delta (1 - E^2 \cos^2 \Delta')^{-3/2} d\Delta' + \text{const.}$$

Elliptisches Integral 2. Art: siehe Kapitel 3.4

5.4.2 Konforme Kegelabbildungen

Postulat der Konformität:

$$\Lambda_1 = \Lambda_2 \implies$$

$$\frac{nf(\Delta)}{N \sin \Delta} = \frac{f'(\Delta)}{M} \implies \frac{f'}{f} = \frac{nM}{N \sin \Delta}$$

$$\int \frac{df}{f} = n \int \frac{(1 - E^2)d\Delta}{(1 - E^2 \cos^2 \Delta) \sin \Delta}$$

$$\implies \ln f = n(1 - E^2) \int \frac{d\Delta}{(1 - E^2 \cos^2 \Delta) \sin \Delta}$$

$$\text{Substitution: } u = E \cos \Delta \implies \sin^2 \Delta = \frac{E^2 - u^2}{E^2}$$

$$\frac{du}{d\Delta} = E(-\sin \Delta)$$

$$\ln f = -n(1 - E^2)E \int \frac{du}{(1 - u^2)(E^2 - u^2)}$$

Partialbruchzerlegung:

$$\int \frac{du}{(1 - u^2)(E^2 - u^2)} = \int \frac{Adu}{1 - u^2} + \int \frac{Bdu}{E^2 - u^2}$$

$$A(E^2 - u^2) + B(1 - u^2) = 1$$

$$AE^2 + B - u^2(A + B) = 1$$

Koeffizientenvergleich :

$$\left. \begin{array}{l} AE^2 + B = 1 \\ A + B = 0 \end{array} \right] \implies \begin{array}{l} A = -\frac{1}{1 - E^2} \\ B = \frac{1}{1 - E^2} \end{array}$$

$$\int \frac{du}{(1 - u^2)(E^2 - u^2)} = -\frac{1}{1 - E^2} \left[\int \frac{du}{1 - u^2} - \int \frac{du}{E^2 - u^2} \right]$$

$$= -\frac{1}{1-E^2} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{1+u}{1-u} - \frac{1}{2E} \ln \frac{E+u}{E-u} \right]$$

$$= \frac{-1}{2(1-E^2)} \left[\ln \frac{1+E \cos \Delta}{1-E \cos \Delta} + \frac{1}{E} \ln \frac{(1-\cos \Delta)}{(1+\cos \Delta)} \right]$$

Additionstheorem:

$$\begin{aligned} \int \frac{d\Delta}{(1-E^2 \cos^2 \Delta) \sin \Delta} &= \frac{-1}{2(1-E^2)} \left[\ln \frac{1+E \cos \Delta}{1-E \cos \Delta} + \frac{1}{E} \ln (\tan^2 \frac{\Delta}{2}) \right] + \ln c'' \\ \Rightarrow \ln f &= \frac{nE}{2} \ln \left[\frac{1+E \cos \Delta}{1-E \cos \Delta} \tan \frac{E}{2} \frac{\Delta}{2} \right] + \ln c' = \ln \left[\left(\frac{1+E \cos \Delta}{1-E \cos \Delta} \right)^{\frac{En}{2}} \tan^n \frac{\Delta}{2} c \right] \\ \Rightarrow f(\Delta) &= c \left[\left(\frac{1+E \cos \Delta}{1-E \cos \Delta} \right)^{\frac{E}{2}} \tan \frac{\Delta}{2} \right]^n \end{aligned}$$

Allgemeine Abbildungsgleichungen

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n\Lambda \\ c \left[\left(\frac{1+E \cos \Delta}{1-E \cos \Delta} \right)^{\frac{E}{2}} \tan \frac{\Delta}{2} \right]^n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n\Lambda \\ c \left[\left(\frac{1+E \sin \Phi}{1-E \sin \Phi} \right)^{\frac{E}{2}} \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi}{2} \right) \right]^n \end{bmatrix}$$

Hauptstreckungen

$$\Lambda_1 = \Lambda_2 = \frac{cn}{N \sin \Delta} \left[\left(\frac{1+E \sin \Phi}{1-E \sin \Phi} \right)^{\frac{E}{2}} \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi}{2} \right) \right]^n$$

1. Fall

$$\Delta = 0 : r = f(0) = 0$$

der Hauptpunkt H wird immer auf einen Punkt abgebildet

2. Fall

$$\Delta = \frac{\pi}{2} : r = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = c$$

der Hauptparallelkreis $\Delta = \frac{\pi}{2}$ ($\Phi = 0$) wird immer auf einen Kreis mit dem Radius c abgebildet

5.4.2.1 Variante vom Typ äquidistant auf dem Grundkreis

Die Projektionskonstante n ist durch Φ_0 vorgegeben:

$$n = \sin \Phi_0 = \cos \Delta_0$$

Radius eines Parallelkreises: p

$$\text{Gleichung des Rotationsellipsoides: } \frac{X^2 + Y^2}{A^2} + \frac{Z^2}{B^2} = 1$$

$$\begin{aligned} p^2 &= X^2 + Y^2 \\ B^2 &= A^2(1 - E^2) \\ Z &= \frac{(1 - E^2)A \sin \Phi}{\sqrt{1 - E^2 \sin^2 \Phi}} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad p = \boxed{\frac{A \cos \Phi}{\sqrt{1 - E^2 \sin^2 \Phi}}}$$

Postulat: Äquidistanz auf dem Grundkreis Φ_0

$$\frac{A \cos \Phi_0}{\sqrt{1 - E^2 \sin^2 \Phi_0}} \Lambda = f(\Phi_0) \alpha \implies$$

$$\frac{A \sin \Delta_0}{\sqrt{1 - E^2 \cos^2 \Delta_0}} \Lambda = c \left[\left(\frac{1 + E \cos \Delta_0}{1 - E \cos \Delta_0} \right) \frac{E}{2} \tan \frac{\Delta_0}{2} \right]^n \cos \Delta_0 \Lambda$$

$$\implies c = \frac{A \tan \Delta_0}{\sqrt{1 - E^2 \cos^2 \Delta_0}} \left[\left(\frac{1 + E \cos \Delta_0}{1 - E \cos \Delta_0} \right) \frac{E}{2} \tan \frac{\Delta_0}{2} \right]^{-n} \implies$$

$$\begin{aligned}
f(\Delta) &= \frac{A \tan \Delta_0}{\sqrt{1 - E^2 \cos^2 \Delta_0}} \left[\frac{\tan \frac{\Delta}{2}}{\tan \frac{\Delta_0}{2}} \left(\frac{1 - E \cos \Delta_0}{1 - E \cos \Delta} \cdot \frac{1 + E \cos \Delta}{1 + E \cos \Delta_0} \right)^{\frac{E}{2}} \right]^n \\
&= \frac{A}{\tan \Phi_0 \sqrt{1 - E^2 \sin^2 \Phi_0}} \left[\frac{\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi}{2})}{\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi_0}{2})} \left(\frac{1 + E \sin \Phi}{1 + E \sin \Phi_0} \cdot \frac{\sqrt{1 - E^2 \sin^2 \Phi_0}}{\sqrt{1 - E^2 \sin^2 \Phi}} \right)^E \right]^n
\end{aligned}$$

Abbildungsgleichungen

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n\Lambda \\ f(\Delta) \end{bmatrix}$$

5.4.2.2 Variante vom Typ äquidistant auf zwei Parallelkreisen (Lambert konforme Kegelabbildung)

Die Projektionskonstante n wird durch die Forderung der Äquidistanz auf zwei Parallelkreisen $\Delta_1 = \frac{\pi}{2} - \Phi_1$ und $\Delta_2 = \frac{\pi}{2} - \Phi_2$ festgelegt.

Postulat: Äquidistanz auf den Parallelkreisen Δ_1, Δ_2

$$\Lambda_1(\Delta_1) = \Lambda_1(\Delta_2) = 1 \implies$$

$$\begin{aligned}
\frac{cn}{N_1 \sin \Delta_1} \left[\left(\frac{1 + E \sin \Phi_1}{1 - E \sin \Phi_1} \right)^{\frac{E}{2}} \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi_1}{2} \right) \right]^n &= \frac{cn}{N_2 \sin \Delta_2} \left[\left(\frac{1 + E \sin \Phi_2}{1 - E \sin \Phi_2} \right)^{\frac{E}{2}} \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi_2}{2} \right) \right]^n \\
\frac{\sin \Delta_2 (1 - E^2 \cos^2 \Delta_1)^{1/2}}{\sin \Delta_1 (1 - E^2 \cos^2 \Delta_2)^{1/2}} &= \left[\frac{\left(\frac{1 + E \cos \Delta_2}{1 - E \cos \Delta_2} \right)^{\frac{E}{2}} \tan \frac{\Delta_2}{2}}{\left(\frac{1 + E \cos \Delta_1}{1 - E \cos \Delta_1} \right)^{\frac{E}{2}} \tan \frac{\Delta_1}{2}} \right]^n \implies
\end{aligned}$$

$$n = \frac{1}{2} \frac{\ln[(1 - E^2 \cos^2 \Delta_1) \sin^2 \Delta_2] - \ln[(1 - E^2 \cos^2 \Delta_2) \sin^2 \Delta_1]}{\ln \frac{\tan \frac{\Delta_2}{2}}{\tan \frac{\Delta_1}{2}} + \frac{E}{2} \ln \frac{(1 + E \cos \Delta_2)(1 - E \cos \Delta_1)}{(1 - E \cos \Delta_2)(1 + E \cos \Delta_1)}}$$

Die allgemeine Abbildungsgleichung für die konforme Kegelabbildung lautet:

$$r = c \left[\left(\frac{1 + E \cos \Delta}{1 - E \cos \Delta} \right) \frac{E}{2} \tan \left(\frac{\Delta}{2} \right) \right]^n$$

