

Studiengang Vermessungswesen  
an der Universität Stuttgart

---

Diplomarbeit

Volker Siegfried Schwarze

Relativistische Phasenmessung  
zu künstlichen  
Erdsatelliten

Stuttgart 1991



# Inhaltsverzeichnis

|                                                                                                          |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 0. Einleitung.....                                                                                       | 3  |
| 1. Definition der Bezugssysteme.....                                                                     | 4  |
| 1-1. Das Lokale Inertialsystem.....                                                                      | 4  |
| 1-2. Das erdfeste $f^*$ – System.....                                                                    | 4  |
| 1-3. Das erdfeste $f^*$ – System.....                                                                    | 5  |
| 2. Spezielle Relativitätstheorie.....                                                                    | 6  |
| 2-1. Die Metrik des Minkowski–Raumes.....                                                                | 6  |
| 2-2. Elektromagnetismus.....                                                                             | 7  |
| 2-21. Die Maxwellschen Gleichungen.....                                                                  | 7  |
| 2-22. Die Materialgesetze.....                                                                           | 9  |
| 2-23. Wellenausbreitung im inhomogenen Medium.....                                                       | 10 |
| 2-24. Die lorentzinvariante Formulierung der Eikonalgleichung .....                                      | 13 |
| 3. Allgemeine Relativitätstheorie.....                                                                   | 16 |
| 3-1. Grundlagen der ART.....                                                                             | 16 |
| 3-11. Riemannsche Geometrie.....                                                                         | 17 |
| 3-12. Die Einsteinschen Feldgleichungen.....                                                             | 20 |
| 3-2. Die elektrodynamischen Grundgleichungen in Anwesenheit eines Gra-<br>vitationsfeldes .....          | 22 |
| 3-21. Das Äquivalenzprinzip.....                                                                         | 22 |
| 3-3. Die allgemein kovariante Eikonalgleichung.....                                                      | 24 |
| 3-4. Bewegungsgleichung einer elektromagnetischen Welle im inhomogenen<br>Medium.....                    | 25 |
| 3-41. Herleitung eines Variationsprinzips.....                                                           | 26 |
| 3-42. Wellenausbreitung im inhomogenen Medium .....                                                      | 30 |
| 3-421. DG–System für den 4–Ortsvektor und Wellenvektor ..                                                | 30 |
| 3-422. DG für den 4–Ortsvektor .....                                                                     | 34 |
| 3-5. Uhren im Gravitationsfeld .....                                                                     | 36 |
| 4. Phasenmessungen .....                                                                                 | 39 |
| 4-0. Von der nichtrelativistischen Phasenmessung zur allgemein relati-<br>vistischen Phasenmessung ..... | 39 |
| 4-1. Einfache Phasendifferenzmessungen .....                                                             | 40 |
| 4-2. Diskussion weiterer Beobachtungsverfahren .....                                                     | 44 |
| 4-21. Differenz zw. zwei aufeinanderfolgenden Meßepochen ( $\delta\Delta\phi_Q^\beta$ ) .....            | 44 |
| 4-22. Differenz zwischen 2 Bodenstationen $\Delta(\Delta\phi_Q^\beta)$ .....                             | 44 |
| 4-23. Differenz zwischen zwei Satelliten $\nabla(\Delta\phi_Q^\beta)$ .....                              | 45 |
| 5. Numerische Untersuchungen .....                                                                       | 46 |
| 5-1. Raum–Zeit–Metrik .....                                                                              | 46 |
| 5-2. Bewegte Uhren im Gravitationsfeld .....                                                             | 49 |
| 5-3. Signalausbreitung im Gravitationsfeld .....                                                         | 51 |
| 5-31. Signalausbreitung im e–System .....                                                                | 51 |
| 5-32. Signalausbreitung im $f^*$ –System .....                                                           | 52 |

|                               |    |
|-------------------------------|----|
| 6. Abstract .....             | 55 |
| 7. Literaturverzeichnis ..... | 57 |
| 8. Diplomarbeitsthema .....   | 59 |
| 9. Danksagung .....           | 61 |

## 0. Einleitung

Im Zeitalter der hochgenauen Satellitengeodäsie müssen die geodätischen Meßoperationen relativistisch modelliert werden. Im Rahmen dieser Arbeit soll ein gängiges Verfahren, die Phasendifferenzmessung, näher untersucht werden. Dabei besteht die klassische Vorgehensweise im folgenden:

- i. )            Ermittlung der Zeitdifferenz aus der gemessenen Phasendifferenz, d.h. der Differenz zwischen dem empfangenen Signal u. dem im Empfänger generierten Bezugssignal.
- ii. )           Ermittlung der 3-Koordinatendifferenz aus der Zeitdifferenz

Dagegen erfordert eine relativistische Vorgehensweise folgendes:

- i. )            Die Bahn der Satelliten muß hochgenau relativistisch modelliert werden. Dabei wird der Satellit bei Abwesenheit von nicht gravitativen Kräften als frei fallender Massenpunkt im Gravitationsfeld der Erde und der anderen Himmelskörper betrachtet.
- ii. )           Das vom Satelliten gesendete bzw. das Empfängersignal werden von Oszillatoren generiert, die sich sowohl im Bezugssystem bewegen (speziell relativistischer Effekt), als auch dem Einfluß des Gravitationsfeldes unterworfen sind (allgemein relativistischer Effekt).
- iii.)           Das vom Satelliten ausgesandte Signal ist sowohl dem Einfluß des Gravitationsfeldes als auch des Mediums unterworfen. Der Einfluß des Mediums kann dabei wiederum unterteilt werden in:
  - i. )            Materialeigenschaften des Mediums bezüglich Refraktion und Dispersion
  - ii.)            ortsabhängige Geschwindigkeit im Bezugssystem

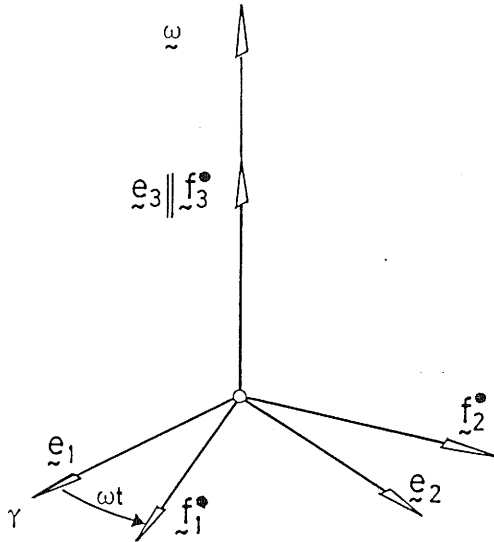
Nachfolgend sollen die drei angesprochenen Effekte beschrieben und in ihrem Einfluß auf die Phasendifferenzmessung untersucht werden.

Wir starten dabei mit der Signalausbreitung im gravitationsfreien Raum, wozu wir die Gesetze der klassischen Elektrodynamik (in den Maxwellschen Gleichungen zusammengefaßt) benötigen. Dabei modellieren wir die Signalausbreitung zunächst bezüglich des Ruhesystems eines isotropen Mediums, um anschließend die Modellierung für dazu bewegte Inertialsysteme anzugeben. In Kapitel drei berücksichtigen wir den Einfluß des Gravitationsfeldes auf elektrodynamische Systeme, wobei wir davon ausgehen, daß die dynamischen Variablen, die das elektromagnetische Feld beschreiben, nicht direkt an das Gravitationsfeld ankoppeln. Diese Art der Kopplung wird auch als Prinzip der minimalen Kopplung bezeichnet und hat zur Folge, daß das elektromagnetische Feld und das Gravitationsfeld lediglich über die kovariante Ableitung gekoppelt sind. Neben der Signalausbreitung untersuchen wir das Verhalten von bewegten Oszillatoren im Gravitationsfeld, das schließlich als Überleitung zu Kapitel vier, der relativistischen Phasenmessung, dient. In diesem Kapitel vergleichen wir die Beobachtungsgleichung für die Phasendifferenzmessung, wie sie aus einer relativistischen Betrachtungsweise resultiert, mit der in der Satellitengeodäsie üblichen Form, der eine Newtonsche Betrachtungsweise zugrundeliegt. Abschließend geben wir in Kapitel fünf numerische Abschätzungen für die in ii.)–iii.) angesprochenen Effekte an. Wir beschränken uns dabei auf den Fall des Vakuums und verweisen zur Diskussion des Einflusses des Mediums auf (Stöcker–Meier 1988).

## 1. Definition der Bezugssysteme

### 1-1. Das Lokale Inertialsystem

Im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie wird das Lokale Inertialsystem eingeführt, das wir dadurch definieren, daß in seinem Ursprung der Einfluß des Gravitationsfeldes lokal wegtransformiert wird. Der Ursprung des e-Systems wird gemäß nebenstehender Skizze in das frei fallende Geozentrum gelegt, während wir die Basis dieses Systems



$$\{ \tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3, \tilde{e}_4 \}$$

wie folgt angeben:

Der erste Basisvektor zeigt in Richtung des mittleren Frühlingsäquinoktiums, während der dritte Basisvektor in Richtung der Rotationsachse der Erde zeigt. Der zweite Basisvektor wird schließlich so gewählt, daß der räumliche Anteil der Basisvektoren ein sog. Rechtssystem in dem Sinne bildet, daß für die Skalarprodukte der Einheitsvektoren

$$\langle \tilde{e}_i | \tilde{e}_j \rangle = \begin{bmatrix} 0 & i,j=1,2,3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

Abb. 1.1: Definition des e- und des f-Systems

gilt. Für die zeitliche Komponente der Basisvektoren vereinbaren wir, daß

$$\langle \tilde{e}_4 | \tilde{e}_4 \rangle = [-1] \quad (1.2)$$

erfüllt ist und erhalten somit für die Darstellung des 4-Ortsvektors bezüglich der  $\{ \tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3, \tilde{e}_4 \}$ -Basis

$$\tilde{x} = x^1 \tilde{e}_1 + x^2 \tilde{e}_2 + x^3 \tilde{e}_3 + x^4 \tilde{e}_4. \quad (1.3)$$

Das o. g. Bezugssystem ist bei der Berechnung von Satellitenbahnen von Bedeutung, während für die Zwecke der geodätischen Positionierung ein erdfestes, d.h. mitrotierendes Bezugssystem eingeführt wird.

### 1-2. Das erdfeste f-System

Der Übergang vom Lokalen Inertialsystem auf ein mitrotierendes Bezugssystem läßt sich im Allgemeinfall folgendermaßen darstellen

$$\begin{bmatrix} \tilde{f}_1^* \\ \tilde{f}_2^* \\ \tilde{f}_3^* \\ \tilde{f}_4^* \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|c} R & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \underline{e}_1 \\ \underline{e}_2 \\ \underline{e}_3 \\ \underline{e}_4 \end{bmatrix} \iff \begin{matrix} \tilde{f}_1^* = R_{11} \underline{e}_1 \\ \tilde{f}_2^* = R_{21} \underline{e}_1 \\ \tilde{f}_3^* = R_{31} \underline{e}_1 \\ \tilde{f}_4^* = \underline{e}_4 \end{matrix}, \quad (1.4)$$

wobei wir in  $\underline{e}$  und  $\tilde{f}^*$  die Basisvektoren  $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$  bzw.  $\{\tilde{f}_1^*, \tilde{f}_2^*, \tilde{f}_3^*\}$  zusammengefaßt haben,  $R$  bedeutet eine Rotationsmatrix. In Kapitel fünf werden wir uns auf den Sonderfall

$$R = R_3(\omega t) \quad (1.5)$$

beschränken, der räumliche Anteil des Rotationsvektors nimmt dabei folgende Form

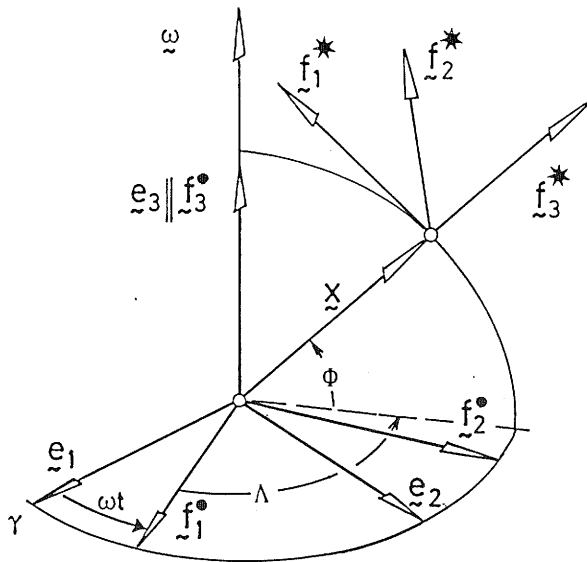
$$\underline{\omega} = \omega \tilde{f}_3^* \quad (1.6)$$

an. Aufgrund der in Gleichung (1.4) gemachten Vereinbarungen stellen wir fest, daß die Koordinatenzeiten des  $\underline{e}$ - und des  $\tilde{f}^*$ -Systems identisch sind. Für die Darstellung des 4-Ortsvektors vereinbaren wir

$$\tilde{x} = y^1 \tilde{f}_1^* + y^2 \tilde{f}_2^* + y^3 \tilde{f}_3^* + (ct) \tilde{f}_4^*. \quad (1.7)$$

### 1-3. Das erdfeste $\tilde{f}^*$ -System

Ein auf der Erdoberfläche ruhender Beobachter führt zur Beschreibung der Raum-Zeit-Ereignisse folgendes Bezugssystem ein:



Der dritte Basisvektor zeigt dabei in Richtung der Lotlinie, der erste Basisvektor steht auf  $\tilde{f}_3^*$  senkrecht und liegt in der astronomischen Meridianebene, d.h. er verläuft nach astronomisch Nord. Der zweite Basisvektor wird so gewählt, daß die räumliche Basis zu einem sog. Linkssystem vervollständigt wird. Ein 4-Ortsvektor läßt sich bezüglich der  $\{\tilde{f}_1^*, \tilde{f}_2^*, \tilde{f}_3^*, \tilde{f}_4^*\}$ -Basis folgendermaßen darstellen

$$\tilde{x} = z^1 \tilde{f}_1^* + z^2 \tilde{f}_2^* + z^3 \tilde{f}_3^* + z^4 \tilde{f}_4^* \quad (1.8)$$

$$= z^1 \tilde{f}_1^* + z^2 \tilde{f}_2^* + z^3 \tilde{f}_3^* + c\tau \tilde{f}_4^*,$$

Abb. 1.2: Definition des topozentrischen  $\tilde{f}^*$ -Systems

und wir bemerken dabei, daß die Koordinatenzeit des  $\tilde{f}^*$ -Systems durch eine im Topozentrum gelagerte Uhr definiert wird, d.h. es gilt  $t^* = \tau$ .

## 2. Spezielle Relativitätstheorie

In Kapitel zwei beschreiben wir die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in einem inhomogenen, refraktiven und dispersiven Medium. Wir vernachlässigen dabei den Einfluß des Gravitationsfeldes, den wir erst im dritten Kapitel berücksichtigen.

Wir schreiben sämtliche 4-Vektoren bezüglich der in Abschnitt (1-1.) definierten  $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4\}$ -Basis an und beschränken uns auf kleine Raum-Zeit-Bereiche, für die wir das Gravitationsfeld vernachlässigen können.

Die Beschreibung elektromagnetischer Phänomene erfolgt im Rahmen der Speziellen Relativitätstheorie im Pseudo-Euklidischen Raum oder dem Minkowski-Raum, dessen Metrik wir am Anfang dieses Kapitels definieren. Darauf aufbauend führen wir wichtige Begriffe, wie die anholonome Eigenzeit, die holonome Koordinatenzeit und schließlich die Vierergeschwindigkeit, ein.

Im Abschnitt 2-2. formulieren wir mit Hilfe der Maxwellschen Gleichungen die sogenannte Eikonalgleichung der geometrischen Optik im Ruhesystem des Mediums, um schließlich eine kovariante Form dieser optischen Grundgleichung anzugeben.

### 2-1. Die Metrik des Minkowski Raumes

Im vierdimensionalen Raum, dem sog. Minkowski-Raum, definieren wir den infinitesimalen Raum-Zeit-Abstand

$$ds^2 = -(cd\tau)^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 - (cdt)^2 \quad (2.1)$$

oder

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \delta_{\mu\nu}^- dx^\mu dx^\nu, \quad (2.2)$$

indem wir die Einsteinsche Summationskonvention über zwei gleichlaufende Summationsindices anwenden. Griechische Indices laufen von eins bis vier, lateinische von eins bis drei. Diese Konventionen werden wir im Rahmen dieser Arbeit beibehalten. Für den Fall, daß diese keine Anwendung finden, werden wir darauf hinweisen.

Das oben auftretende 4-Skalar  $\tau$ , die anholonome Koordinate bzw. Eigenzeit, stellt nichts anderes dar, als die Zeitanzeige einer Uhr, die sich im Ruhesystem eines im Minkowski-Raum bewegten Beobachters befindet. Diese Überlegung können wir dadurch nachvollziehen, indem wir bemerken, daß ein bewegter Beobachter sich selbst als ruhend betrachtet und lediglich die infinitesimale 4-Koordinatenänderung  $-cd\tau$ , d.h. die Zeitanzeige seiner bewegten Uhr, feststellt. Die holonome Koordinate, die Koordinatenzeit  $t$ , ist die Zeitanzeige eines Beobachters, der zur Beschreibung des 4-Ereignisses, der Uhrbewegung, das 4-Koordinatendifferential  $(dx^1, dx^2, dx^3, cdt)$  einführt.

Die Vakuumlichtgeschwindigkeit wird im Rahmen dieser Arbeit durchweg mit  $c$  bezeichnet,  $\delta_{\alpha\beta}^-$  bedeutet das Kroneckersymbol ( $\delta_{44}$  ist minus eins), womit sich die kovarianten Komponenten des Metriktensors folgendermaßen anschreiben lassen,

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$



Das Raum–Zeit–Intervall wird üblicherweise eingeteilt in

$$\begin{aligned} \longrightarrow \text{raumartig:} & \quad ds^2 > 0 \\ \longrightarrow \text{lichtartig:} & \quad ds^2 = 0 \\ \longrightarrow \text{zeitartig:} & \quad ds^2 < 0. \end{aligned}$$

Die Komponenten der 4–Geschwindigkeit sind folgendermaßen definiert

$$u^\alpha = ((dx^1/d\tau), (dx^2/d\tau), (dx^3/d\tau), (dx^4/d\tau)), \quad (2.4a)$$

womit wir unter Zuhilfenahme des Weg–Zeitelements den Betrag der 4–Geschwindigkeit

$$u^\alpha u_\alpha = \langle u^\mu e_{\mu} | u^\nu e_{\nu} \rangle = -c^2 \quad (2.4b)$$

unmittelbar ablesen können.