Äquidistanz der Abbildung des Parallelkreises Δ_1

$$\begin{aligned} \frac{A \sin \Delta_1}{\sqrt{1 - E^2 \cos^2 \Delta_1}} &= cn \left[\left(\frac{1 + E \cos \Delta_1}{1 - E \cos \Delta_1} \right) \frac{E}{2} \tan \frac{\Delta_1}{2} \right]^n \\ \implies c &= \frac{A \sin \Delta_1}{n \sqrt{1 - E^2 \cos^2 \Delta_1} \left[\left(\frac{1 + E \cos \Delta_1}{1 - E \cos \Delta_1} \right) \frac{E}{2} \tan \frac{\Delta_1}{2} \right]^n} \\ \implies r &= \frac{A \sin \Delta_1}{n(1 - E^2 \cos^2 \Delta_1)^{1/2}} \left[\frac{\left(\frac{1 + E \cos \Delta}{1 - E \cos \Delta} \right) \frac{E}{2} \tan \frac{\Delta}{2}}{\left(\frac{1 + E \cos \Delta_1}{1 - E \cos \Delta_1} \right) \frac{E}{2} \tan \frac{\Delta_1}{2}} \right]^n \end{aligned}$$

5.4.3 Flächentreue Kegelabbildungen

Postulat der Flächentreue:

$$\begin{aligned} \Lambda_1 \Lambda_2 &= 1 \implies \\ \frac{nf(\Delta)}{N \sin \Delta} \frac{f'(\Delta)}{M} &= 1 \implies fdf = \frac{MN \sin \Delta}{n} \\ M &= \frac{A(1 - E^2)}{(1 - E^2 \cos^2 \Delta)^{\frac{3}{2}}} \quad N = \frac{A}{(1 - E^2 \cos^2 \Delta)^{\frac{1}{2}}} \\ \int fdf &= \int \frac{A^2(1 - E^2) \sin \Delta}{(1 - E^2 \cos^2 \Delta)^2 n} d\Delta \implies \\ \frac{1}{2} f^2 &= \frac{A^2(1 - E^2)}{n} \int \frac{\sin \Delta}{(1 - E^2 \cos^2 \Delta)^2} d\Delta \end{aligned}$$

Substitution: $u = E \cos \Delta$

$$\begin{aligned} - \int \frac{\sin \Delta}{(1 - E^2 \cos^2 \Delta)^2} d\Delta &= \int \frac{+1}{E(1 - u^2)^2} du \\ &= \frac{u}{2E(1 - u^2)} + \frac{1}{4E} \ln \frac{1 + u}{1 - u} + c' \\ &= \frac{\cos \Delta}{2(1 - E^2 \cos^2 \Delta)} + \frac{1}{4E} \ln \frac{1 + E \cos \Delta}{1 - E \cos \Delta} + c' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\implies \frac{1}{2}f^2 &= \frac{1}{2}c^2 - \frac{A^2(1-E^2)}{2n} \left[\frac{\cos \Delta}{1-E^2 \cos^2 \Delta} + \frac{1}{2E} \ln \frac{1+E \cos \Delta}{1-E \cos \Delta} \right] \\ \implies f &= \left[c^2 - \frac{A^2(1-E^2)}{n} \left(\frac{\cos \Delta}{1-E^2 \cos^2 \Delta} + \frac{1}{2E} \ln \frac{1+E \cos \Delta}{1-E \cos \Delta} \right) \right]^{1/2}\end{aligned}$$

$$\Delta = \frac{\pi}{2} : r = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = c$$

Die Integrationskonstante c legt den Bildkreisradius des Äquators $\Delta = \frac{\pi}{2}$ fest.

Allgemeine Abbildungsgleichungen

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n\Lambda \\ \sqrt{c^2 - \frac{A^2(1-E^2)}{n} \left(\frac{\cos \Delta}{1-E^2 \cos^2 \Delta} + \frac{1}{2E} \ln \frac{1+E \cos \Delta}{1-E \cos \Delta} \right)} \end{bmatrix}$$

5.4.3.1 Variante vom Typ äquidistant und konform auf dem Grundkreis

Die Projektionskonstante n wird durch den äquidistant und konform abgebildeten Grundkreis Φ_0 festgelegt.

Postulat: Äquidistanz auf dem Grundkreis Φ_0

$$\begin{aligned}\frac{A \sin \Delta_0 \Lambda}{\sqrt{1-E^2 \cos^2 \Delta_0}} &= f(\Delta_0) n \Lambda \quad n = \cos \Delta_0 \\ \frac{A^2 \sin^2 \Delta_0}{1-E^2 \cos^2 \Delta_0} &= \left[c^2 - \frac{A^2(1-E^2)}{n} \left(\frac{\cos \Delta_0}{1-E^2 \cos^2 \Delta_0} + \frac{1}{2E} \ln \frac{1+E \cos \Delta_0}{1-E \cos \Delta_0} \right) \right] n^2 \\ \implies c^2 &= \frac{A^2(1+\tan^2 \Delta_0 - E^2)}{1-E^2 \cos^2 \Delta_0} + \frac{A^2(1-E^2)}{2E \cos \Delta_0} \ln \frac{1+E \cos \Delta_0}{1-E \cos \Delta_0} \\ \text{mit } \frac{1}{\cos^2 \Delta_0} &= 1 + \tan^2 \Delta_0 \implies \\ c^2 &= A^2 \left[\frac{1}{\cos^2 \Delta_0} + \frac{1-E^2}{2E \cos \Delta_0} \ln \frac{1+E \cos \Delta_0}{1-E \cos \Delta_0} \right] \\ \implies r &= f(\Delta) = \\ &= A \left[\frac{1}{\cos^2 \Delta_0} - \frac{(1-E^2) \cos \Delta}{\cos \Delta_0 (1-E^2 \cos^2 \Delta)} + \frac{1-E^2}{2E \cos \Delta_0} \ln \left(\frac{1+E \cos \Delta_0}{1-E \cos \Delta_0} \frac{1-E \cos \Delta}{1+E \cos \Delta} \right) \right]^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Abbildungsgleichungen

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Delta_0 \Lambda \\ A \left[\frac{1}{\cos^2 \Delta_0} - \frac{(1-E^2) \cos \Delta}{\cos \Delta_0 (1-E^2 \cos^2 \Delta)} + \frac{1-E^2}{2E \cos \Delta_0} \ln \left(\frac{1+E \cos \Delta_0}{1-E \cos \Delta_0} \frac{1-E \cos \Delta}{1+E \cos \Delta} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \Phi_0 \Lambda \\ A \left[\frac{1}{\sin^2 \Phi_0} - \frac{(1-E^2) \sin \Phi}{\sin \Phi_0 (1-E^2 \sin^2 \Phi)} + \frac{1-E^2}{2E \sin \Phi_0} \ln \left(\frac{1+E \sin \Phi_0}{1-E \sin \Phi_0} \frac{1-E \sin \Phi}{1+E \sin \Phi} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

5.4.3.2 Variante vom Typ punktartiges Bild des Hauptpunktes, äquidistant und konform auf einem Parallelkreis

Erstes Postulat: Punktförmige Abbildung des Hauptpunktes

$$\Delta = 0 : r = f(0) = 0$$

$$f(0) = c^2 - \frac{A^2(1-E^2)}{n} \left(\frac{1}{1-E^2} + \frac{1}{2E} \ln \frac{1+E}{1-E} \right) = 0$$

$$\Rightarrow c^2 = \frac{A^2}{n} \left(1 + \frac{1-E^2}{2E} \ln \frac{1+E}{1-E} \right)$$

$$\Rightarrow c = \frac{A}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1-E^2}{2E} \ln \frac{1+E}{1-E} \right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow f(\Delta) = \frac{A}{\sqrt{n}} \left[1 - \frac{(1-E^2) \cos \Delta}{1-E^2 \cos^2 \Delta} + \frac{1-E^2}{2E} \left(\ln \frac{1+E}{1-E} - \ln \frac{1+E \cos \Delta}{1-E \cos \Delta} \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

Abbildungsgleichungen

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \Lambda \\ \frac{A}{\sqrt{n}} \left[1 - \frac{(1-E^2) \sin \Phi}{1-E^2 \sin^2 \Phi} + \frac{1-E^2}{2E} \left(\ln \frac{1+E}{1-E} - \ln \frac{1+E \sin \Phi}{1-E \sin \Phi} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

Zweites Postulat: Äquidistanz auf dem Parallelkreis $\Delta_1 = \frac{\pi}{2} - \Phi_1$

$$\frac{A \sin \Delta_1}{\sqrt{1 - E^2 \cos^2 \Delta_1}} = f(\Delta_1) n \implies$$

$$\frac{\sin \Delta_1}{\sqrt{1 - E^2 \cos^2 \Delta_1}} = \sqrt{n} \left[1 - \frac{(1 - E^2) \cos \Delta_1}{1 - E^2 \cos^2 \Delta_1} + \frac{1 - E^2}{2E} \left(\ln \frac{1 + E}{1 - E} - \ln \frac{1 + E \cos \Delta_1}{1 - E \cos \Delta_1} \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$n = \frac{1}{(1 - E^2 \cos^2 \Delta_1)} \left[1 - \frac{(1 - E^2) \cos \Delta_1}{1 - E^2 \cos^2 \Delta_1} + \frac{1 - E^2}{2E} \left(\ln \frac{1 + E}{1 - E} - \ln \frac{1 + E \cos \Delta_1}{1 - E \cos \Delta_1} \right) \right]$$

5.4.3.3 Variante vom Typ äquidistant und konform auf zwei Parallelkreisen (Albers flächentreue Kegelabbildung)

Postulat: Äquidistanz auf den Parallelkreisen Φ_1 und Φ_2

$$\frac{A \sin \Delta_i \Lambda}{\sqrt{1 - E^2 \cos^2 \Delta_i}} = f(\Delta_i) n \Lambda \quad \forall i \in \{1, 2\}$$

$$f(\Delta_i) = \left[c^2 - \frac{A^2(1 - E^2)}{n} \left(\frac{\cos \Delta_i}{1 - E^2 \cos^2 \Delta_i} + \frac{1}{2E} \ln \frac{1 + E \cos \Delta_i}{1 - E \cos \Delta_i} \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\implies \frac{A^2 \sin^2 \Delta_i}{n^2(1 - E^2 \cos^2 \Delta_i)} = c^2 - \frac{A^2(1 - E^2)}{n} \left(\frac{\cos \Delta_i}{1 - E^2 \cos^2 \Delta_i} + \frac{1}{2E} \ln \frac{1 + E \cos \Delta_i}{1 - E \cos \Delta_i} \right)$$

$$\implies c = \frac{A}{\sqrt{n}} \left[\frac{\sin^2 \Delta_i}{n(1 - E^2 \cos^2 \Delta_i)} + (1 - E^2) \left(\frac{\cos \Delta_i}{1 - E^2 \cos^2 \Delta_i} + \frac{1}{2E} \ln \frac{1 + E \cos \Delta_i}{1 - E \cos \Delta_i} \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$c(\Delta_1) = c(\Delta_2)$$

Einführung der beiden Substitutionsfunktionen h_i, g_i mit

$$h(\Delta_i) = h_i := \frac{\sin^2 \Delta_i}{1 - E^2 \cos^2 \Delta_i}$$

$$g(\Delta_i) = g_i := (1 - E^2) \left(\frac{\cos \Delta_i}{1 - E^2 \cos^2 \Delta_i} + \frac{1}{2E} \ln \frac{1 + E \cos \Delta_i}{1 - E \cos \Delta_i} \right)$$

$$\implies c = \frac{A}{\sqrt{n}} \left[\frac{h_i}{n} + g_i \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{A}{\sqrt{n}} \left[\frac{h_1}{n} + g_1 \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{A}{\sqrt{n}} \left[\frac{h_2}{n} + g_2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
&\Rightarrow n = \frac{h_1 - h_2}{g_2 - g_1} \\
&\Rightarrow n = \frac{\frac{\sin^2 \Delta_1}{1 - E^2 \cos^2 \Delta_1} - \frac{\sin^2 \Delta_2}{1 - E^2 \cos^2 \Delta_2}}{(1 - E^2) \left[\frac{\cos \Delta_2}{1 - E^2 \cos^2 \Delta_2} - \frac{\cos \Delta_1}{1 - E^2 \cos^2 \Delta_1} + \frac{1}{2E} \ln \left(\frac{1 + E \cos \Delta_2}{1 - E \cos \Delta_2} \frac{1 - E \cos \Delta_1}{1 + E \cos \Delta_1} \right) \right]}
\end{aligned}$$

5.5 Allgemeine Abbildungsgleichungen und Verzerrungsmaße für pseudo-konische Abbildungen der Kugel

Allgemeiner Abbildungsansatz

$$\begin{array}{c}
\underline{\text{pseudo-konisch}} \quad \left[\begin{array}{l} \alpha(\Lambda, \Delta) = \cos \Delta \quad \Lambda \quad (\text{e.g. } \Delta = \Delta_0 \text{ "fix"}) \\ r(\Delta) = f(\Delta) \end{array} \right] \\
\Downarrow \\
\underline{\text{polykonisch}} \quad \left[\begin{array}{l} \alpha(\Lambda, \Delta) = g(\Delta) \cos \Delta \quad \Lambda \\ r(\Delta) = f(\Delta) \end{array} \right]
\end{array}$$

Satz (flächentreue Abbildung):

Eine allgemeine Abbildung einer Fläche in die Ebene ist *flächentreu* genau dann, wenn

$$\frac{|c_{KL}|}{|G_{KL}|} = 1$$

Beweis:

$$|c_{KL} - \Lambda_S^2 G_{KL}| = 0$$

$$\iff \Lambda_S^4 - \Lambda_S^2 (\text{tr } c_{KL} G_{KL}^{-1}) + |c_{KL}| / |G_{KL}| = 0$$

$$(\Lambda_S^2)^+ (\Lambda_S^2)^- = 1 \quad (\text{kanonisches Postulat der Flächentreue})$$

\iff

$$|c_{KL}| / |G_{KL}| = 1 \quad (\text{Satz des Vieta :})$$

Das Produkt der Lösungen einer quadratischen Gleichung ist gleich dem Absolutglied)



Deformationstensor

$$\begin{aligned}\alpha &= g(\Delta) \cos \Delta \quad \Lambda = h(\Delta) \Lambda, r = f(\Delta) \\ \alpha_\Lambda &= h(\Delta) =: g(\Delta) \cos \Delta, \alpha_\Delta = h'(\Delta) \Lambda \\ r_\Lambda &= 0, r_\Delta = f'(\Delta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c_{11} &= r^2 \alpha_\Lambda^2 + r_\Lambda^2 = f^2 h^2, \quad c_{12} = r^2 \alpha_\Lambda \alpha_\Delta + r_\Lambda r_\Delta = f^2 h h' \Lambda \\ c_{21} &= c_{12}, \quad c_{22} = r^2 \alpha_\Delta^2 + r_\Delta^2 = f^2 h'^2 \Lambda^2 + f'^2\end{aligned}$$

$$[c_{KL}] = \begin{bmatrix} f^2 h^2 & f^2 h h' \Lambda \\ f^2 h h' \Lambda & f^2 h'^2 \Lambda^2 + f'^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}|c_{KL}| &= f^2 h^2 (f^2 h'^2 \Lambda^2 + f'^2) - f^4 h^2 h'^2 \Lambda^2 = \\ &= f^4 h^2 h'^2 \Lambda^2 + f^2 h^2 f'^2 - f^4 h^2 h'^2 \Lambda^2 = \underline{\underline{f^2 f'^2 h^2}}.\end{aligned}$$

Metriktensor des Urbildes

$$[G_{KL}] = \begin{bmatrix} R^2 \sin^2 \Delta & 0 \\ 0 & R^2 \end{bmatrix}$$

$$|G_{KL}| = R^4 \sin^2 \Delta$$

Postulat der Flächentreue:

$$|c_{KL}| = |G_{KL}| \implies f f' g \cos \Delta = +R^2 \sin \Delta \quad (+ \text{ Zeichen wegen Orientierungstreue})$$

$$\iff g = 2R^2 \frac{\tan \Delta}{(f^2)'}$$

allgemeine Struktur

der flächentreuen pseudo-konischen Abbildungen der Kugel

$$\alpha(\Lambda, \Delta) = g(\Delta) \cos \Delta \quad \Lambda = 2R^2 \frac{\sin \Delta}{[f^2(\Delta)]'} \Lambda = R^2 \frac{\sin \Delta}{f f'} \Lambda$$

$$r(\Delta) = f(\Delta)$$

$$(\Lambda_S^2)^+ = \frac{1}{2}[(\text{tr } c_{KL} G_{KL}^{-1}) + \sqrt{(\text{tr } c_{KL} G_{KL}^{-1})^2 - 4|c_{KL} G_{KL}^{-1}|}]$$

$$(\Lambda_S^2)^- = \frac{1}{2}[(\text{tr } c_{KL} G_{KL}^{-1}) - \sqrt{(\text{tr } c_{KL} G_{KL}^{-1})^2 - 4|c_{KL} G_{KL}^{-1}|}]$$

$$|c_{KL}| = \frac{1}{4}[(f^2)']^2 h^2 = \frac{1}{4}[(f^2)']^2 \cos^2 \Delta g^2(\Delta)$$

$$= \frac{1}{4}[(f^2)']^2 \cos^2 \Delta 4R^4 \frac{\tan^2 \Delta}{[(f^2)']^2} = \underline{\underline{R^4}} \sin^2 \Delta$$

$$\begin{aligned} \text{tr } c_{KL} G_{KL}^{-1} &= c_{11} G_{11}^{-1} + c_{22} G_{22}^{-1} \\ &= f^2 h^2 (R^2 \sin^2 \Delta)^{-1} + (f^2 h'^2 \Lambda^2 + f'^2) (R^2)^{-1} \\ &= \frac{1}{R^2 \sin^2 \Delta} f^2 g^2 \cos^2 \Delta + \frac{1}{R^2} [f^2 (g' \cos \Delta - g \sin \Delta)^2 \Lambda^2 + f'^2] \\ &= 4R^2 \frac{f^2}{[(f^2)']^2} + \frac{1}{R^2} \left(f^2 [2R^2 \cos \Delta (1 + \tan^2 \Delta) / (f^2)'] \right. \\ &\quad \left. - 2R^2 \sin \Delta [(f^2)']^{-2} (f^2)'' \right. \\ &\quad \left. - 2R^2 \sin \Delta \tan \Delta / [(f^2)']^2 \Lambda^2 + f'^2 \right) \end{aligned}$$

$$|G_{KL}| = R^4 \sin^2 \Delta$$

5.6 Spezielle pseudo-konische Abbildungen der Kugel

Ansatz: $r(\Delta) = a\Delta + b$ oder $f(\Delta) = a\Delta + b$
 $f'(\Delta) = a$

5.6.1 Stab-Werner Abbildung

Erstes Postulat: Der Hauptpunkt (Nordpol) soll *punktartig* abgebildet werden

$$\begin{aligned} b &= 0 \\ r(\Delta = 0) &= 0 \end{aligned}$$

Zweites Postulat: Ein Meridianbogen soll äquidistant abgebildet werden

$$\begin{aligned} a &= R \\ r(\Delta) &= R\Delta \end{aligned}$$

$$\alpha(\Lambda, \Delta = 0) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} = \frac{\sin \Delta}{\Delta} \Lambda = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\cos \Delta}{1} \Lambda = \Lambda$$

$$\alpha(\Lambda, \Delta) = \frac{\sin \Delta}{\Delta} \Lambda = \frac{\cos \Phi}{\frac{\pi}{2} - \Phi} \Lambda, r(\Delta) = R\Delta = R\left(\frac{\pi}{2} - \Phi\right)$$

inverse \uparrow Abbildungsgleichungen

$$\Lambda = \frac{r}{R \sin \frac{r}{R}} \alpha, \Phi = \frac{\pi}{2} - \frac{r}{R}$$

Abbildungsgleichungen

$$x = r \cos \alpha = R\left(\frac{\pi}{2} - \Phi\right) \cos\left(\frac{\cos \Phi}{\frac{\pi}{2} - \Phi} \Lambda\right)$$

$$y = r \sin \alpha = R\left(\frac{\pi}{2} - \Phi\right) \sin\left(\frac{\cos \Phi}{\frac{\pi}{2} - \Phi} \Lambda\right)$$