## 2–2. Elektromagnetismus

Dieser Abschnitt soll eine, in Bezug auf unsere Thematik, in sich konsistente Diskussion ermöglichen. Zur Beschreibung der Ausbreitung einer elektromagnetischen Welle benötigen wir die Maxwellschen Gleichungen, die wir zunächst in der Notation der Vektorrechnung und Vektoranalysis des dreidimensionalen Euklidischen Raumes angeben, um anschließend diese Gleichungen in äquivalente Tensorgesetze im vierdimensionalen, Pseudo–Euklidischen Raum anzugeben.

Die Formulierung physikalischer Gesetze als Tensorgesetze im Pseudo–Euklidischen Raum bedeutet deren Verträglichkeit mit der Speziellen Relativitätstheorie. Diese Vorgehensweise, angewendet auf die Maxwellschen Gesetze, wird auch als kovariante Formulierung der Elektrodynamik bezeichnet, und bedeutet, daß diese in allen Inertialsystemen diesselbe Form annehmen. Wir werden den Begriff der kovarianten Formulierung physikalischer Gesetze in Kapitel drei auf allgemeine Bezugssysteme erweitern und halten zunächst folgende Definition fest:

Alle Inertialsysteme sind gleichberechtigt, da in diesen die physikalischen Gesetze, angeschrieben als Tensorgesetze im vierdimensionalen Pseudo–Euklidischen Raum, diesselbe Form haben.

## 2–21. Die Maxwellschen Gleichungen

Den angegebenen Gesetzen liegt das Gauß–Einheitensystem (vergl. Lehrbücher zur Elektrodynamik, wie z.B. Jackson 1975 p. 818, Tabelle 2) zugrunde, wobei wir die in Abschnitt 2–1. eingeführten 4–Koordinaten ( $x^1, x^2, x^3$  bezeichnen den räumlichen Anteil,  $x^4=ct$  den zeitartigen Anteil des 4–Ortsvektors) beibehalten.

Die grundlegenden Gesetze der Elektrodynamik lassen sich in vier Gleichungen

zusammenfassen, wobei wir diese in differentieller Form anschreiben

$$\partial_i D_i = 4\pi\rho \quad \longleftrightarrow \langle \nabla \mid \underline{D} \rangle = 4\pi\rho \quad (2.5)$$

$$\epsilon_{ijk} \partial_j H_k = 4\pi/c j_i + 1/c \partial_t D_i \quad \longleftrightarrow \langle \nabla \times \underline{H} \rangle = 4\pi/c \underline{j} + 1/c \partial_t \underline{D} \quad (2.6)$$

$$\epsilon_{ijk} \partial_j E_k + 1/c \partial_t B_i = 0 \quad \longleftrightarrow \langle \nabla \times \underline{E} \rangle + 1/c \partial_t \underline{B} = 0 \quad (2.7)$$

$$\partial_i B_i = 0 \quad \longleftrightarrow \langle \nabla \mid \underline{B} \rangle = 0, \quad (2.8)$$

dabei haben wir zunächst den Levi-Civita-Tensor, hier mit  $\epsilon$  bezeichnet, eingeführt. Zur Definition verweisen wir auf Standardlehrbücher zur Tensoranalysis (wie z.B. Klingbeil 1966, p.68). Die in der obigen Gleichung auftretenden Intensitätsgrößen (vergl. z.B. Meetz-Engl 1980, p.199) haben wir mit  $E_i$ , für das elektrische Feld, und mit  $B_i$ , für die magnetische Induktion bezeichnet, während die Quantitätsgrößen durch  $D_i$ , für die elektrische Verschiebungsdichte, und  $H_i$ , für die magnetische Feldstärke, dargestellt werden. Die felderzeugenden Größen werden durch die Ladungsdichte und die Stromdichte, jeweils mit  $\rho$  und  $j_i$  bezeichnet, repräsentiert, die sich wiederum für die weitere Diskussion zu einem 4-Vektor

$$J^\alpha = (j_i, \rho c) \quad (2.9)$$

zusammenfassen lassen.

Die Gleichungen (2.5)–(2.8) können wir auch als Tensorgesetze im vierdimensionalen Pseudo-Euklidischen Raum angeben, wobei wir zunächst den Faraday-Tensor (vergl. z.B. Grafarend 1984)

$$F_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & E_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & E_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & E_3 \\ -E_1 & -E_2 & -E_3 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4) \quad (2.10)$$

bzw. unter Ausnutzung seiner Tensoreigenschaften

$$F^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\mu} \eta^{\beta\nu} F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -E_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -E_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & -E_3 \\ E_1 & E_2 & E_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

eingeführen und damit die homogenen Maxwellgleichungen (2.7) und (2.8) folgendermaßen darstellen

$$F_{\alpha\beta,\gamma} + F_{\beta\gamma,\alpha} + F_{\gamma\alpha,\beta} = 0. \quad (2.12)$$

Das auftretende Komma stellt die partielle Ableitung nach der jeweiligen Komponente

dar, wobei obige Gleichung durch die Definition des 4-Potentials

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu} \quad (2.13)$$

automatisch erfüllt ist.

Durch Definition des Maxwell-Tensors

$$G_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & H_3 & -H_2 & D_1 \\ -H_3 & 0 & H_1 & D_2 \\ H_2 & -H_1 & 0 & D_3 \\ -D_1 & -D_2 & -D_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.14i)$$

bzw.

$$G^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & H_3 & -H_2 & -D_1 \\ -H_3 & 0 & H_1 & -D_2 \\ H_2 & -H_1 & 0 & -D_3 \\ +D_1 & +D_2 & +D_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.14ii)$$

erhalten wir ein zu den inhomogenen Maxwellgleichungen (2.5) und (2.6) äquivalentes Tensorgesetz

$$G^{\mu\nu}_{,\nu} = 4\pi/c J^\mu, \quad (2.15)$$

wobei wir die Definition der 4-Stromdichte aus Gleichung (2.9) benutzt haben.

## 2-22. Die Materialgesetze

Um das gekoppelte Differentialgleichungssystem (2.5) bis (2.8) bzw. in seiner tensoriellen Formulierung (2.12) und (2.15) lösen zu können, haben wir ferner den funktionalen Zusammenhang zwischen den Intensitätsgrößen und den Quantitätsgrößen zu beachten, der im Allgemeinfall

$$G_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}(F^{\alpha\beta}) \quad (2.16)$$

lautet und verweisen auf Lehrbücher zur Elektrodynamik (z.B. Jackson 1975, p.14).

Wir wollen uns im Rahmen dieser Arbeit auf linear reagierende Medien beschränken und erhalten somit folgenden Zusammenhang mit Gleichung (2.13)

$$G_{\alpha\beta} = (\chi_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} F_{\gamma\delta})/2 = \chi_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} (A_{\delta,\gamma} - A_{\gamma,\delta})/2 = \chi_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} A_{\delta,\gamma}, \quad (2.17)$$

die dabei auftretenden Koeffizienten  $\chi_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}$  bezeichnen eine Tensordichte vierter Stufe (2-fach kovariant, 2-fach kontravariant) und beschreiben die Materialeigenschaften des Mediums. Wir werden deshalb die auftretenden Koeffizienten als Komponenten eines

antisymmetrischen Materialensors auffassen. Diese Antisymmetrie erklärt auch das Auftreten des Faktors  $1/2$  in der obigen Gleichung. Im Ruhesystem eines isotropen Mediums gilt der bekannte Zusammenhang zwischen der jeweiligen Intensitätsgröße und der Quantitätsgröße

$$H_i = \frac{1}{\mu_0 \mu_r(x^i)} \cdot B_i = 1/\mu B_i \text{ bzw. } D_i = \epsilon_0 \epsilon_r(x^i) E_i = \epsilon E_i, \quad (2.18)$$

wobei wir mit  $\epsilon_r(x^i)$  die relative Dielektrizität und mit  $\mu_r(x^i)$  die relative Permeabilität bezeichnen. Wir fassen unser Medium als inhomogen und stationär auf, das wir durch die Abhängigkeit der oben eingeführten Größen von den räumlichen Komponenten des 4-Ortsvektors zum Ausdruck bringen. Die Gleichungen (2.18) können aus (2.17) unter Zuhilfenahme des Materialensors hergeleitet werden, dessen Komponenten wir in Tab. 2.1 bezüglich des Ruhesystems eines isotropen Mediums zusammengefaßt haben. Für diesen Sonderfall wollen wir die Maxwellschen Gleichungen auswerten, wobei wir voraussetzen, daß wir uns im quellenfreien Raum befinden, d.h. die Komponenten der 4-Stromdichte verschwinden.

| $\alpha \backslash \gamma \delta$ | 12       | 13       | 14          | 21       | 23      | 24          | 31       | 32       | 34          | 41          | 42          | 43          |
|-----------------------------------|----------|----------|-------------|----------|---------|-------------|----------|----------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 12                                |          |          |             |          |         |             |          |          |             |             |             |             |
| 13                                | $1/\mu$  |          |             | $-1/\mu$ |         |             |          |          |             |             |             |             |
| 14                                |          | $1/\mu$  |             |          |         |             | $-1/\mu$ |          |             |             |             |             |
| 21                                | $-1/\mu$ |          | $\epsilon$  | $1/\mu$  |         |             |          |          |             | $-\epsilon$ |             |             |
| 23                                |          |          |             |          | $1/\mu$ |             |          | $-1/\mu$ |             |             |             |             |
| 24                                |          |          |             |          |         | $\epsilon$  |          |          |             |             | $-\epsilon$ |             |
| 31                                |          | $-1/\mu$ |             |          |         |             | $1/\mu$  | $1/\mu$  |             |             |             |             |
| 32                                |          |          |             | $-1/\mu$ |         |             |          |          | $1/\mu$     |             |             |             |
| 34                                |          |          |             |          |         |             |          |          |             | $\epsilon$  |             | $-\epsilon$ |
| 41                                |          |          | $-\epsilon$ |          |         |             |          |          |             |             | $\epsilon$  |             |
| 42                                |          |          |             |          |         | $-\epsilon$ |          |          |             |             |             | $\epsilon$  |
| 43                                |          |          |             |          |         |             |          |          | $-\epsilon$ |             |             | $\epsilon$  |

Tab. 2.1 Komponenten des Materialensors

## 2-23. Wellenausbreitung im inhomogenen und isotropen Medium

Mit den o.g. Vereinbarungen lassen sich unsere Maxwellgleichungen im ladungsfreien und nicht leitenden Medium gemäß den Gleichungen (2.18) und (2.5) bis (2.8) folgendermaßen darstellen

$$\langle \nabla \times \vec{E} \rangle = -1/c \partial_t \vec{B} \quad (2.19)$$

$$\langle \nabla \times \vec{H} \rangle = 1/c \partial_t (\epsilon \vec{E}) \quad (2.20)$$

$$\langle \nabla \cdot \vec{D} \rangle = 0 \quad (2.21)$$

$$\langle \nabla \cdot \vec{B} \rangle = 0, \quad (2.22)$$

wobei wir zur weiteren Umformung das stationäre Brechungsfeld gemäß

$$n = n(\underline{x}) = \epsilon\mu$$

eingeführen. In Analogie zur Wellengleichung im homogenen Medium (vergl. z.B. Jackson 1975, p. 270) formulieren wir nun folgenden Ansatz für das elektrische Feld

$$\underline{E}(\underline{x}) = \hat{\underline{E}}(\underline{x}) e^{i(\omega/c)(L(\underline{x}) - c\Delta t)} \quad (2.23)$$

bzw. für die magnetische Feldstärke

$$\underline{H}(\underline{x}) = \hat{\underline{H}}(\underline{x}) e^{i(\omega/c)(L(\underline{x}) - c\Delta t)}, \quad (2.24)$$

dabei bedeuten  $\hat{\underline{E}}(\underline{x})$ ,  $\hat{\underline{H}}(\underline{x})$  die von den räumlichen Komponenten des 4-Ortsvektors abhängigen, komplexen Amplitudenfunktionen, während die skalare Funktion gemäß

$$(\omega/c)L(\underline{x}) = \int_{(x^i)^\beta}^{(x^i)^\alpha} k_1(x^j) dx^1 \quad (2.25)$$

definiert ist. Die dabei auftretenden räumlichen, kovarianten Komponenten des 4-Wellenzahlvektors

$$k_\alpha = (k_1(x^j), k_2(x^j), k_3(x^j), -\omega/c) \quad (2.26)$$

stellen im Gegensatz zum homogenen Fall keine konstanten Größen dar. Mit Hilfe der Gleichungen (2.23) bis (2.25) können wir die Phase bzw. das Eikonal folgendermaßen angeben

$$\begin{aligned} \phi &= (\omega/c)(L(\underline{x}) - c\Delta t) = \int_{(x^i)^\beta}^{(x^i)^\alpha} k_1(x^j) dx^1 - (\omega/c)c\Delta t = \\ & \int_{(x^\varphi)^\beta}^{(x^\varphi)^\alpha} k_\nu dx^\nu = \int_{(x^\varphi)^\beta}^{(x^\varphi)^\alpha} \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} dx^\nu \end{aligned} \quad (2.27)$$

und erhalten aufgrund der letzten Umformung folgende Beziehung zwischen dem Viergradienten der Phase und dem 4-Wellenzahlvektor

$$k_\alpha = \frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha}. \quad (2.28)$$

Indem wir unseren Ansatz (2.23) u. (2.24) in die Gleichungen (2.19) bis (2.22) einsetzen und die Eigenschaften des Nabla-Operators ausnutzen (vergl. Lehrbücher zur Vektoranalysis oder mathematischen Physik wie z.B. Arfken 1985, p.33), erhalten wir folgendes Differentialgleichungssystem (Born u. Wolf 1967, p.111)

$$\langle \nabla \mathbf{L} \times \hat{\mathbf{E}} \rangle - \mu \hat{\mathbf{H}} = i \frac{\lambda}{2\pi} \langle \nabla \times \hat{\mathbf{E}} \rangle \quad (2.29)$$

$$\langle \nabla \mathbf{L} \times \hat{\mathbf{H}} \rangle + \epsilon \hat{\mathbf{E}} = i \frac{\lambda}{2\pi} \langle \nabla \times \hat{\mathbf{H}} \rangle \quad (2.30)$$

$$\langle \nabla \mathbf{L} \mid \hat{\mathbf{E}} \rangle = i \frac{\lambda}{2\pi} \left\{ \langle \hat{\mathbf{E}} \mid \frac{\nabla \epsilon}{\epsilon} \rangle + \langle \nabla \mid \hat{\mathbf{E}} \rangle \right\} \quad (2.31)$$

$$\langle \nabla \mathbf{L} \mid \hat{\mathbf{H}} \rangle = i \frac{\lambda}{2\pi} \left\{ \langle \hat{\mathbf{H}} \mid \frac{\nabla \mu}{\mu} \rangle + \langle \nabla \mid \hat{\mathbf{H}} \rangle \right\}. \quad (2.32)$$

Die Vakuumwellenlänge haben wir dabei mit Hilfe der Beziehung

$$(c/\omega) = \lambda/(2\pi) \quad (2.33)$$

eingeführt,  $i$  stellt die komplexe Zahl  $\sqrt{-1}$  dar.

Die rechten Seiten des obigen Differentialgleichungssystems können wir unter den folgenden Voraussetzungen

$$\frac{\|\nabla \epsilon\|}{\epsilon} \frac{\lambda}{2\pi} \ll 1 \quad \frac{\|\nabla \mu\|}{\mu} \frac{\lambda}{2\pi} \ll 1 \quad (2.34)$$

$$\frac{\langle \nabla \mid \hat{\mathbf{H}} \rangle}{\|\hat{\mathbf{H}}\|} \frac{\lambda}{2\pi} \ll 1 \quad \frac{\langle \nabla \mid \hat{\mathbf{E}} \rangle}{\|\hat{\mathbf{E}}\|} \frac{\lambda}{2\pi} \ll 1 \quad (2.35)$$

vernachlässigen. Obige Voraussetzungen treffen um so besser zu, je kleiner die Wellenlänge, verglichen mit der relativen Änderung des Mediums bzw. der Amplitudenfunktion ist und werden daher auch als die **Voraussetzungen der geometrischen Optik** bezeichnet. Werden die obigen Forderungen erfüllt, so können wir in Gleichung (2.30) mit Hilfe von (2.29) die Amplitudenfunktion  $\hat{\mathbf{H}}$  eliminieren und erhalten zunächst durch Anwenden bekannter Vektoridentitäten

$$(1/\mu) \{ \langle \nabla \mathbf{L} \mid \hat{\mathbf{E}} \rangle - \langle \nabla \mathbf{L} \mid \nabla \mathbf{L} \rangle \hat{\mathbf{E}} \} + \epsilon \hat{\mathbf{E}} = 0,$$

woraus wir mit Hilfe der Gleichung (2.31) als nichttriviale Lösung unserer

Bedingungsgleichung ( $\hat{E} = \text{Nullvektor}$  besitzt keine physikalische Signifikanz)

$$\langle \nabla L \mid \nabla L \rangle = \epsilon \mu = n^2 \quad (2.36)$$

erhalten. Obige Gleichung wird in den Lehrbüchern der Optik (Born, Wolf 1967 p.112) als **Eikonalgleichung** der geometrischen Optik bezeichnet, deren Gültigkeitsbereich wir in den Gleichungen (2.34) und (2.35) zusammengefaßt haben, und die wir mit Hilfe von (2.27) umformen können

$$\langle \nabla L \mid \nabla L \rangle = (c/\omega)^2 \langle \nabla \phi \mid \nabla \phi \rangle = (c/\omega)^2 k_i k_i = n^2. \quad (2.37)$$

Zunächst bemerken wir, daß obige Gleichung eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung für die Phasenfläche darstellt. Des weiteren können wir die Gleichung physikalisch interpretieren, indem wir den 3-ortsabhängigen Wellenvektor in eine Reihe entwickeln

$$k_i(x^j) \simeq k_i^{|\beta} + (\partial k^i / \partial x^m)^{|\beta} (x^m - x^{m|\beta}) \quad (2.38)$$

und in Gleichung (2.37) einsetzen. Dabei bezeichnen wir mit  $^{|\beta}$  den jeweiligen Entwicklungspunkt. Betragen sich die räumlichen Komponenten des Verschiebungsvektors in der Größenordnung der Wellenlänge

$$\Delta x^m = x^m - x^{m|\beta} \simeq \lambda, \quad (2.39)$$

so erhalten wir unter der Bedingung, daß

$$\frac{\| k_{i,m}^{|\beta} \|}{\| k_i^{|\beta} \|} \Delta x^m \simeq \frac{\| k_{i,m}^{|\beta} \|}{\| k_i^{|\beta} \|} \lambda \ll 1 \quad (2.40)$$

gilt, die Eikonalgleichung für den homogenen Fall

$$k_i^{|\beta} k_i^{|\beta} \simeq n^2 (\omega/c)^2. \quad (2.41)$$

Dies läßt wiederum den Schluß zu, daß sich unser Feld im Rahmen der Approximation der geometrischen Optik lokal durch ebene Wellen beschreiben läßt, während die Phasenflächen zu einem vorgegebenen Zeitpunkt ( $t=\text{const.}$ ) als Folge von Ebenen mit ortsabhängigem Normalenvektor dargestellt werden können. Wir verweisen an dieser Stelle auf eine weitergehende physikalische und geometrische Interpretation in Abschnitt 3–41. bzw. auf die Abb. 3–1..