Hauptstreckungen

$$(\Lambda_S)_1^2 = \frac{1}{2} \left[2 + \Lambda^2 \left(\cos \Delta - \frac{\sin \Delta}{\Delta} \right)^2 + \Lambda \left(\cos \Delta - \frac{\sin \Delta}{\Delta} \right) \sqrt{4 + \Lambda^2 \left(\cos \Delta - \frac{\sin \Delta}{\Delta} \right)^2} \right]$$

$$(\Lambda_S)_2^2 = \frac{1}{2} \left[2 + \Lambda^2 \left(\cos \Delta - \frac{\sin \Delta}{\Delta} \right)^2 - \Lambda \left(\cos \Delta - \frac{\sin \Delta}{\Delta} \right) \sqrt{4 + \Lambda^2 \left(\cos \Delta - \frac{\sin \Delta}{\Delta} \right)^2} \right]$$

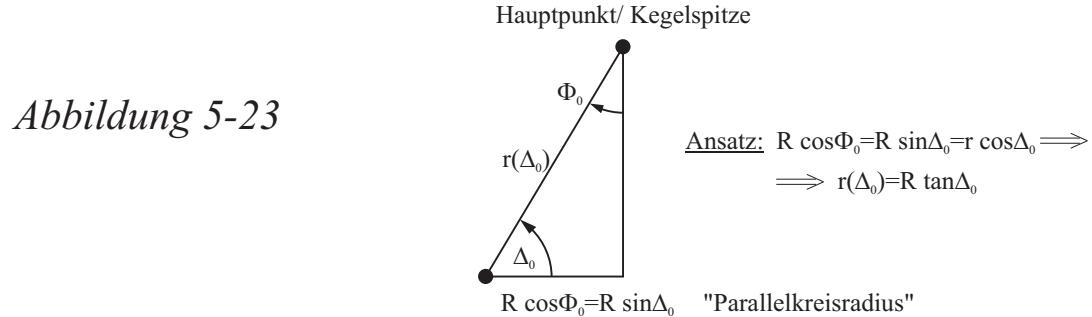
Johannes Werner (1514):

Libellus de quatuor terrarum orbis in plano configurationibus, Nova translatio
primi libri geographiae El. Ptolemai: Neuenberg (Latin)

(im Text heißt es „nach Anleitung von Johann Stabius“)
erste publizierte Karte von Petrus Apianus, Weltkarte Ingolstadt 1530 (*herzförmig: cordiform*) (deutscher Name: *Bienewitz*)

5.6.2 Bonne Abbildung

Postulat: Der Berührkreis des Kegels an die Kugel ("line-of-contact") soll *äquidistant* abgebildet werden.



$$\left. \begin{aligned} r(\Delta) &= a\Delta + b \\ r(\Delta_0) &= R \tan\Delta_0, \quad a = R \end{aligned} \right] \Rightarrow b = R(\tan\Delta_0 - \Delta_0)$$

Abbildungsgleichungen

$$\alpha(\Lambda, \Delta) = \frac{\sin\Delta}{\Delta - \Delta_0 + \tan\Delta_0}\Lambda = \frac{\cos\Phi}{\Phi_0 - \Phi + \cot\Phi_0}\Lambda$$

$$r(\Delta) = R(\Delta - \Delta_0) + R \tan\Delta_0 = R(\Phi_0 - \Phi) + R \cot\Phi_0$$

Notiz: $r(\Delta = 0) = R(\tan\Delta_0 - \Delta_0)$

d.h., daß der Hauptpunkt (Nordpol) zwar als Punkt abgebildet wird, aber *nicht* der Koordinatenursprung ($x = 0, y = 0$) ist!

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = R(\Phi_0 - \Phi + \cot\Phi_0) \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\cos\Phi}{\Phi_0 - \Phi + \cot\Phi_0}\Lambda\right) \\ \sin\left(\frac{\cos\Phi}{\Phi_0 - \Phi + \cot\Phi_0}\Lambda\right) \end{bmatrix}$$

inverse \uparrow Abbildungsgleichungen

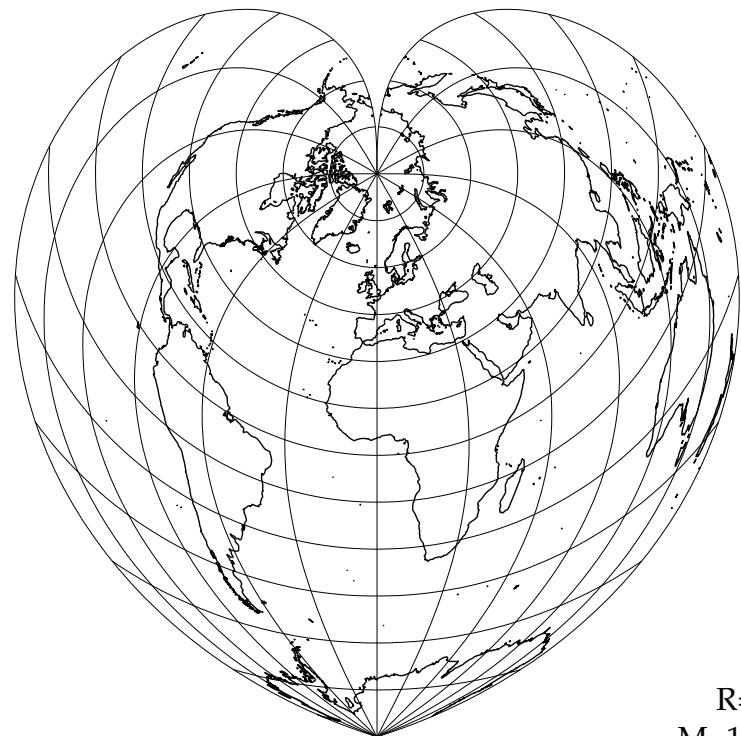
$$\Lambda = \frac{\frac{r}{R}\alpha}{\cos(\cot\Phi_0 + \Phi_0 - \frac{r}{R})}$$

$$\Phi = \cot\Phi_0 + \Phi_0 - \frac{r}{R}$$

Hauptstreckungen

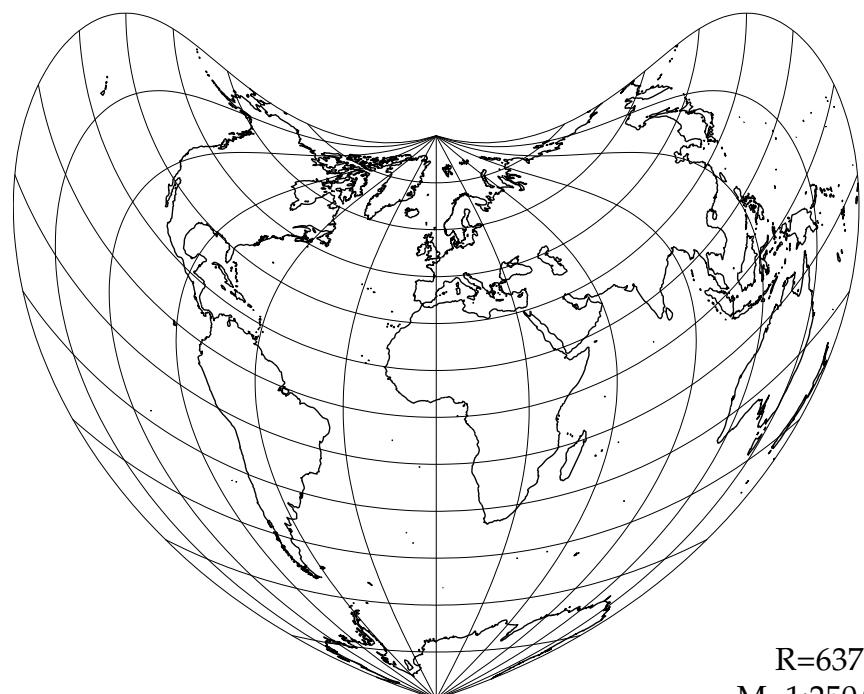
$$\begin{aligned}(\Lambda_S)_1^2 &= \frac{1}{2} \left[2 + \Lambda^2 \left(\cos \Delta - \frac{\sin \Delta}{\Delta + \tan \Delta_0 - \Delta_0} \right)^2 + \right. \\&\quad \left. + \Lambda \left(\cos \Delta - \frac{\sin \Delta}{\Delta + \tan \Delta_0 - \Delta_0} \right) \sqrt{4 + \Lambda^2 \left(\cos \Delta - \frac{\sin \Delta}{\Delta + \tan \Delta_0 - \Delta_0} \right)^2} \right] \\(\Lambda_S)_2^2 &= \frac{1}{2} \left[2 + \Lambda^2 \left(\cos \Delta - \frac{\sin \Delta}{\Delta + \tan \Delta_0 - \Delta_0} \right)^2 - \right. \\&\quad \left. - \Lambda \left(\cos \Delta - \frac{\sin \Delta}{\Delta + \tan \Delta_0 - \Delta_0} \right) \sqrt{4 + \Lambda^2 \left(\cos \Delta - \frac{\sin \Delta}{\Delta + \tan \Delta_0 - \Delta_0} \right)^2} \right]\end{aligned}$$

Rigobert Bonne ähnlich "Ptolemaeus II" (2. Jahrhundert A. D.), e.g. *Ptolemaeus' Geographia* (Francesco Berlinghieri, Florenz 1482): $\Phi_0 = 50^\circ N$ häufig gewählt!



R=6375km
M 1:250 000 000

Abbildung 5-24: Stab-Werner Abbildung



R=6375km
M 1:250 000 000

Abbildung 5-25: Bonne Abbildung

Diese Seite ist absichtlich leer

6 Abbildungen des Rotationsellipsoides auf die Kugel

Forderungen:

Die sphärische Länge ℓ soll *linear* von der rotationsellipsoidischen Länge L abhängen, d.h., daß Parallelkreise des Rotationsellipsoides in Parallelkreise der Kugel übergehen.

Die sphärische Breite b soll nur von der rotationsellipsoidischen Breite B abhängen, d.h., daß Meridiane des Rotationsellipsoides (Ellipsen als Linien konstanter Länge) in Meridiane der Kugel (Kreise als Linien konstanter Länge) übergehen.