Im nächsten Abschnitt wollen wir uns den mathematischen Eigenschaften der Eikonalgleichung zuwenden und dieses Gesetz in eine mit der Speziellen Relativitätstheorie konsistente Formulierung anschreiben.

## 2–24. Die Lorentzinvariante Formulierung der Eikonalgleichung

Am Anfang dieses Kapitels haben wir bemerkt, daß die physikalischen Gesetze mit der Speziellen Relativitätstheorie konsistent sind, falls sich diese als Tensorgesetze im Min

kowski-Raum anschreiben lassen. Dies ist jedoch bei der im vorigen Abschnitt erhaltenen Eikonalgleichung (2.37) nicht der Fall, wie wir durch eine Umformung leicht zeigen können

$$\bar{k}_i \bar{k}_i - (\bar{\omega}/c)^2 = \bar{k}_i \bar{k}_i + \bar{k}_4 \bar{k}_4 = \bar{k}_\rho \bar{k}^\rho = (\bar{\omega}/c)^2 (n^2 - 1), \quad (2.42)$$

wobei wir die Definition (2.26) des 4-Wellenzahlvektors angewendet haben. Die quer-gestrichenen Größen in der obigen Gleichung haben wir zur Verdeutlichung eingeführt, daß die Zusammenhänge des vorigen Abschnitts im Ruhesystem des Mediums hergeleitet wurden.

Die linke Seite der obigen Gleichung können wir als Skalarprodukt zweier 4-Vektoren darstellen, während die rechte Seite aufgrund der Eigenschaften von  $k_4$  keinen Lorentz-skalar darstellt, d.h. unsere Eikonalgleichung ist aufgrund der Voraussetzungen (2.18) nur im Ruhesystem des Mediums gültig, wobei das Ruhesystem wiederum ein Inertial-system darstellt. Das Ruhesystem des Mediums ist also gegenüber den anderen Inertial-systemen ausgezeichnet.

Um die rechte Seite der obigen Gleichung als Skalarprodukt zweier Vierervektoren an-schreiben zu können, definieren wir das Differential der Phase mit Hilfe der Gleichung (2.27)

$$d\phi = \bar{k}_\rho d\bar{x}^\rho = k_\beta dx^\beta \quad (2.43)$$

und stellen zunächst fest, daß das Phasendifferential einen Lorentzskalar darstellt. Im Ruhesystem des Mediums stellt ein Beobachter folgende Phasenänderung, bezogen auf die Eigenzeit einer im Medium ruhenden Uhr (zu beachten ist die Minkowski-Metrik)

$$d\phi/d\tau = -\bar{\omega} = \bar{k}_4 c = \bar{k}_4 \bar{u}^4 \quad (2.44)$$

fest. Die letzte Umformung haben wir aufgrund der Tatsache erhalten, daß die Koor-dinatenzeit des Mediumsystems  $\bar{e}$  durch Uhren realisiert wird, die bezüglich des Me-diums ruhen. Die Komponenten der 4-Geschwindigkeit bezeichnen wir gemäß Gleichung (2.4a) mit  $u^\beta$ . Für einen im Mediumsystem bewegten Beobachter erhalten wir folgende Phasenänderung, bezogen auf seine Eigenzeit mit (2.43)

$$d\phi/d\tau = k_\beta (dx^\beta/d\tau) = k_\beta u^\beta = \bar{k}_4 \bar{u}^4 = -\bar{\omega}. \quad (2.45)$$

Die Kreisfrequenz  $\bar{\omega}$ , wie sie im Ruhesystem des Mediums gemessen wird, läßt sich als Skalarprodukt zweier Vierervektoren darstellen, wobei die physikalische Signifikanz der 4-Geschwindigkeit darin besteht, daß sie die 4-Geschwindigkeit des Mediums darstellt. Dies können wir anhand der Gleichung (2.45) nachvollziehen, indem wir beachten, daß ein mit dem Medium mitbewegter Beobachter für die räumliche Komponente

$$u^i = dx^i/d\tau = 0 \quad (2.46)$$

eingeführt (er betrachtet sich und das Medium als ruhend). Wir können daher das Phasen-differential folgendermaßen darstellen

$$d\phi/d\tau = k_\beta u^\beta = \bar{k}_\beta \bar{u}^\beta = -\bar{\omega}. \quad (2.47)$$



Substitution der Kreisfrequenz in Gleichung (2.42) mit (2.45) ergibt die lorentzinvariante Formulierung der Eikonalgleichung

$$k_\beta k^\beta = (\omega/c)^2 (n^2 - 1) = (k_\beta u^\beta / c)^2 (n^2 - 1), \quad (2.48)$$

dabei stellt der Faktor  $(n^2-1)$  aufgrund der skalaren Eigenschaften von  $k_\beta k^\beta$  und  $k_\beta u^\beta$  ebenfalls einen Skalar dar. Die Bedeutung der obigen Gleichung liegt nun darin, daß diese ihre Form beim Übergang auf ein zum Medium bewegtes Bezugssystem beibehält und ist somit konsistent mit den Gesetzen der Speziellen Relativitätstheorie.

Mit der Formulierung der lorentzinvarianten Eikonalgleichung haben wir die Modellierung der Wellenausbreitung im Rahmen der Speziellen Relativitätstheorie abgeschlossen, wobei die Anwendbarkeit der geometrischen Optik auf die Fälle beschränkt ist, die wir in den Gleichungen (2.34) und (2.35) zusammengefaßt haben. Durch die Formulierung der Bedingungsgleichung (2.48) haben wir letzten Endes erreicht, daß sämtliche Inertialsysteme bezüglich der Wellenausbreitung gleichberechtigt sind, d.h. die im Rahmen der nicht-relativistischen geometrischen Optik erfolgte Auszeichnung des Ruhesystems des Mediums besteht nicht mehr, und wir verweisen zu einer weiteren Diskussion auf den Abschnitt 3–4..

### 3. Allgemeine Relativitätstheorie

In diesem Abschnitt wollen wir sowohl die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen als auch das Verhalten von Uhren in Anwesenheit eines Gravitationsfeldes beschreiben. Dies geschieht im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie, die wir auch als relativistische Verallgemeinerung der Newtonschen Gravitationstheorie auffassen können, und wir verweisen dazu auf die Diskussion in Abschnitt 3–1..

Im Rahmen der Speziellen Relativitätstheorie haben wir zur Modellierung der Wellenausbreitung die Maxwellschen Gleichungen als Tensorgesetze im vierdimensionalen, Pseudo-Euklidischen Raum formuliert, wodurch wir ziemlich elegant deren Verträglichkeit mit der Speziellen Relativitätstheorie zeigen konnten, oder in anderen Worten ausgedrückt: Die Maxwellschen Gleichungen behalten unter Lorentztransformationen ihre Form bei, d.h. alle Inertialsysteme sind gleichberechtigt.

Die Erweiterung der Allgemeinen Relativitätstheorie besteht zunächst einmal darin, daß die Auszeichnung der Inertialsysteme entfällt, d.h. wir müssen unsere physikalischen Gesetze, wie z.B. die Bewegungsgleichungen für Punktmassen (Testkörper, die das umgebende Gravitationsfeld nicht beeinflussen) oder die Grundgleichungen der Elektrodynamik derart erweitern, daß sie in allen Bezugssystemen dieselbe Form annehmen.

Wir geben in Abschnitt 3–1. zunächst einige wichtige Definitionen an, die wir im Rahmen dieser Arbeit benötigen und zeigen am Schluß dieses Abschnitts, daß die Newtonsche Gravitationstheorie als nichtrelativistischer Sonderfall aus der Allgemeinen Relativitätstheorie folgt. Im Anschluß daran diskutieren wir die Struktur physikalischer Gesetze in Anwesenheit von Gravitationsfeldern, wobei wir den Begriff des Lokalen Inertialsystems einführen und darauf aufbauend, das Äquivalenzprinzip und das allgemeine Kovarianzprinzip definieren. Letzteres wenden wir auf die Tensorgesetze der Elektrodynamik aus dem zweiten Kapitel an und erhalten Gesetze, die die Kopplung des elektromagnetischen Feldes und des Gravitationsfeldes berücksichtigen, wobei wir diese allgemein kovariant formulierten Tensorgesetze aus einem Variationsprinzip herleiten.

In Abschnitt 3–3. werden die allgemein kovarianten Gleichungen der Elektrodynamik zur Herleitung einer Wellengleichung im Ruhesystem eines isotropen Mediums verwendet, woraus wir im Rahmen der geometrischen Optik die allgemein kovariante Eikonalgleichung erhalten.

Indem wir die Analogien zwischen der klassischen Mechanik in der Hamilton–Jacobi–Formulierung und der geometrischen Optik ausnützen, leiten wir in Abschnitt 3–4. ein Variationsprinzip zur Ausbreitung einer Phasenfläche her, das das bekannte Fermatsche Prinzip der nicht relativistischen Optik als Sonderfall miteinschließt. Aus diesem allgemein kovariant formulierten Variationsprinzip erhalten wir schließlich unter Zuhilfenahme der allgemeinen Eikonalgleichung, die wir im Sinne der Variationsrechnung als Nebenbedingung einführen, ein gekoppeltes Differentialgleichungssystem erster Ordnung für den 4–Orts– und 4–Wellenzahlvektor, das wir schließlich im fünften Kapitel auswerten.

Abschließend diskutieren wir das Verhalten sogenannter Standardoszillatoren im Gravitationsfeld. Dieser Abschnitt 3–5. dient als Überleitung für das folgende Kapitel, der relativistischen Phasenmessung.

#### 3–1. Grundlagen der Allgemeinen Relativitätstheorie

Analog unserem Vorgehen in der Elektrodynamik wollen wir einen kurzen Abriss der Allgemeinen Relativitätstheorie geben, wobei wir uns auf Definitionen und Grundprinzipien beschränken, die für spätere algebraische Manipulationen oder Überlegungen benötigt werden. Dabei beginnen wir zunächst in Abschnitt 3–11. mit den geometrischen Grundlagen der Allgemeinen Relativitätstheorie, d.h. der Riemannschen Geometrie, um anschließend die Einsteinschen Feldgleichungen in Abschnitt 3–12. zu diskutieren. Wir

zeigen dabei, daß die Newtonsche Gravitationstheorie als Sonderfall aus den Feldgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie hervorgeht.

### 3–11. Riemannsche Geometrie

In Abschnitt 2–1. haben wir für den Pseudo–Euklidischen Raum das infinitesimale Weg–Zeit–Element angegeben, das in seiner Verallgemeinerung im vierdimensional gekrümmten Raum

$$ds^2 = -(cd\tau)^2 = g_{\alpha\beta}(x^\gamma) dx^\alpha dx^\beta \quad (3.1)$$

lautet, wobei im Gegensatz zu den konstanten Komponenten des Minkowski–Metrikensors in Gleichung (2.3) die Komponenten des Metrikensors, die wir mit  $g_{\alpha\beta}(x^\gamma)$  bezeichnen, Funktionen des 4–Ortsvektors darstellen und die Eigenschaften des Gravitationsfeldes beschreiben. Für die weitere Diskussion vereinbaren wir jedoch eine stationäre Metrik, d.h. die Komponenten des Metrikensors stellen lediglich eine Funktion des raumartigen Anteils des 4–Ortsvektors dar, was wir durch

$$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(x^i) \quad (3.2)$$

ausdrücken. Die physikalische Signifikanz der anholonomen Koordinate, der Eigenzeit  $\tau$ , wurde bereits in Abschnitt 2–1. diskutiert. Die Gleichung (3.1) bildet gemeinsam mit dem Abschnitt (2–1.) die Basis, um das Verhalten von bewegten Uhren im Gravitationsfeld der Erde und anderer Himmelskörper zu beschreiben. Dabei müssen wir allerdings auch die Bewegung unserer betrachteten Uhr kennen, wobei wir diese im Falle frei fallender Uhren aus der Forderung, daß das durchlaufene Weg–Zeit–Element extremal, d.h.

$$\delta \int ds = \delta \int (g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta)^{1/2} = \delta \int (g_{\alpha\beta} (dx^\alpha/dp)(dx^\beta/dp))^{1/2} dp \quad (3.3)$$

wird. Dabei haben wir  $p$ , den affinen Parameter eingeführt, für den wir folgende Beziehung

$$(Cdp)^2 = -(cd\tau)^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (3.4)$$

mit

$$C = \text{konst.}$$

anschreiben können. Daraus erhalten wir mit Hilfe der Standardmethoden der Variationsrechnung die Differentialgleichung der Geodätischen Linie im Falle eines frei fallenden Testkörpers (vergl. z.B. Stephani 1982, p.14) bezüglich des affinen Parameters

$$(d^2 x^\alpha / dp^2) + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha (dx^\beta / dp)(dx^\gamma / dp) = 0, \quad (3.5)$$

wobei wir des weiteren zu beachten haben, daß nur für zeitartige Weltlinien gem. Abschnitt 2–1. die Eigenzeit einen affinen Parameter darstellt, während wir für lichtartige Weltlinien Gleichung (3.5) bezüglich der Koordinatenzeit parametrisieren und erhalten (vergl. z.B. Heitz u. Stöcker–Meier 1990, p.51)

$$(d^2x^i/dt^2) + (\Gamma_{\beta\gamma}^i - 1/c\Gamma_{\beta\gamma}^4(dx^i/dt))(dx^\beta/dt)(dx^\gamma/dt) = 0. \quad (3.6)$$

Wir haben bei der Formulierung der Gleichungen (3.5) und (3.6) die Christoffelsymbole zweiter Art benutzt, die gemäß (z.B. Weinberg 1972, p.74) folgendermaßen

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2}g^{\alpha\mu}(g_{\mu\beta,\gamma} + g_{\mu\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\mu}) \quad (3.7)$$

definiert sind, woraus sich unter Ausnutzung der Symmetrie des Metriktensors die Umkehrung

$$g_{\alpha\beta,\gamma} = \Gamma_{\alpha\gamma}^\mu g_{\beta\mu} + \Gamma_{\beta\gamma}^\mu g_{\alpha\mu} \quad (3.8)$$

angeben läßt.

Indem wir die kovariante Ableitung zunächst allgemein für einen Tensor m–fach kovarianter und n–fach kontravarianter Stufe (vergl. z.B. Heitz u. Stöcker–Meier 1990, p. 43) definieren

$$\begin{aligned} a_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m;\gamma}^{\beta_1\beta_2\dots\beta_n} &= a_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m,\gamma}^{\beta_1\beta_2\dots\beta_n} \\ &- \Gamma_{\alpha_1\gamma}^\mu a_{\mu\alpha_2\dots\alpha_m}^{\beta_1\beta_2\dots\beta_n} - \Gamma_{\alpha_2\gamma}^\mu a_{\alpha_1\mu\dots\alpha_m}^{\beta_1\beta_2\dots\beta_n} - \dots - \Gamma_{\alpha_m\gamma}^\mu a_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{m-1}\mu}^{\beta_1\beta_2\dots\beta_n} \\ &+ \Gamma_{\mu\gamma}^{\beta_1} a_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m}^{\mu\beta_2\dots\beta_n} + \Gamma_{\mu\gamma}^{\beta_2} a_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m}^{\beta_1\mu\dots\beta_n} + \dots + \Gamma_{\mu\gamma}^{\beta_n} a_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m}^{\beta_1\beta_2\dots\mu}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

erhalten wir für den Metriktensor zunächst

$$g_{\alpha\beta,\gamma} = g_{\alpha\beta,\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma}^\mu g_{\mu\beta} - \Gamma_{\beta\gamma}^\mu g_{\alpha\mu} \quad (3.10)$$

und mit Gleichung (3.8)

$$g_{\alpha\beta,\gamma} = 0, \quad (3.11)$$

woraus unmittelbar

$$g^{\alpha\beta}_{;\gamma} = 0 \quad (3.12)$$

folgt.

Die Bedeutung der kovarianten Ableitung besteht nun darin, daß diese Größe eine tensorielle Größe darstellt, deren Transformationsverhalten durch das

Transformationsgesetz für einen m-fach kovarianten und n-fach kontravarianten Tensor

$$\bar{a}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}^{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n} = \frac{\partial x^{\gamma_1}}{\partial \bar{x}^{\alpha_1}} \frac{\partial x^{\gamma_2}}{\partial \bar{x}^{\alpha_2}} \dots \frac{\partial x^{\gamma_m}}{\partial \bar{x}^{\alpha_m}} \frac{\partial \bar{x}^{\beta_1}}{\partial x^{\delta_1}} \frac{\partial \bar{x}^{\beta_2}}{\partial x^{\delta_2}} \dots \frac{\partial \bar{x}^{\beta_n}}{\partial x^{\delta_n}} a_{\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_m}^{\delta_1 \delta_2 \dots \delta_n} \quad (3.13)$$

erklärt ist. Des weiteren können wir mit Hilfe von Gleichung (3.9) die Absolute Ableitung eines Tangentenvektors, hier mit  $(dx^\alpha/dp)$  bezeichnet, definieren

$$\frac{D}{dp} \left( \frac{dx^\alpha}{dp} \right) = \left( \frac{dx^\alpha}{dp} \right)_{;\mu} \left( \frac{dx^\mu}{dp} \right) = \frac{d^2 x^\alpha}{dp^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp}, \quad (3.14)$$

wobei wir bei Anwendung der Gleichung (3.9) beachtet haben, daß der Tangentenvektor einen kontravarianten Tensor erster Stufe darstellt. Wie wir in Anschluß an die Gleichung (3.5) bemerken, stellt für zeitartige Weltlinien die Eigenzeit eine affine Koordinate dar, d.h. wir setzen

$$d\tau = dp.$$

Wir erhalten mit Hilfe der Definition des 4-Impulsvektors unter Einführung der Ruhemasse, die wir mit  $m_0$  bezeichnen,

$$p^\alpha = m_0 \frac{dx^\alpha}{d\tau}, \quad (3.15)$$

folgende verallgemeinerte Bewegungsgleichung aus (3.14)

$$\frac{Dp^\alpha}{d\tau} = p^\alpha_{;\mu} \left( \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = m_0 \left( \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right) = 0, \quad (3.16)$$

die nichts anderes besagt, als daß sich eine Punktmasse bei Abwesenheit von nicht-gravitativen Kräften auf einer geodätischen Linie im Riemannschen Raum bewegt. Treten zusätzlich nicht gravitative Kräfte auf, wie z.B. Oberflächenkräfte, elektromagnetische Kräfte, so muß die rechte Seite durch einen 4-Vektor, der sog. 4-Kraft, ersetzt werden

$$\frac{Dp^\alpha}{d\tau} = m_0 \left( \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right) = K^\alpha, \quad (3.17)$$

wobei die auftretende 4-Kraft eine Abweichung von der geodätischen Linie (3.5) verursacht.

Dabei handelt es sich aufgrund der tensoriellen Eigenschaften der kovarianten Ableitung und des Tangentenvektors wiederum um ein Tensorgesetz im Riemannschen Raum, d.h. die obigen Bewegungsgleichungen (3.16) und (3.17) gelten in jedem Bezugssystem.

An dieser Stelle wollen wir noch anführen, daß die obige Bewegungsgleichung eine Verallgemeinerung der Newtonschen Bewegungsgleichung

$$m \frac{d^2 x^i}{dt^2} = m \frac{\partial U}{\partial x^i} \quad \text{mit } U = + \frac{GM}{r} \quad (3.18)$$

darstellt und verweisen zur Verifizierung auf gängige Lehrbücher zur Allgemeinen Relativitätstheorie (z.B. Weinberg 1972, p.77). In der obigen Gleichung haben wir das skalare Newton Potential  $U$  im geodätischen Sinne (positives Vorzeichen) definiert, die träge Masse und die schwere Masse des Testkörpers haben wir mit  $m_0$  bzw.  $m_g$  bezeichnet, während  $G$  die Gravitationskonstante darstellt.

Nach der Verallgemeinerung der Newtonschen Bewegungsgleichung durch ein Tensorge-  
setz wollen wir die bekannte Poisson–Gleichung

$$\nabla^2 U = 4\pi G\rho \quad (3.19)$$

verallgemeinern. Dabei haben wir mit  $\rho$  die Massendichte bezeichnet, die im Rahmen der Newtonschen Gravitationstheorie die Quelle des Gravitationsfeldes darstellt.

Zur Verallgemeinerung der Newtonschen Feldgleichungen führen wir zunächst den Riemannschen Krümmungstensor

$$R_{\mu\nu\kappa}^{\lambda} = \frac{\partial}{\partial x^{\kappa}} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda} + \Gamma_{\mu\nu}^{\eta} \Gamma_{\kappa\eta}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\kappa}^{\eta} \Gamma_{\nu\eta}^{\lambda} \quad (3.20)$$

ein, woraus wir durch Kontraktion zunächst den Ricci–Tensor (z.B. Weinberg 1972, p.141)

$$R_{\mu\kappa} = R_{\mu\nu\kappa}^{\nu} = g^{\nu\lambda} R_{\lambda\mu\nu\kappa} \quad (3.21)$$

erhalten, während das Krümmungsskalar durch

$$R = R_{\kappa}^{\kappa} = g^{\kappa\mu} R_{\mu\kappa} = g^{\kappa\mu} g^{\nu\lambda} R_{\lambda\mu\nu\kappa} \quad (3.22)$$

definiert ist. Außerdem erfüllt der Ricci–Tensor die folgenden Symmetrieeigenschaften

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = R_{\nu\kappa\lambda\mu} \quad (3.23)$$

bzw. Antisymmetrieeigenschaften

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = -R_{\nu\kappa\mu\lambda} = -R_{\lambda\mu\kappa\nu} = +R_{\mu\lambda\kappa\nu}, \quad (3.24)$$

und die Bianchi–Identitäten

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa;\eta} + R_{\lambda\mu\eta\nu;\kappa} + R_{\lambda\mu\kappa\eta;\nu} = 0. \quad (3.25)$$

### 3–12. Die Einsteinschen Feldgleichungen

Unter Ausnutzung der Bianchi–Identitäten können wir einen Tensoroperator zweiter Stufe herleiten, dessen Divergenz in krummlinigen Koordinaten verschwindet. Indem wir Gleichung (3.25) mit  $g^{\lambda\nu}$  und  $g^{\kappa\mu}$  kontrahieren, erhalten wir unter Ausnutzung der

Antisymmetrieeigenschaften (3.24) zunächst

$$(R_{\eta}^{\mu} - \frac{1}{2}\delta_{\mu\eta}R)_{;\mu} = 0, \quad (3.26)$$

das wir durch erneute Kontraktion mit  $g^{\mu\eta}$  auf die bekannte Form

$$(R^{\mu\mu} - \frac{1}{2}g^{\mu\mu}R)_{;\mu} = 0 \quad (3.27)$$

bringen. Der Term in Klammern stellt dabei die Verallgemeinerung der linken Seite der Poissongleichung (3.19) dar, während die rechte Seite ebenfalls durch einen Tensor zweiter Stufe, den sog. Energie-Impuls-Tensor, verallgemeinert wird. Wir erhalten mit diesen Überlegungen die **Einsteinschen Feldgleichungen**

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = \kappa T^{\mu\nu}, \quad (3.28)$$

wobei ein Vergleich mit Gleichung (3.27)

$$T^{\mu\nu}_{;\mu} = 0 \quad (3.29)$$

ergibt, das wir als Energie- und Impulserhaltung für geschlossene Systeme bzw. als Integrabilitätsbedingungen

$$(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R)_{;\mu} = \kappa T^{\mu\nu}_{;\mu} \quad (3.30)$$

interpretieren können.

Der in Gleichung (3.28) auftretende Energie-Impulstensor repräsentiert die Quelle des Gravitationsfeldes, wobei im Gegensatz zur Newtonschen Gravitationstheorie neben den felderzeugenden Massen sämtliche Energieformen zugelassen sind. In Anwesenheit von geladener Materie schreibt sich der Energie-Impulstensor beispielsweise

$$T^{\mu\nu} = T_{\text{mat}}^{\mu\nu} + T_{\text{em}}^{\mu\nu}.$$

Die linke Seite der Gleichung (3.28) repräsentiert das Gravitationsfeld, das durch die Koeffizienten des Metriktensors beschrieben wird, die auf der rechten Seite auftretende Konstante muß durch zusätzliche Vorgaben bestimmt werden. Fordern wir, daß in Gleichung (3.28) die Newtonsche Gravitationstheorie als Sonderfall mit enthalten ist, so erhalten wir

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4} \quad (3.31)$$

und somit die Einsteinschen Feldgleichungen gem. (3.28)

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T^{\mu\nu}.$$

(3.32)

Mit der Formulierung der Feldgleichungen (3.32), der Bewegungsgleichungen (3.16) bzw. (3.17) und dem Linienelement (3.1) haben wir sämtliche Gleichungen formuliert, die wir im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie zur Modellierung geodätischer Meßoperationen benötigen. Im nächsten Abschnitt wollen wir die Grundgleichungen der Elektrodynamik aus Kapitel zwei verallgemeinern.

### 3-2. Formulierung der elektrodynamischen Grundgleichungen in Anwesenheit von Gravitationsfeldern

#### 3-21. Das Äquivalenzprinzip

In Abschnitt 3-1. untersuchen wir den Einfluß eines Gravitationsfeldes auf Punktmassen (vergl. Gl. (3.16)), während wir in diesem Abschnitt die Auswirkung eines Gravitationsfeldes auf allgemeine physikalische, insbesondere elektrodynamische, Systeme untersuchen. Dabei kommt dem Allgemeinen Äquivalenzprinzip fundamentale Bedeutung zu, wobei wir es in seiner allgemeinsten Form folgendermaßen angeben und verweisen auf Lehrbücher zur Allgemeinen Relativitätstheorie (Weinberg 1972, p.68 oder Misner et. al. 1973, p.386)

Beschränken wir uns auf genügend kleine Raum–Zeit–Bereiche, so können wir in jedem Punkt des vierdimensionalen Riemannschen Raums die physikalischen Gesetze so formulieren, daß sie ihre aus der Speziellen Relativitätstheorie bekannte Form annehmen.

Diese Form des Äquivalenzprinzips wird auch das **starke Äquivalenzprinzip** genannt, da es im Gegensatz zum **schwachen Äquivalenzprinzip**, das nur auf die freie Fallbewegung von Testkörpern Anwendung findet, alle Naturgesetze umfaßt.

Mit dem oben formulierten Prinzip können wir unsere Tensorgesetze bezüglich eines Lokalen Inertialsystems anschreiben und erhalten daher für kleine Raum–Zeit–Bereiche unsere bekannte Form der Maxwellschen Gleichungen

$$\begin{aligned} F_{\alpha\beta,\gamma} + F_{\beta\gamma,\alpha} + F_{\gamma\alpha,\beta} &= 0 \\ \bar{G}^{\mu\nu}{}_{,\nu} &= (4\pi/c)J^\mu, \end{aligned} \tag{3.33}$$

wobei sich die quergestrichenen Größen auf das Lokale Inertialsystem beziehen. Dabei gehen wir davon aus, daß die elektromagnetischen Feldgrößen nicht direkt an die Krümmung des Raumes ankoppeln, da wir ansonsten die Gleichungen nicht in der Form (3.33) erhalten würden.

Um die obigen Gleichungen allgemein kovariant zu formulieren, müssen sie als Tensorgesetze im Riemannschen Raum dargestellt werden, wobei wir die nicht tensoriellen Größen, die partiellen Ableitungen, durch die kovarianten Ableitungen gem. der Definition (3.9) zu ersetzen haben und erhalten

$$F_{\alpha\beta;\gamma} + F_{\beta\gamma;\alpha} + F_{\gamma\alpha;\beta} = 0 \tag{3.34}$$

$$G^{\mu\nu}{}_{;\nu} = (4\pi/c)J^\mu. \tag{3.35}$$



Dabei gilt aufgrund der Definition des Faraday-Tensors (2.13) und der Symmetrie der Christoffelsymbole in den beiden unteren Indices

$$F_{\alpha\beta} = A_{\beta,\alpha} - A_{\alpha,\beta} = A_{\beta;\alpha} - A_{\alpha;\beta}, \quad (3.36)$$

wodurch Gleichung (3-34) automatisch erfüllt wird. Die Komponenten des 4-Potentials werden daher aus den inhomogenen Maxwellschen Gleichungen berechnet.

Die Gleichungen (3.32) und (3.35) werden gem. (Schmidt 1990, p.9) auch als die minimal gekoppelten Einstein-Maxwell-Gleichungen bezeichnet, die wir nun aus einem Variationsprinzip herleiten wollen, wobei wir uns im Falle von Gleichung (3.35) auf den Sonderfall  $J^\mu=0$  beschränken, da nur dieser für die weitere Diskussion interessant ist (vergl. Abschnitt 3-3.).

Wir definieren zunächst folgende Größen

$$I_g = - \frac{c^4}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (3.37)$$

$$I_m = - \frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{g} F_{\lambda\rho} G^{\lambda\rho} = - \frac{1}{8} \int d^4x \sqrt{g} F_{\lambda\rho} \chi_{\mu\nu}^{\lambda\rho} F^{\mu\nu} \quad (3.38)$$

und beachten, daß es sich bei den jeweiligen Integranden um Skalare im Sinne der Tensorrechnung handelt. Dabei haben wir zunächst  $d^4x \sqrt{g}$ , das invariante Volumenelement, mit  $I_g$  das Wirkungsintegral des Gravitationsfeldes und schließlich mit  $I_m$ , das Wirkungsintegral des elektro-magnetischen Feldes, eingeführt. Daraus können wir die Einstein-Maxwell-Gleichungen herleiten, indem wir folgendes Variationsprinzip

$$\delta I_{\min} = \delta(I_g + I_m) = 0 \quad (\text{stationäre Wirkung}) \quad (3.39)$$

ansetzen und die skalaren Integranden in (3.37,38) als Funktionale der Felder  $g_{\alpha\beta}$  und  $F_{\lambda\rho}$  auffassen. Der Maxwell-Tensor wird mit Hilfe der Materialgleichungen (2.17) substituiert.

Durch Anschreiben folgender Identitäten (z.B. Weinberg 1972, Ch.12)

$$\delta I_g = - \frac{c^4}{16\pi G} \delta \int d^4x \sqrt{g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = - \frac{c^4}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{g} [ R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R ] \delta g_{\alpha\beta} \quad (3.40)$$

und

$$\begin{aligned} \delta I_m = & - \frac{1}{4} \delta \int d^4x \sqrt{g} F_{\lambda\rho} G^{\lambda\rho} = \\ & \int d^4x \sqrt{g} G^{\lambda\rho}_{;\lambda} \delta A_\rho - \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{g} ( \frac{1}{4} G_{\mu\nu} F^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - G_\mu^\alpha F^{\mu\beta} ) \delta g_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (3.41)$$

können wir Gleichung (3.39) umformen. Wir erhalten nach Zusammenfassen der entsprechenden Terme

$$\begin{aligned} \delta I_{\min} = \int d^4x \sqrt{g} \left[ \frac{c^4}{16\pi G} [R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R] - \frac{1}{2} [\frac{1}{4} G_{\mu\nu} F^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - G_{\mu}^{\alpha} F^{\mu\beta}] \right] \delta g_{\alpha\beta} \\ + \int d^4x \sqrt{g} G^{\lambda\rho}_{;\lambda} \delta A_{\rho} = 0 \end{aligned} \quad (3.42)$$

und der Definition des Energie-Impulstensors des elektromagnetischen Feldes in Materie

$$T_{el}^{\alpha\beta} = [\frac{1}{4} G_{\mu\nu} F^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - G_{\mu}^{\alpha} F^{\mu\beta}] \quad (3.43)$$

die Einstein-Maxwell-Gleichungen. Wir fassen dabei die Komponenten des elektromagnetischen Feldes und des Metriktensors als unabhängige Größen auf, so daß Gleichung (3.42) nur erfüllt ist, wenn die jeweiligen Koeffizienten von  $\delta g_{\alpha\beta}$  und  $\delta A_{\rho}$  verschwinden. Ferner bemerken wir, daß in dem Wirkungsintegral

$$I_{\min} = \int d^4x \sqrt{g} \left[ -\frac{c^4}{16\pi G} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} F_{\lambda\rho} G^{\lambda\rho} \right] \quad (3.44)$$

keine skalaren Größen auftreten, die eine direkte Kopplung des Gravitationsfeldes und des elektromagnetischen Feldes zur Folge haben, wie es z.B. bei  $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} R$  der Fall wäre.

Die Konsequenz einer solchen Kopplung wäre allerdings, daß wir bezüglich eines Lokalen Inertialsystems für kleine Raum-Zeit-Bereiche die Tensorgleichungen der Speziellen Relativitätstheorie nicht mehr erhalten würden. Dies haben wir jedoch bei der Formulierung des Starken Äquivalenzprinzips gefordert. Wir können des weiteren auch physikalische Argumente, wie die Ladungserhaltung gegen eine solche direkte Ankopplung anführen, da wir dann elektrische und magnetische Felder als Folge der Raumkrümmung bei Abwesenheit von Ladungen zu verzeichnen hätten. Dies spricht jedoch gegen die bisherigen experimentellen Befunde.

Mit der Formulierung der Gleichungen (3.34) und (3.35), die wir in diesem Abschnitt aus einem Variationsprinzip hergeleitet haben, besitzen wir nun die Grundgleichungen, um die Wellenausbreitung in Anwesenheit eines Gravitationsfeldes zu untersuchen. Wir beschränken uns dabei auf den Fall des quellenfreien Raums, d.h. die Komponenten des Viererstroms sind null.

### 3-3. Die allgemein kovariante Eikonalgleichung

In Abschnitt 3-2. zeigen wir, wie Tensorgesetze des Minkowski-Raums mit Hilfe des starken Äquivalenzprinzips auf den gekrümmten Riemannschen Raum verallgemeinert werden, um anschließend die so erhaltenen Gesetze aus einem Variationsprinzip, dem Prinzip der minimalen Kopplung, herzuleiten. Fordern wir die Gültigkeit des starken Äquivalenzprinzips, so besitzen wir ein eindeutiges Verfahren, um die physikalischen Gesetze des Minkowski-Raums auf den gekrümmten Riemannschen Raum zu übertragen. Ein solches Gesetz, das wir verallgemeinern wollen, ist die lorentzinvariante Form der Eikonalgleichung (2.48). Dieses Gesetz können wir in einem Lokalen Inertialsystem (quergestrichene Größen) unter Beachtung des Metriktensors des

Minkowski–Raums folgendermaßen anschreiben

$$\eta^{\alpha\beta}\bar{k}_\alpha\bar{k}_\beta = (n^2 - 1)(\eta^{\alpha\beta}\bar{k}_\alpha\bar{u}_\beta/c)^2, \quad (3.45)$$

woraus wir unter Anwendung des starken Äquivalenzprinzips die **allgemein kovariante Form der Eikonalgleichung**

$$g^{\alpha\beta}k_\alpha k_\beta = (n^2 - 1)(g^{\alpha\beta}k_\alpha u_\beta/c)^2 = (n^2 - 1)(k_\alpha u^\alpha/c)^2 \quad (3.46)$$

erhalten. Diese Gleichung ist aufgrund der Tatsache, daß es sich um ein Tensorgesetz im gekrümmten Riemannschen Raum handelt, in jedem Bezugssystem gültig. Dies haben wir durch zwei Stufen erreicht, wobei die erste darin besteht, daß es uns gelungen ist, die Eikonalgleichung zunächst lorentzinvariant zu formulieren, um schließlich mit Hilfe des in Abschnitt 3–2. Gesagten, auf die Anwesenheit von Gravitationsfeldern zu verallgemeinern. Die Anwendbarkeit der obigen Gleichung wird bezüglich eines Lokalen Inertialsystems durch die Gleichungen (2.34) und (2.35) festgelegt, d.h. obige Gleichung stellt nichts anderes dar, als ein Grundgesetz der geometrischen Optik in Anwesenheit von Gravitationsfeldern. Dieses Gesetz machen wir uns bei der Aufstellung der Bewegungsgleichung für elektromagnetische Wellen zunutze.

#### 3–4. Bewegungsgleichung einer elektromagnetischen Welle im inhomogenen Medium

In diesem Abschnitt werden wir die Bewegungsgleichung einer elektromagnetischen Welle in einem dispersiven und refraktiven Medium aufstellen. Wir leiten dabei zunächst ein Variationsprinzip ab, indem wir die Analogien zwischen der Hamilton–Jacobi–Formulierung der klassischen Mechanik und der geometrischen Optik ausnutzen. Im Anschluß daran zeigen wir, daß unser erhaltenes Variationsprinzip die kovariante Verallgemeinerung des aus der geometrischen Optik bekannten Fermatschen Prinzips darstellt.

Zur Beschreibung der Wellenausbreitung haben wir im Rahmen der Approximation der geometrischen Optik die allgemeine Eikonalgleichung aufgestellt, die wir als Bedingungsgleichung in das Variationsprinzip einführen. Das bekannte Prinzip der Variation des optischen Lichtwegs im dreidimensionalen Euklidischen Raum können wir als Sonderfall unseres Variationsprinzips unter Berücksichtigung der Eikonalgleichung herleiten, schließlich geben wir eine differentialgeometrische Deutung unserer Vorgehensweise an.

In Abschnitt 3–42. geben wir die Bewegungsgleichung der elektromagnetischen Welle an, wobei wir zunächst ein gekoppeltes System von Differentialgleichungen erster Ordnung für den Orts– und Wellenvektor herleiten, das wir auf ein System von Differentialgleichungen zweiter Ordnung für den 4–Ortsvektor zurückführen. Die erhaltene Differentialgleichung wird abschließend eingehend diskutiert, indem wir die Analogie zur Differentialgleichung der Geodätische Linie herleiten.