Ansatz:

$$l = l_0 + a(L - L_0)$$

$$b = f(B)$$

L_0 ist die rotationsellipsoidische Länge eines ausgezeichneten Punktes $P_0(L_0, B_0)$ auf dem Rotationsellipsoid

$$\mathbf{X} = \Phi^{-1}(\mathbf{U}) :$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \frac{A}{\sqrt{1 - E^2 \sin^2 B}} \begin{bmatrix} \cos L \cos B \\ \sin L \cos B \\ (1 - E^2) \sin B \end{bmatrix}$$

große Halbachse des Rotationsellipsoides A

kleine Halbachse des Rotationsellipsoides B

erste numerische Exzentrizität $E = \sqrt{A^2 - B^2}/A = \sqrt{1 - B^2/A^2}$

zweite numerische Exzentrizität $E' = \sqrt{A^2 - B^2}/B = \sqrt{A^2/B^2 - 1}$

rotationsellipsoidische Länge L und Breite B

$$\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \arctan Y X^{-1} \\ \arctan \frac{1}{1-E^2}(Z/\sqrt{X^2+Y^2}) \end{bmatrix}$$

Metrikensor

$$G_{KL} = \langle \mathbf{G}_K | \mathbf{G}_L \rangle = \frac{\partial X^I}{\partial U^K} \frac{\partial X^I}{\partial U^L}$$

$$\mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_L := \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial L} = \frac{A \cos B}{\sqrt{1 - E^2 \sin^2 B}} (-\sin L \mathbf{E}_1 + \cos L \mathbf{E}_2)$$

$$\mathbf{G}_2 = \mathbf{G}_B := \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial B} = -\frac{A(1 - E^2)}{(1 - E^2 \sin^2 B)^{3/2}} (\cos L \sin B \mathbf{E}_1 + \sin L \sin B \mathbf{E}_2 - \cos B \mathbf{E}_3)$$

$$E_{\text{Gauß}} := \langle \mathbf{G}_L | \mathbf{G}_L \rangle = G_{LL} = G_{11} = \frac{A^2 \cos^2 B}{1 - E^2 \sin^2 B}$$

Rotationsellipsoid : $F_{\text{Gauß}} := \langle \mathbf{G}_L | \mathbf{G}_B \rangle = G_{LB} = G_{12} = 0$

$$G_{\text{Gauß}} := \langle \mathbf{G}_B | \mathbf{G}_B \rangle = G_{BB} = G_{22} = \frac{A^2(1 - E^2)^2}{(1 - E^2 \sin^2 B)^3}$$

Krümmungstensor

$$H_{KL} = \langle \mathbf{G}_3 | \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial U^K \partial U^L} \rangle \quad \text{oder} \quad \frac{1}{\sqrt{G}} [\mathbf{G}_{K,L}, \mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2] \quad \text{"Determinantendarstellung"}$$

$$\mathbf{G}_3 = \cos L \cos B \mathbf{E}_1 + \sin L \cos B \mathbf{E}_2 + \sin B \mathbf{E}_3 \quad \text{"Flächennormalenvektor"}$$

$$\mathbf{G}_3 := \frac{\mathbf{G}_1 \wedge \mathbf{G}_2}{||\mathbf{G}_1 \wedge \mathbf{G}_2||}, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial U^K \partial U^L} = \frac{\partial \mathbf{G}_K}{\partial U^L}$$

$$\sqrt{G} = \sqrt{\det G_{KL}} = \frac{A^2(1 - E^2) \cos B}{(1 - E^2 \sin^2 B)^2}$$

$$\frac{\partial \mathbf{G}_1}{\partial U^1} = \frac{\partial^2 X^I}{\partial L^2} \mathbf{E}_I = -\frac{A \cos B}{\sqrt{1 - E^2 \sin^2 B}} (\cos L \mathbf{E}_1 + \sin L \mathbf{E}_2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{G}_1}{\partial U^2} = \frac{\partial^2 X^I}{\partial L \partial B} \mathbf{E}_I = \frac{A(1 - E^2)}{(1 - E^2 \sin^2 B)^{3/2}} (\sin L \sin B \mathbf{E}_1 - \cos L \sin B \mathbf{E}_2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{G}_2}{\partial U^2} &= \frac{\partial^2 X^I}{\partial B^2} \mathbf{E}_I = \frac{A(1 - E^2)}{(1 - E^2 \sin^2 B)^{5/2}} (-\cos L \cos B (1 + 2E^2 \sin^2 B) \mathbf{E}_1 \\ &\quad - \sin L \cos B (1 + 2E^2 \sin^2 B) \mathbf{E}_2 - \sin B (1 + 2E^2 \sin^2 B - 3E^2) \mathbf{E}_3) \\ &= -\frac{A(1 - E^2)(1 + 2E^2 \sin^2 B)}{(1 - E^2 \sin^2 B)^{5/2}} \\ &\quad \cdot \left(\cos L \cos B \mathbf{E}_1 + \sin L \cos B \mathbf{E}_2 + \left(1 - \frac{3E^2}{1 + 2E^2 \sin^2 B}\right) \sin B \mathbf{E}_3 \right) \end{aligned}$$

$$H_{11} = \langle \mathbf{G}_3 | \frac{\partial \mathbf{G}_1}{\partial U^1} \rangle = \langle \mathbf{G}_3 | \frac{\partial \mathbf{G}_L}{\partial L} \rangle$$

$$= -\frac{A \cos B}{\sqrt{1 - E^2 \sin^2 B}} (\cos^2 L \cos B + \sin^2 L \cos B) = -\frac{A \cos^2 B}{\sqrt{1 - E^2 \sin^2 B}}$$

$$\begin{aligned}
H_{12} &= \langle \mathbf{G}_3 | \frac{\partial \mathbf{G}_1}{\partial U^2} \rangle = \langle \mathbf{G}_3 | \frac{\partial \mathbf{G}_L}{\partial B} \rangle \\
&= \frac{A(1-E^2)}{(1-E^2 \sin^2 B)^{3/2}} \left(\sin L \cos L \sin B \cos B - \sin L \cos L \sin B \cos B \right) \\
&= 0 \\
H_{22} &= \langle \mathbf{G}_3 | \frac{\partial \mathbf{G}_2}{\partial U^2} \rangle = \langle \mathbf{G}_3 | \frac{\partial \mathbf{G}_B}{\partial B} \rangle \\
&= -\frac{A(1-E^2)(1+2E^2 \sin^2 B)}{(1-E^2 \sin^2 B)^{5/2}} \left(\cos^2 B + \sin^2 B \frac{1+2E^2 \sin^2 B - 3E^2}{1+2E^2 \sin^2 B} \right) \\
&= -\frac{A(1-E^2)}{(1-E^2 \sin^2 B)^{5/2}} \left(\cos^2 B + 2E^2 \sin^2 B \cos^2 B + \sin^2 B + 2E^2 \sin^4 B - 3E^2 \sin^2 B \right) \\
&= -\frac{A(1-E^2)}{(1-E^2 \sin^2 B)^{5/2}} \left(1 - E^2 (3 \sin^2 B - 2 \sin^2 B \cos^2 B - 2 \sin^4 B) \right) \\
&= -\frac{A(1-E^2)}{(1-E^2 \sin^2 B)^{5/2}} \left(1 - E^2 (3 \sin^2 B - 2 \sin^2 B \cos^2 B - 2 \sin^2 B + 2 \sin^2 B \cos^2 B) \right) \\
&= -\frac{A(1-E^2)}{(1-E^2 \sin^2 B)^{5/2}} \left(1 - E^2 \sin^2 B \right) = -\frac{A(1-E^2)}{(1-E^2 \sin^2 B)^{3/2}}
\end{aligned}$$

$$L_{\text{Gauß}} := \langle \mathbf{G}_3 | \frac{\partial \mathbf{G}_1}{\partial U^1} \rangle = H_{11} = H_{LL} = -\frac{A \cos^2 B}{\sqrt{1-E^2 \sin^2 B}}$$

$$M_{\text{Gauß}} := \langle \mathbf{G}_3 | \frac{\partial \mathbf{G}_1}{\partial U^2} \rangle = H_{12} = H_{LB} = 0$$

$$N_{\text{Gauß}} := \langle \mathbf{G}_3 | \frac{\partial \mathbf{G}_1}{\partial U^2} \rangle = H_{22} = H_{BB} = -\frac{A(1-E^2)}{(1-E^2 \sin^2 B)^{3/2}}$$

Radius der Kugel r
sphärische Länge ℓ und Breite b

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \arctan yx^{-1} \\ \arctan z/\sqrt{x^2+y^2} \end{bmatrix}$$

Metriktenesor

$$g_{kl} = \langle \mathbf{g}_k | \mathbf{g}_l \rangle = \frac{\partial x^i}{\partial u^k} \frac{\partial x^i}{\partial u^l}$$

$$\mathbf{g}_1 = \mathbf{g}_l := \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial l} = r \cos b \left(-\sin l \mathbf{e}_1 + \cos l \mathbf{e}_2 \right)$$

$$\mathbf{g}_2 = \mathbf{g}_b := \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial b} = -r \cos l \sin b \mathbf{e}_1 - r \sin l \sin b \mathbf{e}_2 + r \cos b \mathbf{e}_3$$

$$e_{\text{Gauß}} := \langle \mathbf{g}_l | \mathbf{g}_l \rangle = g_{ll} = g_{11} = r^2 \cos^2 b$$

$$f_{\text{Gauß}} := \langle \mathbf{g}_l | \mathbf{g}_b \rangle = g_{lb} = g_{12} = 0$$

$$g_{\text{Gauß}} := \langle \mathbf{g}_b | \mathbf{g}_b \rangle = g_{bb} = g_{22} = r^2$$

Krümmungstensor

$$h_{kl} = \langle \mathbf{g}_3 | \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^k \partial u^l} \rangle = \langle \mathbf{g}_3 | \frac{\partial \mathbf{g}_k}{\partial u^l} \rangle = \frac{1}{\sqrt{g}} [\mathbf{g}_{k,l}, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2]$$

$\mathbf{g}_3 = \cos l \cos b \mathbf{e}_1 + \sin l \cos b \mathbf{e}_2 + \sin b \mathbf{e}_3$ "Flächennormalenvektor"

$$\mathbf{g}_3 := \frac{\mathbf{g}_1 \wedge \mathbf{g}_2}{||\mathbf{g}_1 \wedge \mathbf{g}_2||}, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^k \partial u^l} = \frac{\partial \mathbf{g}_k}{\partial u^l}$$

$$\sqrt{g} = r^2 \cos b$$

$$l_{\text{Gauß}} := \langle \mathbf{g}_3 | \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial u^1} \rangle = h_{11} = h_{ll} = -r \cos^2 b$$

$$m_{\text{Gauß}} := \langle \mathbf{g}_3 | \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial u^2} \rangle = h_{12} = h_{lb} = 0$$

$$n_{\text{Gauß}} := \langle \mathbf{g}_3 | \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial u^2} \rangle = h_{22} = h_{bb} = -r$$