### 3-41. Herleitung eines Variationsprinzips

Wir starten zunächst mit der Gleichung (2.27), wobei wir fordern, daß

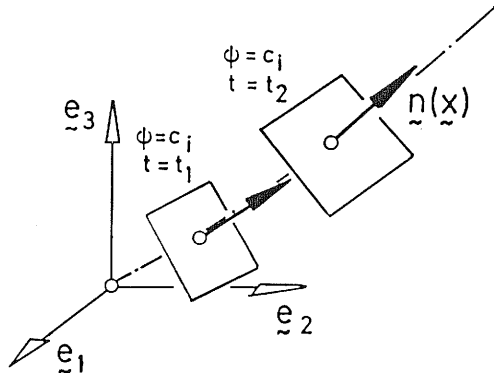


Abb. 3.1: Ausbreitung der Phasenfläche

$$\phi = c_i = \text{const.} \quad (3.47)$$

erfüllt ist. Diese Gleichung definiert für einen vorgegebenen Phasenwert, den wir mit  $c_i$  bezeichnen, und für den jeweiligen Zeitpunkt eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit, die wir im Rahmen der geometrischen Optik durch eine Ebene mit 3-orts-abhängigen Normalenvektor approximieren können.

Die Gleichung für eine Phasenfläche läßt sich wiederum in einen nur von den räumlichen Komponenten und

einen nur von der zeitartigen Komponente des 4-Ortsvektors abhängigen Anteil aufspalten, das wir mathematisch mit Gleichung (2.27) folgendermaßen ausdrücken können

$$\phi(x^1, x^2, x^3, ct) = \int_{t^\beta}^t k_\mu (dx^\mu / dt) dt = \int_{(x^i)^\beta}^{x^i} k_1(x^j) dx^1 - (\omega/c)c(t - t^\beta) = W(x^1, x^2, x^3) - Et, \quad (3.48)$$

wobei wir den räumlichen Anteil in Anlehnung an die Hamilton–Jacobi–Theorie mit  $W$  bezeichnen,  $E$  bedeutet eine zeitunabhängige Konstante, da

$$k_4 c = -(\omega/c)c = \text{const.}$$

gem. Gleichung (2.27) gilt.

Die obige Gleichung ähnelt in ihrer Struktur dem Zusammenhang zwischen der Prinzipalfunktion und der charakteristischen Funktion in der klassischen Mechanik, wobei für die betrachteten mechanischen Systeme die Forderungen

- i.) der Geschwindigkeitsunabhängigkeit des Potentials
- ii.) die Hamiltonfunktion ist zeitlich konstant und gleich der Gesamtenergie des Systems

erfüllt sein müssen. Wir verweisen zu einer tiefergehenden Diskussion des Hamilton–Jacobi–Formalismus auf Lehrbücher der klassischen Mechanik wie z.B. (Goldstein 1980, Ch. 10).

Der Zusammenhang zwischen der Prinzipalfunktion und der charakteristischen Funktion lautet

$$S(x^1, x^2, x^3, ct) = W(x^i) - Et, \quad (3.49)$$

wobei  $W$  die charakteristische Funktion,  $E$  die Gesamtenergie des Systems bezeichnet. Die obige Gleichung beschreibt im Rahmen der Hamilton–Jacobi–Theorie die Wellen

front S, die sich im dreidimensionalen Konfigurationsraum ausbreitet.

Bei der Diskussion der Analogien mechanischer und optischer Systeme haben wir jedoch zu beachten, daß im Rahmen der Newtonschen Theorie die Zeit—Koordinate als absolute Größe behandelt wird, während die Zeit im Rahmen der Relativitätstheorie als 4—Koordinate in einem vierdimensionalen, gekrümmten Raum aufgefaßt wird. Wir führen daher einen sogenannten generalisierten 4—Impuls ein, der sich aus der Phasenfunktion folgendermaßen berechnet

$$p_\alpha = \frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha}. \quad (3.50)$$

Zur eigentlichen Formulierung des Variationsprinzips wenden wir die Beziehung zwischen der Prinzipalfunktion und der Lagrangefunktion (z.B. Arnol'd 1988, p.255)

$$S(t) = \int_{t^\beta}^t L dt \quad (3.51)$$

an, wobei wir durch Vergleich mit Gleichung (3.48) sofort die Lagrangefunktion

$$L = k_\mu (dx^\mu/dt)$$

erhalten. Das Variationsprinzip lautet mit dem bekannten Formalismus der Variationsrechnung

$$\delta \int_{t^\beta}^t L dt = \delta \int_{t^\beta}^t k_\mu (dx^\mu/dt) dt = \delta \int_C k_\alpha dx^\alpha = 0, \quad (3.52)$$

das wiederum in jedem Bezugssystem gültig ist, da es sich bei dem Integranden um ein Skalarprodukt zweier Vierervektoren, dem Wellenvektor und dem Koordinatendifferential des 4—Ortsvektors, handelt. Bei der letzten Umformung haben wir die in der Raum—Zeit durchlaufene Kurve mit C bezeichnet.

Durch Ausnutzen der formalen Analogie zwischen dem Ausbreiten unserer Phasenfläche in der vierdimensionalen Raum—Zeit und der Hamilton—Jacobi—Gleichung ist es uns gelungen, ein kovariantes Variationsprinzip zu formulieren. Die Koordinatenzeit wird dabei formal als generalisierte Koordinate behandelt, während die Zeit im Rahmen der klassischen Mechanik als absolute Größe behandelt wird.

Die Anwendbarkeit unserer Vorgehensweise wollen wir nun an einigen Beispielen demonstrieren, indem wir fordern, daß die bisherigen physikalischen Gesetze mit unserem Prinzip aus Gleichung (3.52) konsistent sind.

Das für die geometrische Optik entscheidende Prinzip ist das Fermatsche Prinzip, welches besagt, daß das Licht zwischen zwei vorgegebenen Punkten  $P_\alpha$  und  $P^\beta$  immer den Weg zurücklegt, für den die benötigte Laufzeit extremal wird, d.h.

$$c \delta \int_{t^\beta}^{t_\alpha} dt = \delta \int_{(x^i)^\beta}^{(x^i)_\alpha} n(\underline{x}) ds = 0. \quad (3.53)$$

Zur weiteren Diskussion betrachten wir die nebenstehende Skizze.  $P_\alpha$ ,  $P_\beta$  seien zwei

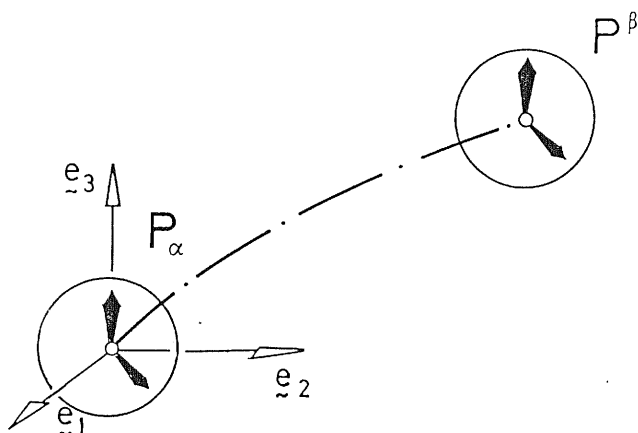


Abb. 3.2: Gedankenexperiment zur Herleitung des Fermatschen Prinzips

bezüglich dem Ruhesystem des nicht dispersiven Mediums, dem e-System, ruhende Beobachter, wobei sich  $P_\alpha$  im Ursprung des Bezugssystems befindet. Die in  $P_\alpha$  gelagerte Uhr definiert die Koordinatenzeit, d.h.

$$dt = d\tau, \quad (3.54)$$

das Eigenzeitintervall der obigen Uhr entspricht dem Koordinatenzeitintervall. In  $P_\beta$  befindet sich ein Standardoszillator, der bezüglich seines Ruhesystems mit der Kreisfrequenz  $\omega$  schwingt. Das von  $P_\alpha$  empfangene Signal besitzt dieselbe Kreisfrequenz, da für zwei bezüglich des Mediums

ruhende Beobachter die empfangene bzw. gesendete Frequenz identisch sind. Ferner gilt für die differentielle Phase mit den Gleichungen (2.43) und (3.54)

$$d\phi = k_\mu dx^\mu = -\omega dt = -(\omega/c)cdt, \quad (3.55)$$

womit sich die Komponenten des 4-Wellenzahlvektors folgendermaßen

$$k_\mu = (0, 0, 0, -\omega/c)$$

ergeben. Setzen wir die Komponenten des obigen 4-Wellenzahlvektors in das Variationsprinzip (3.52) ein, so erhalten wir

$$\omega \delta \int_{t^\beta}^{t^\alpha} dt = 0, \quad (3.56)$$

das zum Fermatschen Prinzip (3.53) äquivalente Variationsprinzip.

Im nächsten Schritt wenden wir die im vorigen Abschnitt 3-3. hergeleitete Eikonalgleichung auf die obige Meßanordnung an, wobei wir die 4-Geschwindigkeit des Mediums benötigen, die in unserem Fall

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau} = \delta_4^\alpha c \frac{dt}{d\tau} = \delta_4^\alpha c$$

lautet. Die letzte Umformung haben wir aufgrund des in Anschluß an die Gleichung (3.53) Gesagten ausgeführt. Verfolgen wir eine Phasenfläche von  $P_\beta$  nach  $P_\alpha$ , d.h. fordern wir

$$\phi = \text{const.},$$

so erhalten wir mit Gleichung (2.43)

$$d\phi = k_i dx^i + k_4 dx^4 = k r^i dx^i + k_4 c dt = 0, \quad (3.57)$$

wobei  $r^i$  die räumlichen Komponenten des Ausbreitungsvektors mit der Eigenschaft

$$\| r^i e_i \| = 1, \quad (3.58)$$

bezeichnen. Die Komponenten des räumlichen Anteils unseres 4-Wellenzahlvektors sind noch zu bestimmen, die wir aus der Eikonalgleichung (2.48), angewendet auf oben beschriebenes Experiment, unter Beachtung von (3.57) u. (3.58) erhalten

$$k_i = \omega / c n r_i. \quad (3.59)$$

Indem wir die räumlichen Komponenten des 4-Ortsvektordifferentials mit Hilfe der folgenden Definition unter Beachtung von Gleichung (3.58)

$$d\tilde{x} = \tilde{k} / \| \tilde{k} \| d\tilde{s} = r^j e_j d\tilde{s} \quad (3.60)$$

in Gleichung (3.57) substituieren, erhalten wir die aus der geometrischen Optik bekannten Beziehungen

$$c dt = n(\tilde{x}) d\tilde{s}, \quad (3.61)$$

und durch Integration der obigen Identität die Variationsprinzipie gem. Gleichung (3.53). Aus Gleichung (3.60) sehen wir unmittelbar, daß  $d\tilde{s}$  das räumliche Wegelement entlang des Lichtstrahls darstellt. Die Integration der Gleichung (3.61) erfolgt unter Annahme eines stationären Brechungsfeldes, das wir in Abschnitt 3-42. berücksichtigen (Verschwinden der zeitlichen Ableitungen für  $n$ ).

Wir wollen an dieser Stelle bemerken, daß die Auswertung des Variationsprinzips auf der rechten Seite von (3.53) auf die Differentialgleichung einer geodätischen Linie im dreidimensionalen, i.a. nicht Euklidischen Raum (auch als der Refraktionsraum bezeichnet, vergl. Heitz 1991, p.91) führt, wobei die Komponenten des Metriktensors durch die Brechzahl gemäß

$$g_{ij} = \delta_{ij} n^2(\tilde{x}) \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (3.62)$$

definiert werden. Die 3-Koordinaten stellen isotherme, nicht Euklidische Koordinaten dar.

Zusammenfassend können wir an dieser Stelle sagen, daß wir durch das kovariant formulierte Variationsprinzip (3.52) und die Eikonalgleichung (3.46) Prinzipie bzw. physikalische Gesetze gefunden haben, die in jedem Bezugssystem gelten und die die bekannten Gesetze der nicht-relativistischen geometrischen Optik als Sonderfall einschließen. Dies haben wir an dem oben diskutierten Beispiel gezeigt, woraus wir schließen können, daß die bisher bekannten Gesetze, wie z.B. das Fermatsche Prinzip, nur im Ruhesystem des Mediums gelten. In der Terminologie der Allgemeinen Relativitätstheorie können wir auch sagen, das Ruhesystem des Mediums ist in der nicht-relativistischen geometrischen Optik gegenüber den anderen Bezugssystem ausgezeichnet.

Abschließend schreiben wir das auszuwertende Variationsprinzip noch einmal an

$$\delta \int k_{\alpha} dx^{\alpha} = 0, \quad (3.63)$$

das wir unter der zusätzlichen Bedingung, der Gültigkeit der allgemeinen Eikonalgleichung, die das Ausbreitungsverhalten der elektromagnetischen Welle beschreibt

$$\Omega: [g^{\alpha\beta} k_{\alpha} k_{\beta} - (k_{\alpha} u^{\alpha}/c)^2 (n^2 - 1)]/2 = 0, \quad (3.64)$$

zu extremieren haben.

### 3-42. Wellenausbreitung in einem inhomogenen Medium

#### 3-421. Differentialgleichungssystem für den 4-Ortsvektor und 4-Wellenvektor

Die Auswertung des Variationsprinzips (3.63) unter Einhaltung der Bedingungsgleichung (3.64) geschieht mit denselben Methoden, wie sie auch in der klassischen Mechanik Anwendung finden und verweisen auf Lehrwerke zur klassischen Mechanik (Goldstein 1980, p.45). Wir wenden dabei die Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren an, indem wir zunächst unter Einführung einer unabhängigen Kurvenkoordinate das Variationsprinzip folgendermaßen anschreiben

$$I = \int_C k_{\alpha} \frac{dx^{\alpha}}{dp} dp, \quad (3.65)$$

und die Eikonalgleichung als vom physikalischen System einzuhaltende Bedingungsgleichung (3.64)

$$\begin{aligned} \Omega: [g^{\alpha\beta} k_{\alpha} k_{\beta} - (k_{\alpha} u^{\alpha}/c)^2 (n^2 - 1)]/2 = \\ [k_{\alpha} k^{\alpha} - K_0^2 (n^2 - 1)]/2 = 0, \end{aligned} \quad (3.66)$$

eingeführen. Dabei stellt im Sinne der Variationsrechnung die Kurvenkoordinate , mit p bezeichnet, die unabhängige Größe dar, während die Komponenten des 4-Ortsvektors und des 4-Wellenzahlvektors als die abhängigen Größen

$$x^{\alpha} = x^{\alpha}(p)$$

$$k_{\alpha} = k_{\alpha}(p)$$

aufgefaßt werden, C stellt den Signalweg dar. Für die weitere Berechnung haben wir

$$K_0 = u^{\mu} k_{\mu}/c$$

in die obige Bedingungsgleichung eingeführt.

Die Auswertung der Gleichungen (3.65) und (3.66) führt mit den Methoden der Varia



tionsrechnung (z. Bsp. Arfken 1985, p.952) auf die Eulerschen Differentialgleichungen

$$\frac{dx^\alpha}{dp} = \lambda(p) \frac{\partial \Omega}{\partial k_\alpha} \quad (3.67)$$

$$\frac{dk_\alpha}{dp} = -\lambda(p) \frac{\partial \Omega}{\partial x^\alpha}, \quad (3.68)$$

wobei wir beachten, daß es sich bei Gleichung (3.66) um eine holonome Zwangsbedingung (z.B. Heitz 1980, p. 54)

$$\Omega = \Omega(k_\mu, x^\gamma) = 0$$

handelt. Die Gleichungen (3.67) und (3.68) stellen ein gekoppeltes Differentialgleichungssystem dar, woraus wir durch Bilden der partiellen Ableitungen folgende gewöhnliche Differentialgleichungen

$$\frac{dx^\alpha}{dp} = \lambda [k^\alpha - (u^\alpha/c) K_0 (n^2 + K_0 n n_{,K_0} - 1)] \quad (3.69)$$

$$\frac{dk_\alpha}{dp} = -\lambda [ (1/2) g^{\mu\nu}_{, \alpha} k_\mu k_\nu - K_0 (u^\mu_{, \alpha} k_\mu / c) (n^2 + K_0 n n_{,K_0} - 1) - K_0^2 n \delta^\alpha_{in, \alpha} ] \quad (3.70)$$

erhalten. Bei der Bildung der Ableitungen haben wir die 4-Geschwindigkeit als Ortsfunktion

$$u^\mu = u^\mu(x^\nu) \quad (3.71)$$

betrachtet, des weiteren den Brechungsindex als Funktion der räumlichen Komponenten des 4-Ortsvektors und der skalaren Größe  $K_0$

$$n = n(x^i, K_0). \quad (3.72)$$

Dadurch wird auch die Funktion des Kroneckersymbols deutlich, da die zeitlichen Ableitungen des stationären Brechungsindex zu Null werden. Wir verweisen an dieser Stelle noch einmal auf die Gültigkeit des Fermatschen Prinzips, das wir in Abschnitt (3–41) diskutieren.

Der in den Gleichungen (3.69) und (3.70) auftretende Lagrangefaktor ist vorläufig unbestimmt. Berücksichtigen wir zunächst, daß es sich bei dem in Gleichung (3.65) eingeführten Kurvenparameter um einen affinen Parameter handelt, so gilt

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = C^2 dp^2,$$

in Anlehnung an die Definition der Eigenzeit, die jedoch in unserem Problem zur

Parametrisierung ungeeignet ist. Obige Gleichung wird zunächst folgendermaßen umgeformt

$$C^2 = g_{\alpha\beta}(dx^\alpha/dp)(dx^\beta/dp) = \text{const.}, \quad (3.73)$$

und wir erhalten damit folgende Bestimmungsgleichung aus den Gleichungen (3.73) und (3.69), indem wir des weiteren (3.46) und (2.4b) anwenden

$$\lambda = \frac{C}{K_0 n ((n + K_0 n_{,K_0})^2 - 1)^{1/2}}. \quad (3.74)$$

Über die auftretende Konstante können wir frei verfügen. Zur weiteren Diskussion der Gleichungen (3.69) und (3.70) haben wir ferner zu beachten, daß es sich bei  $(dx^\alpha/dp)$  um einen Tangentenvektor an die Weltlinie des Lichtstrahls handelt, während die Größe  $(dk_\alpha/dp)$  keine tensorielle Größe darstellt. Um diese zu bekommen, führen wir die absolute Differentiation bezüglich des affinen Parameters durch und erhalten mit den Gleichungen (3.9) und (3.70)

$$\begin{aligned} \frac{Dk_\alpha}{dp} &= \frac{dk_\alpha}{dp} - \Gamma_{\alpha\mu}^\gamma k_\gamma \left( \frac{dx^\mu}{dp} \right) = \\ &= -\lambda \left[ (1/2) g^{\mu\nu}_{, \alpha} k_\mu k_\nu - K_0 (u^\mu_{, \alpha} k_\mu / c) (n^2 + K_0 n n_{, K_0} - 1) - K_0^2 n \delta_{i n, \alpha}^\alpha \right] \\ &\quad - \lambda \Gamma_{\alpha\mu}^\gamma k_\gamma \left[ k^\mu - (u^\mu / c) K_0 (n^2 + K_0 n n_{, K_0} - 1) \right], \end{aligned} \quad (3.75)$$

womit sich unter Anwendung der Gleichungen (3.12) und (3.9) das Absolute Differential des 4-Wellenzahlvektors folgendermaßen anschreiben läßt

$$\frac{Dk_\alpha}{dp} = \lambda K_0 (u^\mu_{, \alpha} k_\mu / c) (n^2 + K_0 n n_{, K_0} - 1) + \lambda K_0^2 n \delta_{i n, \alpha}^\alpha. \quad (3.76)$$

Anhand dieser Formel können wir unmittelbar nachvollziehen, daß der 4-Wellenvektor im Vakuum ( $n=1, n_{, K_0}=n_{, \alpha}=0$ ) parallel transportiert wird

$$\frac{Dk_\alpha}{dp} = \frac{dk_\alpha}{dp} - \Gamma_{\alpha\mu}^\gamma k_\gamma \left( \frac{dx^\mu}{dp} \right) = 0, \quad (3.77)$$

woraus für die kontravarianten Komponenten mit Gleichung (3.12)

$$\frac{Dk^\alpha}{dp} = 0 \quad (3.78)$$

folgt.

Mit diesen Überlegungen zum Sonderfall des Vakuums können wir folgendes Differentialgleichungssystem

$$\frac{dx^\alpha}{dp} = \lambda [k^\alpha - (u^\alpha/c) K_0 (n^2 + K_{0nn, K_0} - 1)] \quad (3.79)$$

$$\frac{dk_\alpha}{dp} = \lambda [K_0 (u^\mu{}_{;\alpha} k_\mu / c) (n^2 + K_{0nn, K_0} - 1) + K_{0n}^2 \delta_{in, \alpha}^\alpha] + \Gamma_{\alpha\mu}^\gamma k_\gamma \left( \frac{dx^\mu}{dp} \right) \quad (3.80)$$

angeben, das wir zur numerischen Auswertung bezüglich der Koordinatenzeit parametrisieren wollen.

Zunächst erhalten wir aus der zeitlichen Komponente von Gleichung (3.79)

$$\frac{dt}{dp} = (\lambda/c) [k^4 - (u^4/c) K_0 (n^2 + K_{0nn, K_0} - 1)], \quad (3.81)$$

womit wir die räumlichen Komponenten von (3.79) folgendermaßen darstellen können

$$\frac{dx^i}{dt} = c [k^i - (u^i/c) K_0 (n^2 + K_{0nn, K_0} - 1)] / [k^4 - (u^4/c) K_0 (n^2 + K_{0nn, K_0} - 1)]. \quad (3.82)$$

Die Komponenten von Gleichung (3.80) nehmen folgende Form an

$$\frac{dk_\alpha}{dt} = c [K_0 (u^\mu{}_{;\alpha} k_\mu / c) (n^2 + K_{0nn, K_0} - 1) + K_{0n}^2 \delta_{in, \alpha}^\alpha] / [k^4 - (u^4/c) K_0 (n^2 + K_{0nn, K_0} - 1)] \quad (3.83)$$

$$+ \Gamma_{\alpha\mu}^\gamma k_\gamma \left( \frac{dx^\mu}{dt} \right).$$

Mit der Formulierung der Differentialgleichungen (3.79) und (3.80), die ein gekoppeltes System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung darstellen, können wir sowohl den 4-Ortsvektor, als auch den 4-Wellenvektor, in Abhängigkeit des affinen Parameters lösen. Wir müssen dabei zur eindeutigen Bestimmung acht Integrationskonstanten, z.B.

$$x^\mu(P^\beta) \text{ und } k^\mu(P^\beta)$$

Anfangswertaufgabe

$$x^\mu(P_\alpha) \text{ und } x^\mu(P^\beta)$$

Randwertaufgabe

vorgeben. Wir gehen darauf in Kapitel fünf näher ein und wollen zunächst die Gleichungen (3.79) und (3.80) weiter diskutieren, wobei wir, analog unserer bisherigen Vorgehensweise, die Betrachtungen zunächst für den affinen Parameter anstellen und erst danach die Koordinatenzeit als unabhängigen Parameter einführen.

### 3-422. Differentialgleichung zweiter Ordnung für den 4-Ortsvektor

Bevor wir eine erneute Differentiation der Gleichung (3.79) durchführen, stellen wir zunächst fest, daß die Größe  $(dx^\alpha/dp)$  einen Tangentenvektor an die Weltlinie darstellt und dessen kovariante Ableitung wir mit Gleichung (3.14) angegeben haben

$$\frac{D}{dp} \left( \frac{dx^\alpha}{dp} \right) = \frac{d^2 x^\alpha}{dp^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp}. \quad (3.84)$$

Die linke Seite der obigen Gleichung können wir durch Differentiation von Gleichung (3.69) explizit anschreiben

$$\begin{aligned} \frac{D}{dp} \left( \frac{dx^\alpha}{dp} \right) = & \lambda \{ (Dk^\alpha/dp) - (Du^\alpha/dp) K_0 (n^2 + K_0 n n_{,K_0} - 1) / c \\ & - (u^\alpha/c) D[K_0 (n^2 + K_0 n n_{,K_0} - 1)] / dp \} \\ & + \{ k^\alpha - (u^\alpha/c) K_0 (n^2 + K_0 n n_{,K_0} - 1) \} (d\lambda/dp), \end{aligned} \quad (3.85)$$

wobei wir den 4-Wellenvektor mit Hilfe der Gleichungen (3.69) u. (3.76) unter Anwenden seines Transformationsverhaltens eliminieren und erhalten somit die Bewegungsgleichung einer elektromagnetischen Welle in einem dispersiven und refraktiven Medium

$$\begin{aligned} \frac{D}{dp} \left( \frac{dx^\alpha}{dp} \right) = & \lambda \{ + \lambda g^{\alpha\beta} K_0^2 n \delta_{in,\beta}^\beta + g^{\alpha\beta} (K_0/c) (n^2 + K_0 n n_{,K_0} - 1) (u_{\nu,\beta} - u_{\beta,\nu}) \left( \frac{dx^\nu}{dp} \right) \\ & - (u^\alpha/c) [(n^2 + 2K_0 n n_{,K_0} - 1) (DK_0/dp) + K_0 (2n + K_0 n_{,K_0}) (dn/dp) \\ & + K_0^2 n (Dn_{,K_0}/dp)] \} \\ & + (dx^\alpha/dp) (d\lambda/dp) / \lambda. \end{aligned} \quad (3.86)$$

Bei der obigen Umformung benutzen wir die Identität

$$u^\nu u_{\nu,\beta} = 0,$$

die wir anhand Gleichung (2.4b) sofort nachvollziehen können. Die Darstellung des letzten Summanden erhalten wir aus Gleichung (3.74) durch Differentiation nach dem Kurvenparameter und einigen algebraischen Umformungen

$$\begin{aligned} (d\lambda/dp)/\lambda = & - [K_0 n^2 ((n + K_0 n_{,K_0})^2 + K_0 n_{,K_0} (n + K_0 n_{,K_0}) - 1) (dK_0/dp) + \\ & + K_0^2 n ((n + K_0 n_{,K_0})^2 + n (n + K_0 n_{,K_0}) - 1) (dn/dp) + \\ & + K_0^3 n^2 (n + K_0 n_{,K_0}) (dn_{,K_0}/dp)] / [K_0^2 n^2 ((n + K_0 n_{,K_0})^2 - 1)], \end{aligned} \quad (3.87)$$

während wir die Ableitung des Skalars  $K_0$  unter Anwendung der Gleichungen (3.69) und (3.70) folgendermaßen angeben können

$$\begin{aligned}
 (DK_0/dp) = & (u_{\mu;\nu}/c)\lambda[(dx^\mu/dp)/\lambda + (u^\mu/c)K_0(n^2 + K_0 n n_{,K_0} - 1)] \cdot \\
 & \cdot [(dx^\nu/dp)/\lambda + (u^\nu/c)K_0(n^2 + K_0 n n_{,K_0} - 1)] + \\
 & + \lambda(u^\mu/c)K_0^2 n \delta_{in,\mu}^{\mu}.
 \end{aligned} \tag{3.88}$$

In der an Gleichung (3.75) anschließenden Diskussion haben wir festgestellt, daß wir im Falle des Vakuums die Differentialgleichung der Geodätischen Linie erhalten, das wir wiederum an der Bewegungsgleichung (3.86) verifizieren können, da sämtliche Terme auf der rechten Seite im Falle des Vakuums verschwinden. Die rechte Seite der Gleichung (3.86) stellt somit die Abweichung des Lichtstrahls von der Geodätischen Linie dar, die sowohl von den dispersiven und refraktiven Eigenschaften des Mediums, als auch von dessen 4-Geschwindigkeit im jeweiligen Bezugssystem beeinflußt wird, so daß wir schließlich folgende Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{D}{dp} \left( \frac{dx^\alpha}{dp} \right) = \frac{d^2 x^\alpha}{dp^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} = R^\alpha \neq 0 \tag{3.89}$$

anschreiben können. Mit  $R^\alpha$  bezeichnen wir die rechte Seite von Gleichung (3.86), also die durch das Medium verursachte Abweichung von der Geodätischen Linie.

Im nächsten Schritt wollen wir den affinen Parameter durch die Koordinatenzeit ersetzen. Dies erreichen wir durch Umschreiben der auftretenden Ableitungen, wobei zunächst

$$\frac{d^2 x^\alpha}{dp^2} = \frac{dt}{dp} \frac{d}{dt} \left( \frac{dt}{dp} \frac{dx^\alpha}{dt} \right) = \left( \frac{dt}{dp} \right)^2 \frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} + \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{d^2 t}{dp^2} \tag{3.90}$$

gilt, das wir wiederum in Gleichung (3.89) einsetzen, und wir erhalten

$$\frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} = \left( \frac{dp}{dt} \right)^2 R^\alpha - \frac{d^2 t}{dp^2} \frac{dx^\alpha}{dt} \left( \frac{dp}{dt} \right)^2. \tag{3.91}$$

Indem wir den zweiten Term durch die zeitliche Komponente von Gleichung (3.91) ausdrücken und nach dem unterstrichenen Term auflösen, können wir folgende Differentialgleichung zweiter Ordnung für die räumlichen Komponenten angeben

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = \underbrace{\left( \frac{dp}{dt} \right)^2 \left[ R^i - \frac{1}{c} R^4 \frac{dx^i}{dt} \right]}_{\text{Medium}} - \underbrace{\left[ \Gamma_{\beta\gamma}^i - \frac{1}{c} \Gamma_{\beta\gamma}^4 \frac{dx^i}{dt} \right] \frac{dx^\beta}{dt} \frac{dx^\gamma}{dt}}_{\text{Gravitation - Rotation}}, \tag{3.92}$$

dabei verursachen die Terme auf der rechten Seite die Abweichung von der Geradengleichung im dreidimensionalen Euklidischen Raum, die jedoch unterschiedliche physikalische Ursachen haben.

Der erste Summand repräsentiert den Einfluß des Mediums, d.h. der Term ist abhängig sowohl von den materiellen Eigenschaften bezüglich Refraktion und Dispersion, als auch von der 4-Geschwindigkeit des Mediums im jeweiligen Bezugssystem, in unserem Fall also bezüglich eines erdfesten, geozentrischen Systems.

Der Einfluß der Gravitation als auch der Rotation wird durch die Christoffelsymbole bzw. durch die Komponenten des Metriktensors repräsentiert.

### 3-5. Uhren im Gravitationsfeld

In Kapitel vier geben wir die Beobachtungsgleichungen für die relativistische Phasemessung an, wobei wir sowohl die Signalausbreitung als auch das Verhalten des signalerzeugenden Oszillators zu berücksichtigen haben. In diesem Abschnitt wird daher das Verhalten eines Oszillators untersucht, der sich bezüglich eines Bezugssystems in Anwesenheit eines Gravitationsfeldes bewegt.

Der Begriff Oszillator ist dann mit der in Abschnitt 2-1. eingeführten Standarduhr identisch, falls seine Phasenlage gleich der Eigenzeit, also

$$\phi(\tau) = \tau \quad (3.93)$$

ist. Im Allgemeinfeld können wir die Phase als Funktion der Eigenzeit für einen im Satelliten befindlichen Oszillator

$$\phi^\beta(\tau^\beta) = \phi^\beta(\tau_{0|\beta}) + \omega^\beta(\tau - \tau_{0|\beta}), \quad (3.94)$$

bzw. für einen Oszillator im Empfänger

$$\phi_\alpha(\tau_\alpha) = \phi_\alpha(\tau_{0|\alpha}) + \omega_\alpha(\tau_\alpha - \tau_{0|\alpha}), \quad (3.95)$$

anschreiben. Die Eigenzeit bezieht sich dabei auf das Ruhesystem der jeweiligen Uhr, was wir durch die Indizierung der jeweiligen Eigenzeit  $\tau_\alpha$ ,  $\tau^\beta$  zum Ausdruck bringen, während sich die Phase auf den jeweils generierenden Oszillator bezieht. Die Phasenkonstanten  $\phi_\alpha(\tau_{0|\alpha})$ ,  $\phi^\beta(\tau_{0|\beta})$  berücksichtigen die Tatsache, daß zum Synchronisationszeitpunkt die Phasenlagen der einzelnen Oszillatoren nicht identisch sind.

Zur weiteren Betrachtung gehen wir davon aus, daß ein mit dem Oszillator mitbewegter Beobachter kein Driften des Frequenznormals feststellt, d.h. die jeweilige Frequenz wird im Ruhesystem als konstant angenommen, was sich im Falle des Satelliten durch

$$\omega^\beta = \frac{d\phi^\beta}{d\tau} = \text{const.} \quad (3.96)$$

darstellen läßt, woraus wir das Differential der Phase

$$d\phi^\beta(\tau) = \omega^\beta d\tau = \omega^\beta d\tau \quad (3.97)$$

bzw.

$$d\phi_\alpha(\tau_\alpha) = \omega_\alpha d\tau_\alpha = \omega_\alpha d\tau \quad (3.98)$$

erhalten. Die Festlegung, daß die Eigenzeitintervalle der Satelliten— bzw. Empfängeruhr identisch sind, bedeutet nichts anderes, als daß im jeweiligen Ruhesystem das Zeitnormal physikalisch äquivalent definiert wird.

Aufgrund der Gleichungen (3.97) u. (3.98) können wir die Phase als Funktion der Koordinatenzeit ausdrücken und geben zunächst das Weg—Zeit—Element im vierdimensionalen Raum ausführlich an

$$ds^2 = -(cd\tau)^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = g_{ij}dx^i dx^j + 2g_{4j}cdtdx^j + g_{44}(cdt)^2, \quad (3.99)$$

wobei die anholonome Koordinate, die Eigenzeit  $\tau$ , gemäß dem Abschnitt (2—1.) die Zeitanzeige einer bewegten Uhr darstellt. Die Erweiterung gegenüber der Speziellen Relativitätstheorie besteht darin, daß in der obigen Gleichung der Einfluß des Gravitationsfeldes, repräsentiert durch die kovarianten Komponenten des Metriktensors, beschrieben wird.

Indem wir die raumartigen Komponenten der Koordinatengeschwindigkeit in die obige Gleichung gem.

$$v^i = dx^i/dt \quad (3.100)$$

einführen, erhalten wir folgenden integralen Zusammenhang zwischen der Eigenzeit und der Koordinatenzeit

$$\int_{\tau_0}^{\tau} d\tau = \pm \int_{t_0}^t \sqrt{-(g_{ij}(v^i/c)(v^j/c) + 2g_{4j}(v^j/c) + g_{44})} dt. \quad (3.101)$$

Die Synchronisationszeitpunkte im jeweiligen Ruhesystem bezeichnen wir mit  $\tau_0$ , im Bezugssystem mit  $t_0$ . Zum Raum—Zeit—Ereignis der Synchronisation fordern wir, daß die Identität der jeweiligen Eigenzeit mit der Koordinatenzeit gilt (beide Uhren werden auf Null gesetzt). Des weiteren vereinbaren wir, daß die Eigenzeit positiv ist, womit obige Gleichung eindeutig wird. Die Komponenten des stationären Metriktensors können wir nach erfolgter Bahnberechnung als bekannte Größen betrachten. Während die linke Seite die beobachtbare Größe darstellt (die Eigenzeit können wir ablesen), können wir das Integral auf der rechten Seite in nur einigen wenigen Fällen, wie z.B. bei Annahme einer kreisförmigen oder elliptischen Satellitenbahn, analytisch auswerten. Zur allgemeinen Auswertung sind wir jedoch auf numerische Integrationsverfahren angewiesen, die im Kapitel fünf angewendet werden.

Die Bedeutung der Gleichung (3.101) besteht darin, daß sie den Zusammenhang zwischen der beobachtbaren Größe, der Eigenzeit, und der für die Bestimmung des 3—Ortsvektors benötigten Koordinatenzeit darstellt. Die Schwierigkeit besteht jedoch darin, daß der Zusammenhang lediglich in integraler Form vorliegt. Dieses Problem können wir

jedoch dadurch lösen, indem wir die rechte Seite der Gleichung (3.101) folgendermaßen aufspalten

$$\begin{aligned} \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau = & \underbrace{\int_{t_0}^{t_{n-i}} \sqrt{-(g_{ij}(v^i/c)(v^j/c) + 2g_{4j}(v^j/c) + g_{44})} dt +}_{(3.102)} \\ & + \int_{t_{n-i}}^{t_n} \sqrt{-(g_{ij}(v^i/c)(v^j/c) + 2g_{4j}(v^j/c) + g_{44})} dt, \end{aligned}$$

und die Koordinatenzeitpunkte  $t_{n-i}$  und  $t_n$  derart wählen, daß die Forderung

$$t_{n-i} < t(\tau) < t_n$$

erfüllt ist. Das unterstrichene Integral in Gleichung (3.102) kann daher mit Hilfe eines geeigneten numerischen Integrationsverfahrens berechnet werden. Dagegen können wir das zweite Integral auf der rechten Seite für genügend kleine Integrationsbereiche durch ein Polynom niederen Grades annähern und direkt nach der Koordinatenzeit auflösen. Eine andere Möglichkeit ergibt sich mit Hilfe des Gaußschen Quadraturverfahrens, das in Hinblick auf die Auswertung der Gleichung (3.101) in z.B. (Schwarze 1990, p.39f.) beschrieben ist.