Abbildungsgleichungen

$$l = l_0 + a(L - L_0), \quad b = f(B) \quad \text{unbekannt}$$

Deformationstensor erster Art

$$ds^2 = g_{kl} du^k du^l = g_{kl} \frac{\partial u^k}{\partial U^K} \frac{\partial u^l}{\partial U^L} dU^K dU^L$$

$$c_{KL} := g_{kl} \frac{\partial u^k}{\partial U^K} \frac{\partial u^l}{\partial U^L}, \quad I = ds^2 = c_{KL} dU^K dU^L$$

erste Fundamentalform der Bildfläche

$$\frac{\partial u^1}{\partial U^1} = \frac{\partial l}{\partial L} = a, \quad \frac{\partial u^1}{\partial U^2} = \frac{\partial l}{\partial B} = 0$$

$$\frac{\partial u^2}{\partial U^1} = \frac{\partial b}{\partial L} = 0, \quad \frac{\partial u^2}{\partial U^2} = \frac{\partial b}{\partial B} = f'(B)$$

$$\frac{\partial u^k}{\partial U^K} = \begin{bmatrix} \frac{\partial l}{\partial L} & \frac{\partial l}{\partial B} \\ \frac{\partial b}{\partial L} & \frac{\partial b}{\partial B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & f'(B) \end{bmatrix}$$

$$c_{11} = c_{LL} = g_{kl} \frac{\partial u^k}{\partial L} \frac{\partial u^l}{\partial L} = g_{11} \left(\frac{\partial l}{\partial L} \right)^2 + g_{22} \left(\frac{\partial b}{\partial L} \right)^2 \text{ falls } g_{12} = 0$$

$$c_{11} = c_{LL} = a^2 r^2 \cos^2 b$$

$$c_{12} = c_{LB} = g_{kl} \frac{\partial u^k}{\partial L} \frac{\partial u^l}{\partial B} = g_{11} \left(\frac{\partial l}{\partial L} \right) \left(\frac{\partial l}{\partial B} \right) + g_{22} \left(\frac{\partial b}{\partial L} \right) \left(\frac{\partial b}{\partial B} \right) \text{ falls } g_{12} = 0$$

$$c_{12} = c_{LB} = 0$$

$$c_{22} = c_{BB} = g_{kl} \frac{\partial u^k}{\partial B} \frac{\partial u^l}{\partial B} = g_{11} \left(\frac{\partial l}{\partial B} \right)^2 + g_{22} \left(\frac{\partial b}{\partial B} \right)^2 \text{ falls } g_{12} = 0$$

$$c_{22} = c_{BB} = r^2 f'^2(B)$$

$$c_{KL} = \boxed{\begin{bmatrix} a^2 r^2 \cos^2 b & 0 \\ 0 & r^2 f'^2(B) \end{bmatrix}}$$

Hauptstreckungen

$$\Lambda_1 = \sqrt{c_{11}/G_{11}} = \left[\frac{a^2 r^2 \cos^2 b}{A^2 \cos^2 B} (1 - E^2 \sin^2 B) \right]^{1/2} = \frac{ar \cos b}{N \cos B}$$

$$\Lambda_2 = \sqrt{c_{22}/G_{22}} = \left[\frac{r^2 f'^2(B)}{A^2 (1 - E^2)^2} (1 - E^2 \sin^2 B)^3 \right]^{1/2} = \frac{rf'(B)}{M} = \frac{r}{M} \frac{db}{dB}$$

Krümmungstensor

Rotationsellipsoid

$$\text{Grad } \mathbf{G}_3 = \begin{array}{c} -HG^{-1} \\ 2 \times 1 \end{array} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 \\ \mathbf{G}_2 \end{bmatrix}_{2 \times 2} = K \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 \\ \mathbf{G}_2 \end{bmatrix}_{2 \times 1}$$

$K := -HG^{-1}$ heißt Gaußscher Krümmungstensor, hier des Rotationsellipsoides

$$N := \frac{A}{\sqrt{1 - E^2 \sin^2 B}}, \quad M := \frac{A(1 - E^2)}{(1 - E^2 \sin^2 B)^{3/2}}$$

Querkrümmungsradius Meridiankrümmungsradius

$$K := -HG^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{N} & 0 \\ 0 & \frac{1}{M} \end{bmatrix}, \quad \kappa_1 = \frac{1}{N}, \quad \kappa_2 = \frac{1}{M}$$

$$\text{Grad } \mathbf{G}_3 = K \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 \\ \mathbf{G}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_1 \mathbf{G}_1 \\ \kappa_2 \mathbf{G}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_1 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial L}, \quad \mathbf{G}_2 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial B}$$

Kugel

$$\text{grad } \mathbf{g}_3 = \begin{array}{c} -hg^{-1} \\ 2 \times 1 \end{array} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \end{bmatrix}_{2 \times 2} = k \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \end{bmatrix}_{2 \times 1}$$

$$k := -hg^{-1} = \begin{bmatrix} +\frac{1}{r} & 0 \\ 0 & +\frac{1}{r} \end{bmatrix}, \quad \kappa_1 = \kappa_2 = \frac{1}{r}$$

r ist gleichzeitig Krümmungsradius der Kugel

$$\text{grad } \mathbf{g}_3 = k \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_1 \mathbf{g}_1 \\ \kappa_2 \mathbf{g}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}_1 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial l}, \quad \mathbf{g}_2 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial b}$$

Deformationstensor zweiter Art

$$II := h_{kl} du^k du^l = h_{kl} \frac{\partial u^k}{\partial U^L} \frac{\partial u^l}{\partial U^K} dU^K dU^L$$

$$d_{KL} := h_{kl} \frac{\partial u^k}{\partial U^K} \frac{\partial u^l}{\partial U^L}, \quad II = d_{KL} dU^K dU^L$$

$$\frac{\partial u^1}{\partial U^1} = \frac{\partial l}{\partial L} = a, \quad \frac{\partial u^1}{\partial U^2} = \frac{\partial l}{\partial B} = 0$$

$$\frac{\partial u^2}{\partial U^1} = \frac{\partial b}{\partial L} = 0, \quad \frac{\partial u^2}{\partial U^2} = \frac{\partial b}{\partial B} = f'(B)$$

$$\frac{\partial u^k}{\partial U^K} = \begin{bmatrix} \frac{\partial l}{\partial L} & \frac{\partial l}{\partial B} \\ \frac{\partial b}{\partial L} & \frac{\partial b}{\partial B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & f'(B) \end{bmatrix}$$

$$d_{11} = d_{LL} = h_{kl} \frac{\partial u^k}{\partial L} \frac{\partial u^l}{\partial L} = h_{11} \left(\frac{\partial l}{\partial L} \right)^2 + h_{22} \left(\frac{\partial b}{\partial L} \right)^2 \text{ falls } h_{12} = 0$$

$$d_{11} = d_{LL} = -a^2 r \cos^2 b$$

$$d_{12} = d_{LB} = h_{kl} \frac{\partial u^k}{\partial L} \frac{\partial u^l}{\partial B} = h_{11} \left(\frac{\partial l}{\partial L} \right) \left(\frac{\partial l}{\partial B} \right) + h_{22} \left(\frac{\partial b}{\partial L} \right) \left(\frac{\partial b}{\partial B} \right) \text{ falls } h_{12} = 0$$

$$d_{12} = d_{LB} = 0$$

$$d_{22} = d_{BB} = h_{kl} \frac{\partial u^k}{\partial B} \frac{\partial u^l}{\partial B} = h_{11} \left(\frac{\partial l}{\partial B} \right)^2 + h_{22} \left(\frac{\partial b}{\partial B} \right)^2 \text{ falls } h_{12} = 0$$

$$d_{22} = d_{BB} = -r f'(B)^2$$

$$d_{KL} = \boxed{\begin{bmatrix} -a^2 r \cos^2 b & 0 \\ 0 & -r f'^2(B) \end{bmatrix}}$$

Eigenwerte

$${}_a\Lambda_1 = \sqrt{d_{11}/H_{11}} = \sqrt{\frac{a^2 r \cos^2 b}{A \cos^2 B} \sqrt{1 - E^2 \sin^2 B}}$$

$${}_a\Lambda_2 = \sqrt{d_{22}/H_{22}} = \sqrt{\frac{r f'^2(B)}{A(1 - E^2)} (1 - E^2 \sin^2 B)^{3/2}}$$

6.1 Konforme Abbildung des Rotationsellipsoides auf die Kugel

Forderung der Konformität:

$$\Lambda_1 = \Lambda_2 \implies$$

$$\frac{ar \cos b}{A \cos B} \sqrt{1 - E^2 \sin^2 B} = \frac{r \frac{db}{dB}}{A(1 - E^2)} (1 - E^2 \sin^2 B)^{3/2} \implies$$

$$\boxed{\frac{db}{\cos b} = \frac{1 - E^2}{1 - E^2 \sin^2 B} \frac{a}{B \cos B} dB}$$

Standardintegrale

(i)

$$\int \frac{db}{\cos b} = \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{b}{2}\right) =: q$$

sphärische isometrische Breite

(ii)

$$\int \frac{1 - E^2}{1 - E^2 \sin^2 B} \frac{dB}{\cos B}$$

Partialbruchzerlegung

$$\frac{1 - E^2}{1 - E^2 \sin^2 B} \frac{1}{\cos B} = \frac{1}{\cos B} - \frac{E}{2} \left(\frac{E \cos B}{1 + E \sin B} + \frac{E \cos B}{1 - E \sin B} \right)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1 - E^2}{1 - E^2 \sin^2 B} \frac{dB}{\cos B} &= \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{B}{2}\right) - \frac{E}{2} \ln \frac{1 + E \sin B}{1 - E \sin B} \\ &= \ln \left[\left(\frac{1 - E \sin B}{1 + E \sin B} \right)^{E/2} \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{B}{2}\right) \right] =: Q \end{aligned}$$

ellipsoidische isometrische Breite

(1) \wedge (2):

$$\ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{b}{2}\right) = a \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{B}{2}\right) - \frac{aE}{2} \ln \frac{1 + E \sin B}{1 - E \sin B} + a \ln c$$

oder

$$q = a(Q + k), \quad k = \ln c, \quad c = \exp k$$

c, k sind Integrationskonstanten !