Eine andere Möglichkeit, die Koordinatenzeit als Funktion der Eigenzeit zu berechnen, erhalten wir, indem wir die Bewegungsgleichung (3.16) integrieren. Die Koordinatenzeit erhalten wir aus der zeitartigen Komponente. Im Falle einer Anfangswertaufgabe haben wir die Komponenten des 4–Ortsvektors und des 4–Geschwindigkeitsvektors im Anfangspunkt vorzugeben, wobei letztere die Bedingung im Anfangspunkt

$$g_{\alpha\beta} u^{\beta} u^{\alpha} = -c^2 \quad (3.103)$$

erfüllen müssen (vergl. Abschnitt 5–2.).

*Mit der Formulierung der Bewegungsgleichungen einer elektromagnetischen Welle im dispersiven und refraktiven Medium (3.79) und (3.80) und des funktionalen Zusammenhangs zwischen der Eigenzeit und der Koordinatenzeit gem. der Gleichung (3.101) haben wir sämtliche Grundlagen bereitgestellt, um die Beobachtungsgleichung für die relativistische Phasenmessung anzugeben. An welcher Stelle nun die Terme auftreten, die aus einer relativistischen Betrachtungsweise resultieren, soll im nächsten Kapitel deutlich werden.*



#### 4. Phasendifferenzmessungen

##### 4-0. Übergang von der nichtrelativistischen zur allgemein relativistischen Phasennmessung

In diesem Kapitel soll das in der Satellitengeodäsie gängige Verfahren der Phasendifferenzmessung eingehend untersucht werden. Dieses Verfahren besteht darin, daß die Phase eines vom Satelliten ankommenden Signals mit der Phase eines vom Receiver generierten Bezugssignals verglichen wird. Dieser Sachverhalt läßt sich mathematisch folgendermaßen ausdrücken

$$\Delta\phi_{\alpha}^{\beta} = \phi_{\alpha}(\tau_{\alpha}) - \phi^{\beta}(\tau_{\alpha}), \quad (4.1)$$

wobei sich ein obengestellter Index auf den jeweiligen Satelliten, ein untenstehender auf den Empfänger bezieht. Das vom Satelliten eintreffende Signal, das wir mit  $\phi^{\beta}$  bezeichnen, wird vom Empfänger zum Zeitpunkt  $\tau_{\alpha}$ , d.h. bezogen auf seine Eigenzeitskala, mit dem Referenzsignal  $\phi_{\alpha}$  verglichen.

Um aus der beobachteten Größe die eigentliche Unbekannte schätzen zu können, finden wir in der Literatur (z.B. Seeber 1989, S.275ff.) folgenden Ansatz

$$\Delta\phi_{\alpha}^{\beta} = \phi_{\alpha}(t_0) - \phi^{\beta}(t_0) + \omega(t_{\alpha} - t^{\beta}) + 2\pi N_{\alpha}^{\beta}, \quad (4.2)$$

dabei haben wir berücksichtigt, daß aus beobachtungstechnischen Gründen unsere Phasendifferenz bis auf ein Vielfaches  $N_{\alpha}^{\beta}$  von  $2\pi$  unbestimmt bleibt. Die unbekannte 3-Koordinatendifferenz wird durch die in der Newtonschen Mechanik bekannte Beziehung

$$(t_{\alpha} - t^{\beta}) = \frac{\| \vec{x}_{\alpha} - \vec{x}^{\beta} \|}{c} \quad (4.3)$$

erhalten.

Der Zusammenhang zwischen der beobachteten Größe und der unbekannten Größe, den räumlichen Komponenten des 4-Ortsvektors, wie er in den Gleichungen (4.2) und (4.3) formuliert wurde, ist nur im Rahmen der Newtonschen Mechanik gültig. Dabei weisen wir jedoch darauf hin, daß die obige Gleichung (4.3) für rotierende Bezugssysteme, wie dem geozentrisch gelagerten  $f^*$ -System aus Abschnitt 1-2., auch im Rahmen der Newtonschen Mechanik nicht gültig ist. Wir verweisen zur Struktur der Newtonschen Raum-Zeit auf (z.B. Heitz u. Stöcker-Meier 1990, p.83 ff). In diesem Kapitel leiten wir eine mit der Allgemeinen Relativitätstheorie konsistente Beobachtungsgleichung ab,

wobei wir auf die unterschiedlichen Differenzenverfahren, wie sie z.B. in (Wells et al. 1987, Ch.8) beschrieben sind, eingehen. Wie wir an dem nebenstehendem

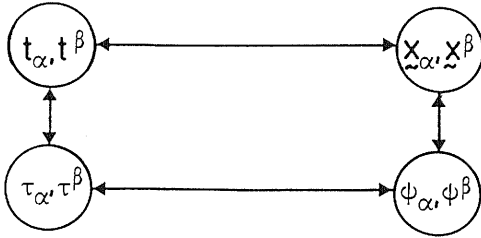


Abb. 4.1: Relativistische Phasenmessung knüpft ist.

Kommutativen Diagramm sehen, besitzen wir, aufgrund des Differentialgleichungssystems (3.79) u. (3.80), einen funktionalen Zusammenhang zwischen der Signallaufzeit in Koordinatenzeit und der 3-Koordinatendifferenz. Durch Anwenden der Gleichung (3.101) können wir die Koordinatenzeit in die jeweilige Eigenzeit umrechnen, die wiederum im jeweiligen Ruhesystem des Oszillators gemäß den Gleichungen (3.97) u. (3.98) mit der Phase ver-

#### 4-1. Einfache Phasendifferenzmessungen

Bezüglich eines erdfesten Beobachtungssystems, dem  $f^*$ -System aus Abschnitt (1-3.), wird folgende Phasendifferenz

$$\Delta\phi_\alpha^\beta(z_i^{f^*} + c\tau_{f_4}^*) = \phi_\alpha(z_i^{f^*} + c\tau_{f_4}^*) - \phi^\beta(z_i^{f^*} + c\tau_{f_4}^*) + 2\pi N_\alpha^\beta \quad (4.4)$$

beobachtet. Die Eigenzeit des Empfängers stellt dabei die Koordinatenzeit des  $f^*$ -Systems dar (vergl. Abschnitt 1-3.),  $\phi_\alpha$  ist das im Empfänger generierte Referenzsignal,  $\phi^\beta$  ist das Signal des Satelliten, das im Receiver empfangen wird. Unter Ausnutzen der Tatsache, daß die Phase einen 4-Skalar gemäß Gleichung (2.43) darstellt, können wir folgende Identitäten im Ursprung des  $f^*$ -Systems anschreiben

$$\begin{aligned} \phi_\alpha(c\tau_{f_4}^*) &= \phi_\alpha((x^i)_\alpha e_i + (ct)_\alpha e_4) \\ \phi^\beta(c\tau_{f_4}^*) &= \phi^\beta((x^i)_\alpha e_i + (ct)_\alpha e_4), \end{aligned} \quad (4.5)$$

dabei beziehen sich die auf der rechten Seite der Gleichungen (4.5) eingeführten 4-Koordinaten auf das e-System, das wir in Abschnitt (1-1.) eingeführt haben. Die 3-Koordinaten der Receiverstation bezeichnen wir mit  $(x^i)_\alpha$ ,  $(t)_\alpha$  beschreibt den Zeitpunkt des Signalempfangs in Koordinatenzeit. Die folgenden Betrachtungen werden weiterhin im e-System angeschrieben, sie gelten aber auch aufgrund der skalaren Eigenschaften der Phase im rotierenden  $f^*$ -System.

Mit den Gleichungen (4.5) nimmt unsere Beobachtungsgleichung folgende Form an

$$\Delta\phi_\alpha^\beta(c\tau_{f_4}^*) = \phi_\alpha((x^i)_\alpha e_i + (ct)_\alpha e_4) - \phi^\beta((x^i)_\alpha e_i + (ct)_\alpha e_4) + 2\pi N_\alpha^\beta, \quad (4.6)$$

die wir im nächsten Schritt umformen, indem wir das Satellitensignal vom Zeitpunkt der Emission, in Koordinatenzeit mit  $t^\beta$  bezeichnet, zum Empfänger verfolgen. Durch Anwendung der Gleichung (2.27), die aufgrund ihrer tensoriellen Eigenschaften gemäß

Abschnitt (3-2.) auch im Riemannschen Raum gilt, erhalten wir

$$\phi^\beta((x^i)_{\alpha} e_i + (ct)_{\alpha} e_4) = \phi^\beta((x^i)^\beta e_i + (ct)^\beta e_4) + \int_{t^\beta}^{t_\alpha} k_\mu (dx^\mu/dt) dt, \quad (4.7)$$

womit sich die Beobachtungsgleichung (4.6) folgendermaßen darstellen läßt

$$\begin{aligned} \Delta \phi_\alpha^\beta (c\tau f_4^*) &= \phi_\alpha((x^i)_{\alpha} e_i + (ct)_{\alpha} e_4) - \phi^\beta((x^i)^\beta e_i + (ct)^\beta e_4) \\ &\quad - \int_{t^\beta}^{t_\alpha} k_\mu (dx^\mu/dt) dt + 2\pi N_\alpha^\beta. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Die ersten beiden Summanden auf der rechten Seite der obigen Gleichung müssen wir noch als Funktion der Koordinatenzeit darstellen, um einen funktionalen Zusammenhang zwischen der beobachteten Größe und der unbekannten Größe, der Signallaufzeit in Koordinatenzeit, angeben zu können. Dies gelingt, indem wir unter Anwendung der Gleichungen (3.97), (3.98) und (3.101) die obige Gleichung umformen

$$\begin{aligned} \Delta \phi_\alpha^\beta (c\tau f_4^*) &= \phi_\alpha(t_0) - \phi^\beta(t_0) + \\ &\quad \left[ \omega_\alpha \int_{t_0}^{t_\alpha} \sqrt{-(g_{ij|_\alpha} (v^i/c)_{|_\alpha} (v^j/c)_{|_\alpha} + 2g_{4j|_\alpha} (v^j/c)_{|_\alpha} + g_{44|_\alpha})} dt \right. \\ &\quad \left. - \omega^\beta \int_{t_0}^{t^\beta} \sqrt{-(g_{ij|^\beta} (v^i/c)_{|^\beta} (v^j/c)_{|^\beta} + 2g_{4j|^\beta} (v^j/c)_{|^\beta} + g_{44|^\beta})} dt \right] - \\ &\quad - \int_{t^\beta}^{t_\alpha} k_\mu (dx^\mu/dt) dt + 2\pi N_\alpha^\beta, \end{aligned} \quad (4.9)$$

die wir zur weiteren Diskussion durch Einführen von

$$\begin{aligned} \gamma_\alpha^\beta &= \sqrt{-(g_{ij|_\alpha} (v^i/c)_{|_\alpha} (v^j/c)_{|_\alpha} + 2g_{4j|_\alpha} (v^j/c)_{|_\alpha} + g_{44|_\alpha})} \\ \omega &= \omega_\alpha = \omega^\beta = \text{const.} \end{aligned} \quad (4.10)$$

auf folgende Gestalt bringen

$$\begin{aligned} \Delta\phi_{\alpha}^{\beta}(c\tau f_4^*) &= \phi_{\alpha}(t_0) - \phi^{\beta}(t_0) + \omega \left[ \int_{t^{\beta}}^{t_{\alpha}} \gamma_{\alpha} dt + \int_{t_0}^{t^{\beta}} \gamma_{\alpha} \left(1 - \frac{\gamma^{\beta}}{\gamma_{\alpha}}\right) dt \right] + \\ &+ \int_{t_{\alpha}}^{t^{\beta}} k_{\mu} (dx^{\mu}/dt) dt + 2\pi N_{\alpha}^{\beta}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Den Bezugszeitpunkt haben wir mit  $t_0$  bezeichnet, während die Phasenkonstanten  $\phi_{\alpha}(t_0)$  und  $\phi^{\beta}(t_0)$  die unterschiedliche Phasenlage der Oszillatoren zum Bezugszeitpunkt berücksichtigen, mit  $t_{\alpha}$  und  $t^{\beta}$  bezeichnen wir, daß die auftretenden Größen  $g_{\alpha\beta}$  und  $v^i$  am jeweiligen Weltpunkt des Empfängers bzw. Satelliten zu bilden sind. Die Integrale in den eckigen Klammern beschreiben den physikalischen Sachverhalt, daß die korrespondierenden Koordinatenzeit- und Eigenzeitintervalle nicht übereinstimmen. Im Sinne der Newtonschen Mechanik, d.h. unter Annahme einer absoluten Zeit, lassen sich diese Integrale auf die Form der Gleichung (4.2) bringen, indem wir  $\gamma_{\alpha}$  und  $\gamma^{\beta}$  gleich eins setzen.

Zur Integration des unterstrichenen Integrals substituieren wir den Term  $(dx^{\mu}/dt)$  mit den Gleichungen (3.79), (3.81) und ersetzen den auftretenden Betrag des 4-Wellenzahlvektors mit Gleichung (3.46) und erhalten schließlich folgende Identität

$$\int_{t_{\alpha}}^{t^{\beta}} k_{\mu} (dx^{\mu}/dt) dt = - \int_{t_{\alpha}}^{t^{\beta}} c K_{\delta nn, K_0}^3 / [k^4 - (u^4/c) K_0 (n^2 + K_0 n n_{, K_0} - 1)] dt. \quad (4.12)$$

Obige Gleichung schreiben wir im Ruhesystem eines stationären und isotropen Mediums mit lokal Minkowskischer Metrik an

$$\int_{t_{\alpha}}^{t^{\beta}} k_{\mu} (dx^{\mu}/dt) dt = +\omega \int_{t_{\alpha}}^{t^{\beta}} \frac{v_g - v_p}{v_p} dt, \quad (4.13)$$

indem wir zunächst die Phasengeschwindigkeit (z.B Jackson 1975, p.302)

$$v_p = \frac{c}{n} \quad (4.14)$$

und die für die Signalausbreitung relevante Gruppengeschwindigkeit mit Hilfe unserer Bewegungsgleichung (3.82), angewendet auf den oben beschriebenen Fall, einführen

$$\left\| \frac{dx}{dt} \right\| = \frac{c}{n + \omega n_{, \omega}} = v_g. \quad (4.15)$$

Für die Eigenschaften der Brechzahl gilt das in Abschnitt 3–421. Gesagte entsprechend, und mit  $n_{,\omega}$  bezeichnen wir dessen partielle Ableitung nach der Kreisfrequenz.

Setzen wir Gleichung (4.13) in die Beobachtungsgleichung (4.11) ein und betrachten wir nur zwei ruhende Oszillatoren im Medium, d.h.  $\gamma_\alpha$  und  $\gamma^\beta$  sind eins, so stellt Gleichung (4.12) eine durch die Dispersion verursachte Korrektur derart dar, daß die aus Gleichung (4.11) erhaltene Koordinatenzeitdifferenz als Signallaufzeit bezüglich des e-Systems interpretiert werden kann. Die Signallaufzeit ist aber die gesuchte Größe, um die Bewegungsgleichungen (3.82) u. (3.83) auszuwerten, da wir Gleichung (4.15) durch Anwendung von (3.82) für den oben beschriebenen Fall erhalten haben.

Mit der Gleichung (4.11) haben wir eine Beobachtungsgleichung für die Signallaufzeit gefunden, wobei wir die Koeffizienten  $\gamma_\alpha$  u.  $\gamma^\beta$  für den jeweiligen Koordinatenzeitpunkt

als bekannt voraussetzen. Dies ist dann gerechtfertigt, falls wir die Bodenstation als stationär (Näherungskoodinaten) und die Erdrotation und Satellitenbahn als bekannt voraussetzen. Die auftretenden Integrale sind nur in Ausnahmefällen, wie z.B. bei Annahme einer kreisförmigen Satellitenbahn analytisch auswertbar, während wir im Allgemeinfall das Integral durch einen geeigneten Ansatz zu approximieren haben und verweisen dabei auf die Diskussion im Anschluß an die Gleichung (3.101). Zur Berechnung des Integrals (4.12) müssen wir die durchlaufene Bahn des Signals kennen, um den jeweiligen Brechungsindex zu erhalten. Jedoch ist es gem. (Stöcker–Meier 1988, p.59) vollkommen ausreichend, die benötigte Strahlrichtung aus Näherungskoodinaten zu berechnen.

Die Beobachtungsgleichung für die Signallaufzeit lautet schließlich mit Gleichung (4.11) und (4.12)

$$\Delta\phi_\alpha^\beta(c\tau f_4^*) = \phi_\alpha(t_0) - \phi^\beta(t_0) + \mathcal{B} \left[ \int_{t^\beta}^{t_\alpha} \gamma_\alpha dt + \int_{t_0}^{t^\beta} \gamma_\alpha \left(1 - \frac{\gamma^\beta}{\gamma_\alpha}\right) dt \right] -$$

$$- \int_{t_\alpha}^{t^\beta} cK_{\beta nn, K_0}^{\beta} / [k^4 - (u^4/c)K_0(n^2 + K_{0nn, K_0} - 1)] dt + 2\pi N_\alpha^\beta, \quad (4.16)$$

wobei wir an dieser Stelle bemerken, daß statt des Synchronisationszeitpunktes jeder beliebige Zeitpunkt, wie z. B. der erste Zeitpunkt der Meßkampagne, als Bezugszeitpunkt denkbar ist. Der Beitrag der Uhrenkorrektur vom Synchronisationszeitpunkt bis zum Zeitpunkt der ersten Messung wirkt sich ebenfalls als konstanter Phasenfehler aus, die jedoch eine andere physikalische Ursache besitzt als die Konstanten  $\phi_\alpha(t_0)$  u.  $\phi^\beta(t_0)$

in der obigen Gleichung, die ebenfalls (bzw. deren Differenz) mit Hilfe der obigen Gleichung zu ermitteln sind.

Mit der Formulierung der Beobachtungsgleichung (4.16) können wir einen funktionalen Zusammenhang zwischen der beobachteten Größe, der Phasendifferenz  $\Delta\phi_\alpha^\beta$ , und der

Signallaufzeit angeben. Durch Auswertung der Bewegungsgleichungen (3.82) u. (3.83) sind wir außerdem in der Lage, die 3-Koodinaten aus einer geodätischen Anfangswertaufgabe mit der zuvor bestimmten Signallaufzeit zu bestimmen. Im nächsten Abschnitt untersuchen wir, inwieweit wir die relativistischen Einflüsse in der Beobachtungsgleichung (4.16) reduzieren können.

#### 4-2. Diskussion weiterer Beobachtungsverfahren

In der Satellitengeodäsie werden sog. Differenzenverfahren angewendet, um den Einfluß systematischer Fehler, wie Uhren- oder Atmosphären-Bias, zu reduzieren. Wir verweisen auf eine detaillierte Diskussion der unterschiedlichen Verfahren in (z.B. Wells et al. 1987, Ch.8). Wir betrachten die durch eine 'klassische', d.h. nicht relativistische Vorgehensweise verursachten Fehler als relativistisch bedingte, systematische Fehler. Wir untersuchen in diesem Abschnitt, welche Fehleranteile sich minimieren bzw. eliminieren lassen, wobei wir zunächst das Differenzenverfahren zwischen zwei darauffolgenden Meßepochen  $\delta(\Delta\phi)$ , das Differenzenverfahren zwischen zwei Bodenstationen  $\Delta(\Delta\phi)$ , zwischen zwei Satelliten  $\nabla(\Delta\phi)$  und schließlich das Doppeldifferenzenverfahren  $\nabla\Delta(\Delta\phi)$  angeben.