Festlegung der Integrationskonstanten

Die Unbekannten (a, c, r) sind noch festzulegen !

1. Alternative gemäß Vorschlag C.F. Gauß (1822):

Im ausgezeichneten Punkt (sog. *Fundamentalpunkt*) $P_0(L_0, B_0)$ soll $r = N(B_0) = N_0$ gleich dem Querkrümmungsradius sein, d.h.

$$r = N_0 = \frac{A}{\sqrt{1 - E^2 \sin^2 B_0}}$$

2. Alternative gemäß Vorschlag C.F. Gauß (1844):

Das Vergrößerungsverhältnis um einen ausgezeichneten Punkt (sog. Fundamentalpunkt) $P_0(L_0, B_0)$ soll *möglichst langsam* wachsen:

$$\ln \Lambda = \ln \Lambda_0 + \left(\frac{d \ln \Lambda}{db}\right)_{b_0} (b - b_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 \ln \Lambda}{db^2}\right)_{b_0} (b - b_0)^2 + \mathcal{O}((b - b_0)^3)$$

Postulate:

(i) $\Lambda_0 = 1$: Im ausgezeichneten Punkt, dem sog. Fundamentalpunkt, soll die Abbildung *längentreu* sein !

$$\implies \ln \Lambda_0 = 0$$

$$(ii) \quad (\ln \Lambda)'(b_0) = 0$$

$$(iii) \quad (\ln \Lambda)''(b_0) = 0$$

Die Postulate 1., 2., 3. fordern, daß $\ln \Lambda$ im ausgezeichneten Punkt, dem sog. Fundamentalpunkt, eine horizontale Wendetangente besitzt.

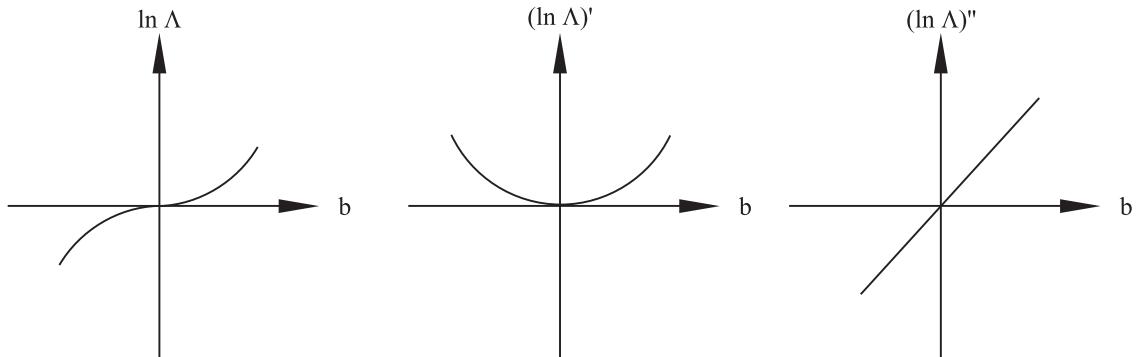


Abbildung 6-1

Detailrechnung:

$$\text{Hauptstreckung } \Lambda = \frac{ar \cos b}{\frac{A \cos B}{\sqrt{1 - E^2 \sin^2 B}}} = \frac{ar \cos b}{N(B) \cos B}$$

Querkrümmungsradius $N(B)$

Satz (konforme Abbildung Rotationsellipsoid \Rightarrow Kugel)

Die Abbildungsgleichungen $(L, B) \mapsto (l, b)$ lauten

$$l = l_0 + a(L - L_0)$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{b}{2}\right) = c^a \left[\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{B}{2}\right) \right]^a \left(\frac{1 - E \sin B}{1 + E \sin B} \right)^{aE/2}$$

$$a = \cos B_0 \sqrt{\frac{N_0}{M_0} + \tan^2 B_0} = \sqrt{1 + E'^2 \cos^4 B_0}$$

$$c = \frac{[\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{b_0}{2}\right)]^{1/a}}{\left(\frac{1 - E \sin B_0}{1 + E \sin B_0}\right)^{E/2} \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{B_0}{2}\right)} = \frac{\exp(Q_0/a)}{\exp Q_0}$$

$$\ln c = \frac{1}{a} q_0 - Q_0$$

$$\tan b_0 = \sqrt{\frac{M_0}{N_0}} \tan B_0$$

Relativ zu dem längentreu abgebildeten Fundamentalpunkt $P_0 = P(L_0, B_0) \rightarrow p_0 = p(l_0, b_0)$ erfüllen die drei Postulate an die Hauptstreckung $\Lambda(B_0)$ im Fundamentalpunkt, nämlich $\Lambda_0 = 1, \Lambda'_0 = 0, \Lambda''_0 = 0$! Der Kugelradius beträgt

$$r = \sqrt{M_0 N_0}$$

Beweis:

1. Postulat: $\Lambda_0 = 1$

$$\Lambda_0 = \frac{ar \cos b_0}{N_0 \cos B_0} = 1 \implies r = \frac{N_0 \cos B_0}{a \cos b_0}$$

2. Postulat: $\Lambda'_0 = 0 \iff (\ln \Lambda)'_0 = \frac{\Lambda'_0}{\Lambda_0} = 0$

$$\ln \Lambda = \ln ar + \ln \cos b - \ln[N(B) \cos B]$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d \ln \Lambda}{db} &= -\frac{\sin b}{\cos b} - \frac{N'(B) \cos B - N(B) \sin B}{N(B) \cos B} \frac{dB}{db} \\ N(B) &= \frac{A}{\sqrt{1 - E^2 \sin^2 B}}, \quad N'(B) = +\frac{AE^2 \sin B \cos B}{(1 - E^2 \sin^2 B)^{3/2}} \\ \frac{dB}{db} &= \frac{1 - E^2 \sin^2 B}{1 - E^2} \frac{\cos B}{a \cos b} = \frac{N(B)}{M(B)} \frac{\cos B}{a \cos b} \\ \frac{d \ln \Lambda}{db} &= -\frac{\sin b}{\cos b} + \frac{\sin B}{a \cos b} = -\tan b + \frac{\sin B}{a \cos b} \\ (\ln \Lambda)'(b_0, B_0) &= 0 \iff a \sin b_0 = \sin B_0 \end{aligned} \right] \implies$$

3. Postulat: $\Lambda''_0 = 0 \iff (\ln \Lambda)''_0 = 0$

$$\frac{d^2 \ln \Lambda}{db^2} = -\frac{1}{\cos^2 b} + \frac{a \cos b \cos B \frac{dB}{db} + a \sin b \sin B}{a^2 \cos^2 b}$$

$$\frac{d^2 \ln \Lambda}{db^2} = -\frac{1}{\cos^2 b} \left[1 - \frac{1}{a} \sin b \sin B - \frac{1}{a} \cos b \cos B \frac{dB}{db} \right]$$

$$\frac{d^2 \ln \Lambda}{db^2}(b_0, B_0) = 0 \iff a \cos b_0 = \sqrt{\frac{1 - E^2 \sin^2 B_0}{1 - E^2}} \cos B_0$$

Zwischenergebnisse

$$1. r = \frac{N_0 \cos B_0}{a \cos b_0}$$

$$2. a \sin b_0 = \sin B_0$$

$$3. a \cos b_0 = a \sqrt{1 - \sin^2 b_0} = \sqrt{\frac{1 - E^2 \sin^2 B_0}{1 - E^2}} \cos B_0 = \sqrt{\frac{N_0}{M_0}} \cos B_0$$

I. Kombiniere 1. und 3. und finde

$$r = \frac{A \cos B_0}{a \cos b_0} \frac{1}{\sqrt{1 - E^2 \sin^2 B_0}} = \frac{A \sqrt{1 - E^2}}{1 - E^2 \sin^2 B_0} = \sqrt{M_0 N_0} \quad \text{q.e.d.}$$

II. Kombiniere 2. und 3. und finde

$$\tan b_0 = \sqrt{\frac{1 - E^2}{1 - E^2 \sin^2 B_0}} \tan B_0 = \sqrt{\frac{M_0}{N_0}} \tan B_0 \quad \text{q.e.d.}$$

III. Kombiniere 2. und 3. und finde

$$a = \sqrt{\sin^2 B_0 + \frac{N_0}{M_0} \cos^2 B_0} = \cos B_0 \sqrt{\tan^2 B_0 + \frac{N_0}{M_0}} \quad \text{q.e.d.}$$

Beispiel: falls $N_0/M_0 = 1$, dann $a = 1$

IV. Löse die Abbildungsgleichung am Fundamentalpunkt $P_0 = P(L_0, B_0)$ nach der Integrationskonstanten c auf, um zu finden

$$c^a = \frac{\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{b_0}{2})}{(\frac{1-E \sin B_0}{1+E \sin B_0})^{aE/2} \tan^a(\frac{\pi}{4} + \frac{B_0}{2})} \implies$$

$$c = \frac{[\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{b_0}{2})]^{1/a}}{(\frac{1-E \sin B_0}{1+E \sin B_0})^{E/2} \tan(\frac{\pi}{4} + \frac{B_0}{2})} \quad \text{q.e.d.}$$

Hauptstreckungen

$$\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda = \frac{a \sqrt{M_0 N_0} \cos b}{N(B) \cos B}, \quad a \text{ siehe oben}$$

$$b = 2 \arctan \left(c^a [\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{B}{2})]^a (\frac{1 - E \sin B}{1 + E \sin B})^{aE/2} \right) - \frac{\pi}{2}$$

6.2 Flächentreue Abbildung des Rotationsellipsoides auf die Kugel

Forderung der Flächentreue:

$$\Lambda_1 \Lambda_2 = 1 \implies$$

$$\frac{ar \cos b}{A \cos B} \sqrt{1 - E^2 \sin^2 B} * \frac{r \frac{db}{dB}}{A(1 - E^2)} (1 - E^2 \sin^2 B)^{3/2} = 1$$

$$r^2 \cos b db = \frac{1}{a} \frac{dB}{(1 - E^2 \sin^2 B)^2} A^2 (1 - E^2) \cos B$$

Integral bei Kegel: Lambert konform (s. auch Kap. 5.4.3)

$$r^2 \sin b = \frac{A^2}{a} (1 - E^2) \int \frac{\cos B}{(1 - E^2 \sin^2 B)^2} dB + c$$

$$\Delta = \frac{\pi}{2} - B \implies -d\Delta = dB$$

$$c := 0$$

$$\begin{aligned} - \int \frac{\sin \Delta}{(1 - E^2 \cos^2 \Delta)^2} d\Delta &= \frac{\cos \Delta}{2(1 - E^2 \cos^2 \Delta)} + \frac{1}{4E} \ln \frac{1 + E \cos \Delta}{1 - E \cos \Delta} \\ &= \frac{\sin B}{2(1 - E^2 \sin^2 B)} + \frac{1}{4E} \ln \frac{1 + E \sin B}{1 - E \sin B} \end{aligned}$$

s. flächentreue Kegelabbildungen (s. auch Kap. 5.4.3)

$$ar^2 \sin b = A^2 (1 - E^2) \left[\frac{\sin B}{2(1 - E^2 \sin^2 B)} + \frac{1}{4E} \ln \frac{1 + E \sin B}{1 - E \sin B} \right]$$

$$\sin b = \frac{A^2}{ar^2} (1 - E^2) \left[\frac{\sin B}{2(1 - E^2 \sin^2 B)} + \frac{1}{4E} \ln \frac{1 + E \sin B}{1 - E \sin B} \right]$$

"authalic latitude b" (O.S. Adams (1921 p.65), J.P. Snyder (1962 p.19))

Case 1: $A = r, a = 1$

Case 2: gleiche Oberfläche

$$4\pi r^2 = 4\pi A^2 \left[\frac{1}{2} + \frac{1 - E^2}{4E} \ln \frac{1 + E}{1 - E} \right]$$

$$\implies r^2 = \frac{1}{2} A^2 \left[1 + \frac{1 - E^2}{2E} \ln \frac{1 + E}{1 - E} \right] \implies$$

$$\sin b = \frac{1}{a} (1 - E^2) \frac{\frac{\sin B}{1 - E^2 \sin^2 B} + \frac{1}{2E} \frac{1 + E \sin B}{1 - E \sin B}}{1 + \frac{1 - E^2}{2E} \ln \frac{1 + E}{1 - E}}$$

e.g. $a = 1$

$$\Lambda_1 = \frac{ar \cos b}{A \cos B} \sqrt{1 - E^2 \sin^2 B}, \quad \Lambda_2 = \frac{r \frac{db}{dB}}{A(1 - E^2)} (1 - E^2 \sin^2 B)^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{db}{dB} = \frac{1}{a \cos b} \frac{1}{r^2} \frac{A^2 (1 - E^2)}{(1 - E^2 \sin^2 B)^2} \cos B \implies$$

$$\Lambda_2 = \frac{A \cos B}{a \cos b} \frac{1}{r} (1 - E^2 \sin^2 B)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{a} \frac{A \cos B}{r \cos b} \frac{1}{\sqrt{1 - E^2 \sin^2 B}}$$

7 Literaturverzeichnis

- Airy G B (1861): Explanation of a projection by balance of errors for maps applying to a very large extent of the earth's surface and comparison of this projection with other projections. *Philosophical Magazine and Journal of Science* 22 (1861) 409-421
- Albers H C (1805): Beschreibung einer neuen Kegelprojektion: *Zach's Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde Nov.* (1805) 450-459
- Bonacker W und Anliker E (1930): Heinrich Christian Albers, der Vorheber der flächentreuen Kegelrumpfprojektion. *Petermann's Geographische Mitteilungen* 76 (1930) 238-240
- Bretterbauer K (2001): Eine Variante der trimetrischen Projektion. *Kartographische Nachrichten* 51 (2001) 130-132
- Bretterbauer K (2001): Die Himmelssphäre, eben dargestellt. *Sterne und Weltraum* (2001) 276-279
- Canters F and Decleir H (1989): *The World in Perspective. A Directory of World Map Projections.* Chichester
- Francula N (1971): Die vorteilhaftesten Abbildungen in der Atlaskartographie, Dissertation, Universität Bonn, Bonn
- Graffarend E W (1983): Reference Frame Rotation - regularized theory by quaternions and spinors -. In: Schwarz K P and Lachapelle G (eds., 1983): *Geodesy in Transition*, 185-225, Calgary 1983
- Graffarend E W (1995): The optimal universal transverse Mercator projection. *Manuscripta geodaetica* 20 (1995) 421-468
- Graffarend E W and Engels J (1992): A global representation of ellipsoidal heights – geoidal undulations or topographic heights – in terms of orthonormal functions; Part 1 and 2: “Amplitude and Phase modified” spherical harmonic functions. *Manuscripta geodaetica* 17 (1992) 52-58, 59-64
- Graffarend E W (2000): Gaußsche flächennormale Koordinaten im Geometrie- und Schwereraum. *Zeitschrift für Vermessungswesen* 125 (2000) 136-139
- Graffarend E W and Heidenreich A (1995): The generalized Mollweide projection of the biaxial ellipsoid. *Bulletin Géodésique* 69 (1995) 164-172

- Graffarend E W and Krumm F (1996): The Stokes and Vening-Meinesz functionals in a moving tangent space. *J. Geodesy* 70 (1996) 696-713
- Graffarend E W and Niermann A (1984): Beste Zylinderabbildungen. *Kartographische Nachrichten* 34 (1984) 103-107
- Graffarend E W and Syffus R (1997a): Mixed cylindric map projections of the ellipsoid of revolution. *J. Geodesy* 71 (1997) 685-694
- Graffarend E W and Syffus R (1997b): The Hammer projection of the ellipsoid of revolution (azimuthal, transverse, rescaled equiareal). *J. Geodesy* 71 (1997) 736-748
- Graffarend E W and Syffus R (1997c): Map projections of project surveying objects and architectural structures. Part 1,2: *Zeitschrift für Vermessungswesen* 122 (1997) 457-465, 560-566
- Graffarend E W and Syffus R (1998a): Map projections of project surveying objects and architectural structures. Part 3,4: *Zeitschrift für Vermessungswesen* 123 (1998) 93-97, 128-1326
- Graffarend E W and Syffus R (1998b): The optimal Mercator projection and the optimal polycylindric projection of conformal type – case-study Indonesia. *J. Geodesy* 72 (1998) 251-258
- Hojovec V and Jokl L (1981): Relation between the extreme angular and aerial distortion in cartographic representation. *Studia geoph. et geod.* 25 (1981) 132/151
- Hoschek J (1984): *Mathematische Grundlagen der Kartographie*. Mannheim
- Jackson J E (1987): *Sphere, Spheroid and Projections for Surveyors*. Oxford
- Joos G. (1989): *Pseudokonische und Pseudoazimutale Abbildungen*. Selbständige Arbeit, Studiengang Vermessungswesen an der Universität Stuttgart, Stuttgart 1989
- Jordan W (1875): Zur Vergleichung der Soldner'schen rechtwinkligen sphärischen Coordinaten mit der Gauss'schen conformen Abbildung des Ellipsoids auf die Ebene. *Zeitschrift für Vermessungswesen* IV (1875) 27-32
- Jordan W (1896): Der mittlere Verzerrungsfehler. *Zeitschrift für Vermessungswesen* XXV (1896) 249-252
- Kaltsikis C (1980): Über bestangepasste konforme Abbildungen, Dissertation, Technische Universität München, München

- Kavrajski VV (1958): Ausgewählte Werke, Mathematische Kartographie, Allgemeine Theorie der kartographischen Abbildungen, Kegel- und Zylinderabbildungen, ihre Anwendung, russ., GS VPM 1958
- Kuntz E (1990): Kartennetzentwurfslehre. Grundlagen und Anwendungen, 2. Auflage. Karlsruhe
- Maling D H (1993): Coordinate Systems and Map Projections, 2nd Edition. Oxford
- McDonnell P W (1991): Introduction to Map Projections, 2nd Edition.
- Pearson F (1990): Map Projections: Theory and Applications. Boca Raton
- Richardus P and Adler R K (1972): Map Projections for Geodesists, Cartographers and Geographers. Amsterdam
- Snyder J P (1985): Computer-Assisted Map Projection Research. U.S. Geological Survey Bulletin 1629. United States Government Printing Office.
- Snyder J P (1987): Map Projections - A Working Manual. U.S. Geological Survey Professional Paper 1395. United States Government Printing Office, Washington. 1987
- Snyder J P (1993): Flattening the Earth. Two Thousand Years of Map Projections. Chicago
- Snyder J P and Steward H (eds.,1988): Bibliography of Map Projections. U.S. Geological Survey Bulletin 1856. United States Government Printing Office.
- Snyder J P and Voxland P M (1989): An Album of Map Projections. U.S. Geological Survey Professional Paper 1453. United States Government Printing Office.
- Uhlig F (1979): A recurring theorem about pairs of quadratic forms and extensions: A survey. *Linear Algebra Appl.* 25 (1979) 219-237

8 Software

8.1 Freeware, Shareware

Microcam for Windows (PC): <http://www.ilstu.edu/microcam/>

Amiglobe (PC): <http://www.uni-stuttgart.de/gi/education/kapro/amgb2001.zip>

GMT (Unix, PC): <http://gmt.soest.hawaii.edu>

8.2 Lizenziert

Matlab mit Mapping Toolbox (PC): CIP-Pool Studiengang Geodäsie und Geo-informatik

9 Anlagenverzeichnis

Bretterbauer K (2001): Eine Variante der trimetrischen Projektion. Kartographische Nachrichten 51 (2001) 130-132

Bretterbauer K (2001): Die Himmelssphäre, eben dargestellt. Sterne und Weltraum (2001) 276-279

Grafarend E W (1995): The optimal universal transverse Mercator projection. Manuscripta geodaetica 20 (1995) 421-468

Grafarend E W and Niermann A (1984): Beste Zylinderabbildungen, Kartographische Nachrichten 34 (1984) 103-107