##### 4-21. Differenz zwischen zwei aufeinanderfolgenden Meßepochen

Im Empfänger wurde das vom Satelliten ankommende Signal zu den Zeitpunkten  $\tau_i$  und  $\tau_{i+1}$ , bezogen auf seine Eigenzeitskala, mit dem vom Referenzoszillator generierten Signal verglichen. Mit Gleichung (4.16), angewandt auf die Eigenzeitpunkte  $\tau_i$  und  $\tau_{i+1}$ , erhalten wir

$$\delta(\Delta\phi_\alpha^\beta) = \omega \left( \int_{t_\alpha}^{t_{\alpha+1}} \gamma_\alpha dt - \int_{t^\beta}^{t^{\beta+1}} \gamma^\beta dt \right) + \int_{t_{\alpha+1}}^{t^{\beta+1}} k_\mu (dx^\mu/dt) dt - \int_{t_\alpha}^{t^\beta} k_\mu (dx^\mu/dt) dt. \quad (4.17)$$

Dabei bezeichnen wir mit  $t_\alpha$  und  $t_{\alpha+1}$  die Empfangszeitpunkte, mit  $t^\beta$  und  $t^{\beta+1}$  die Sendeereignisse. Wir stellen fest, daß in der obigen Gleichung für die Zeitdifferenz, sowohl die Anzahl der ganzzahligen Perioden ('cycles') und die unbekannten Phasenwerte zum Bezugszeitpunkt nicht mehr auftreten.

##### 4-22. Differenz zwischen zwei Bodenstationen

Ein Satellitensignal, das zum Koordinatenzeitpunkt  $t^\beta$  ausgesandt wurde, wird von zwei Bodenstationen zu den Koordinatenzeitpunkten  $t_\alpha$  und  $t_{\alpha+1}$  empfangen. Der dabei auftretende Index des Empfangszeitpunktes bezieht sich auf die jeweilige Bodenstation. Durch Anwendung von Gleichung (4.16) auf die jeweilige Bodenstation und anschließende Differenzenbildung erhalten wir schließlich

$$\Delta(\Delta\phi_\alpha^\beta) = \Delta\phi_{\alpha+1}^\beta - \Delta\phi_\alpha^\beta = \phi_{\alpha+1}(t_0) - \phi_\alpha(t_0) + 2\pi N_{\alpha+1}^\beta - 2\pi N_\alpha^\beta + \omega \left[ \int_{t_\alpha}^{t_{\alpha+1}} \gamma_{\alpha+1} dt + \int_{t_0}^{t_\alpha} \gamma_{\alpha+1} \left(1 - \frac{\gamma_\alpha}{\gamma_{\alpha+1}}\right) dt \right] + \int_{t_{\alpha+1}}^{t^\beta} k_\mu (dx^\mu/dt) dt - \int_{t_\alpha}^{t^\beta} k_\mu (dx^\mu/dt) dt. \quad (4.18)$$

Im Gegensatz zum einfachen Differenzverfahren (4.16) treten hier als weitere Unbekannte  $N_{\alpha+1}^\beta$  und  $\phi_{\alpha+1}(t_0)$  auf. Des weiteren bemerken wir, daß wir den Einfluß des relativistischen Fehlers des Satellitenoszillators eliminieren können, was immer dann von Vorteil ist, wenn die 3-Koordinaten und 3-Koordinatengeschwindigkeiten des Satelliten

nicht vorliegen, da diese zur Berechnung des Integrals (3.101) benötigt werden. Für den Fall, daß die Stationsuhren im stationären Fall derselben Schwere unterworfen sind, kann das unterstrichene Integral in der obigen Gleichung vernachlässigt werden.

#### 4-23. Differenz zwischen zwei Satelliten $\nabla(\Delta\phi_\alpha^\beta)$ , Doppeldifferenz $\Delta\nabla(\Delta\phi_\alpha^\beta)$

Eine Bodenstation führt zum Koordinatenzeitpunkt einen Phasenvergleich mit zwei empfangenen Satellitensignalen  $\phi^\beta$  und  $\phi^{\beta+1}$  durch, wobei wir voraussetzen, daß der Receiver eine Möglichkeit zum Mehrkanalempfang und damit zum gleichzeitigen Phasenvergleich der beiden ankommenden Signale besitzt. Indem wir die Gleichung (4.16) auf die beiden Satelliten anwenden, erhalten wir durch anschließende Differenzbildung

$$\nabla(\Delta\phi_\alpha^\beta) = \Delta\phi_\alpha^{\beta+1} - \Delta\phi_\alpha^\beta = \phi^\beta(t_0) - \phi^{\beta+1}(t_0) + 2\pi N_\alpha^{\beta+1} - 2\pi N_\alpha^\beta +$$

$$\int_{t^{\beta+1}}^{t^\beta} \gamma^\beta dt - \int_{t_0}^{t^{\beta+1}} \gamma^{\beta+1} \left(1 - \frac{\gamma^\beta}{\gamma^{\beta+1}}\right) dt + \int_{t_\alpha}^{t^{\beta+1}} k_\mu(dx^\mu/dt) dt - \int_{t_\alpha}^{t^\beta} k_\mu(dx^\mu/dt) dt, \quad (4.19)$$

und stellen das zusätzliche Auftreten der zu schätzenden Unbekannten  $\phi^{\beta+1}$  und  $N_\alpha^{\beta+1}$  fest. Wie aus obiger Gleichung leicht ersichtlich ist, kann der Einfluß des relativistischen Effektes auf die Stationsuhr beseitigt werden, falls der Empfänger die Voraussetzungen besitzt, mehrere Satellitensignale gleichzeitig zu empfangen. Dabei bemerken wir, daß diesselben Satellitensignale von einer anderen Bodenstation nicht gleichzeitig empfangen werden. Dies ist auch der Grund, warum das Doppeldifferenzenverfahren  $\nabla\Delta(\Delta\phi_\alpha^\beta)$  keine vollständige Beseitigung der relativistischen Effekte ergibt.

Mit der Formulierung der Beobachtungsgleichung für das jeweilige Differenzenverfahren ist die theoretische Diskussion der relativistischen Phasenmessung abgeschlossen. Wir haben im Anschluß an die Gleichung (4.12) eine ausführliche Diskussion der physikalischen Signifikanz der auftretenden Terme angegeben, wobei wir aus Gründen der Anschaulichkeit auf ein Lokales Inertialsystem übergegangen sind, bezüglich dessen das Medium ruht. Wir bemerken jedoch, daß die für die unterschiedlichen Differenzenverfahren hergeleiteten Beobachtungsgleichungen in jedem Bezugssystem gelten. Abschließend bemerken wir zu diesem Kapitel, daß die eigentliche schätzbare Unbekannte die Signallaufzeit darstellt, da wir diese zur Auswertung der Bewegungsgleichungen (3.82) u. (3.83) benötigen, um die räumliche Komponente des 4-Ortsvektors der Bodenstation zu erhalten.

## 5. Numerische Untersuchungen

In diesem Abschnitt geben wir Abschätzungen für die Größenordnung der relativistischen Effekte bei der Modellierung der Phasenmessung an, die sich im Falle des Vakuums folgendermaßen zusammensetzen

- i.) ein relativ zum Bezugssystem bewegter Oszillator ist dem Einfluß des Gravitationsfeldes ausgesetzt
- ii.) die Signalausbreitung im Vakuum wird von der Anwesenheit eines Gravitationsfeldes beeinflusst

Zur Auswertung der benötigten Differentialgleichungen wenden wir ein numerisches Integrationsverfahren an. In unserem Fall wurde ein Einschrittverfahren, das sog. Runge-Kutta-Fehlberg-Verfahren achter Ordnung und zwölfter Stufe, gewählt. Dieses Verfahren wird in den Lehrbüchern der Numerischen Mathematik (Grigorieff 1972, p.24 u. p.25 Tab.1) beschrieben. Die für die Programmierung benötigten Koeffizienten wurden der oben angeführten Literatur entnommen.

Im ersten Abschnitt geben wir die Komponenten der kovarianten und kontravarianten Metriktensoren an, die wir im nächsten Abschnitt auf die Bewegungsgleichung einer frei fallenden Uhr anwenden. Im dritten Abschnitt untersuchen wir schließlich die Signalausbreitung im Vakuum in Anwesenheit eines Gravitationsfeldes, wobei wir sowohl das  $e$ - als auch das  $f$ -System diskutieren.

### 5-1. Raum-Zeit-Metrik

Die Grundlage für sämtliche Berechnungen ist eine Raum-Zeit-Metrik, die (Anderson 1974, p.212) folgendermaßen angibt

$$\begin{aligned}
 g_{ij} &= \delta_{ij} \left( 1 + \frac{2U}{c^2} \right) + o(c^{-4}) \\
 g_{4i} &= -\frac{4W^i}{c^3} + o(c^{-5}) \\
 g_{44} &= -1 + \frac{2U}{c^2} - \frac{1}{c^4} (2U^2 - 4\Phi + \chi_{,tt}) + o(c^{-5}) .
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Das Kopplungspotential wird dabei unter Vernachlässigung des Drucks durch folgende Poisson-Differentialgleichung definiert

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi G \rho (v^2 + U) , \tag{5.2}$$

während das auftretende Vektorpotential durch

$$\nabla^2 W^i = -4\pi G \rho v^i \tag{5.3}$$

definiert wird. Das Newton-Potential haben wir wie in Kapitel drei mit  $U$  bezeichnet,  $v$



bzw.  $v^i$  stellen den räumlichen Betrag bzw. die Komponenten der Koordinatengeschwindigkeit dar. Das auftretende Potential  $\chi$  geht lediglich mit der zweiten zeitlichen Ableitung in die Komponenten der Metrik ein und wird im Falle einer stationären Metrik nicht weiter benötigt.

Die Poisson-Gleichungen (5.2) und (5.3) lassen sich mit Hilfe des Standard-Ansatzes der Greenschen Funktionen durch folgende Volumenintegrale

$$\Phi = G \int_{V'} \rho' \frac{v'^2 + U'}{\|\tilde{x} - \tilde{x}'\|} d^3x', \quad (5.4)$$

$$W^i = G \int_{V'} \rho' \frac{v_i'}{\|\tilde{x} - \tilde{x}'\|} d^3x', \quad (5.5)$$

angeben. Die gestrichenen Größen bedeuten, daß die jeweilige Größe für den jeweiligen Körperpunkt  $P(\tilde{x}')$  genommen werden muß. Im Falle des Newton-Potentials bedeutet dies, daß wir die Innenraumlösung benötigen.

Unter Annahme einer homogenen, kugelförmigen Erde erhalten wir für die Komponenten des Vektorpotentials (vergl. z.B. Joos 1990, p.16)

$$W^1 = -\frac{1}{5} \omega x^2 \frac{GM}{r} \frac{R^2}{r^2} \quad W^2 = +\frac{1}{5} \omega x^1 \frac{GM}{r} \frac{R^2}{r^2} \quad W^3 = 0 \quad (5.6)$$

und für das Kopplungspotential

$$\Phi = \frac{2}{5} \frac{GM}{r} \omega^2 R^2 + \frac{6}{5} \frac{GM}{r} \frac{GM}{R}. \quad (5.7)$$

Die Winkelgeschwindigkeit der Erde betrachten wir als konstant, wobei wir im Rahmen dieser Arbeit den Zahlenwert

$$\omega = 7.292115 \cdot 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$$

verwenden, während wir für die geozentrische Gravitationskonstante den Zahlenwert

$$GM = 398600.5 \cdot 10^9 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$$

und für den mittleren Erdradius

$$R = 6371.024 \text{ km}$$

eingeführen. Die zur Berechnung der Christoffelsymbole benötigten kontravarianten Komponenten des Metriktensors erhalten wir, indem wir zunächst den kovarianten Metriktensor auf folgende Form bringen

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1 \quad (5.8)$$

um anschließend mit Hilfe einer Neumannschen Reihe (z.B. Meschkowski et al. 1972, p.767)

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} &= (\eta^{\mu\nu} + h^{\mu\nu}) = (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})^{-1} = \\ &= \eta_{\mu\nu} - (h_{\mu\nu}) + (h_{\mu\nu})^2 + \dots = \eta_{\mu\nu} - h_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (5.9)$$

die Komponenten des kontravarianten Metriktensors zu bilden

$$\begin{aligned} g^{ij} &= \delta_{ij} \left(1 - \frac{2U}{c^2}\right) + o(c^{-4}) \\ g^{4i} &= \frac{4W^i}{c^3} + o(c^{-5}) \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$g^{44} = -1 - \frac{2U}{c^2} + \frac{1}{c^4} (2U^2 - 4\Phi) + o(c^{-5}).$$

Durch Bilden der Ableitungen erhalten wir für eine stationäre Metrik die Christoffelsymbole

$$\begin{aligned} \Gamma_{44}^4 &= 0 + o(c^{-5}) \\ \Gamma_{4i}^4 &= \frac{1}{c^2} \frac{GM}{r^3} x^i \left[ 1 + \frac{4}{5c^2} (R^2 \omega^2 + 3 \frac{GM}{R}) \right] + o(c^{-5}) \\ \Gamma_{ij}^4 &= \frac{2}{c^3} (W^i_{,j} + W^j_{,i}) + o(c^{-5}) \\ \Gamma_{44}^i &= \frac{1}{c^2} \frac{GM}{r^3} x^i \left[ 1 - \frac{4}{c^2} \left[ \frac{GM}{r} - \frac{1}{5} (R^2 \omega^2 + 3 \frac{GM}{R}) \right] \right] + o(c^{-5}) \\ \Gamma_{j4}^i &= -\frac{2}{c^3} (W^i_{,j} - W^j_{,i}) + o(c^{-5}) \\ \Gamma_{jk}^i &= -\frac{1}{c^2} \left( 1 - \frac{2}{c^2} \frac{GM}{r} \right) \frac{GM}{r^3} [ \delta_{ij} x^k + \delta_{ik} x^j - \delta_{kj} x^i ] + o(c^{-5}). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Die auftretenden partiellen Ableitungen des Vektorpotentials lauten für den Sonderfall

der Rotation um die  $e_3$ -Achse gem. Gleichung (5.6)

$$\begin{aligned}
W^1_{,1} &= \frac{3}{5} \omega \frac{GM}{r^3} \frac{R^2}{r^2} x^1 x^2 \\
W^1_{,2} &= -\frac{1}{5} \omega \frac{GM}{r^3} \frac{R^2}{r^2} (r^2 - 3x^2 x^2) \\
W^1_{,3} &= \frac{3}{5} \omega \frac{GM}{r^3} \frac{R^2}{r^2} x^2 x^3 \\
W^2_{,1} &= +\frac{1}{5} \omega \frac{GM}{r^3} \frac{R^2}{r^2} (r^2 - 3x^1 x^1) \\
W^2_{,2} &= -\frac{3}{5} \omega \frac{GM}{r^3} \frac{R^2}{r^2} x^1 x^2 \\
W^2_{,3} &= -\frac{3}{5} \omega \frac{GM}{r^3} \frac{R^2}{r^2} x^1 x^3 .
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Mit der Formulierung der Gleichungen (5.11) und (5.12) können wir die Bewegungsgleichungen (3.16) zur Beschreibung des Uhrenverhaltens und die Bewegungsgleichung (3.92) zur Beschreibung der Wellenausbreitung auswerten.

## 5-2. Bewegte Uhren im Gravitationsfeld

Zur Anwendung der numerischen Integrationsverfahren bemerken wir zunächst, daß es sich bei den Differentialgleichungen der Geodätischen Linie (3.5) um gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung handelt. Dieses Differentialgleichungssystem können wir unter Einführung der 4-Geschwindigkeit in ein äquivalentes Differentialgleichungssystem erster Ordnung, bestehend aus acht Komponenten, überführen. Diese Vorgehensweise wird in Lehrbüchern der Numerischen Mathematik oder Büchern zur Himmelsmechanik (z.B. Danby 1988, p.296) ausführlich beschrieben.

Zur Lösung der acht gekoppelten Differentialgleichungen benötigen wir ebenfalls acht Anfangswerte, d.h. den 4-Ortsvektor und die 4-Geschwindigkeit (2.4a). Dabei haben wir jedoch zu beachten, daß die Komponenten des 4-Geschwindigkeitsvektors die Bedingungsgleichung (3.103) zu erfüllen haben (vergl. zur weiteren Diskussion Abschnitt 3-5.). Das Programm 'Clock' zur Berechnung der Koordinatenzeit in Abhängigkeit der Eigenzeit benötigt die Komponenten des 4-Ortsvektors und die räumlichen Komponenten der Koordinatengeschwindigkeit im Anfangspunkt (bezüglich des e-Systems). Mit diesen Werten wird dann das Verhältnis von Koordinatenzeit zu Eigenzeit gem. Gleichung (3.101)

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{- (g_{ij} \beta(v^i/c) \beta(v^j/c) + 2g_{4j} \beta(v^j/c) \beta + g_{44} \beta)}} \tag{5.13}$$

gebildet und anschließend die Komponenten der Vierergeschwindigkeit aus den

vorgegebenen Anfangswerten gem.

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{dx^\alpha}{dt} \quad (5.14)$$

berechnet, womit Gleichung (3.103) automatisch erfüllt wird. Anschließend wird das folgende Differentialgleichungssystem erster Ordnung

$$\frac{dx^\alpha}{d\tau} = u^\alpha \quad (5.15)$$

$$\frac{du^\alpha}{d\tau} = f^\alpha(u^\mu, x^i) \quad (5.16)$$

ausgewertet. Die rechten Seiten der Gleichungen (5.16) geben wir dabei mit Hilfe von (3.16), (5.11) und (5.12) an zu

$$\begin{aligned} f^i = & -\frac{GM}{r^3} x^i (u^4/c)^2 + \\ & + \frac{1}{c^2} \left[ 4 \frac{GM}{r^3} \left( \frac{GM}{r} - \frac{1}{5} (R^2 \omega^2 + 3 \frac{GM}{R}) \right) x^i (u^4/c)^2 + \right. \\ & \left. + 4(W^i_{,j} - W^j_{,i})(u^4/c) \frac{dx^j}{d\tau} + \frac{GM}{r^3} (2x^k v^k v^i - x^i v^2) \right] + o(c^{-3}) \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$f^4 = -\frac{2}{c} \frac{GM}{r^3} x^i v^i (u^4/c)^2 + o(c^{-3}). \quad (5.18)$$

Das Ergebnis haben wir in den beiden Schaubildern (5.1) u. (5.2) aufgetragen. Es wurde dabei eine Integrationsschrittweite von sechs Sekunden gewählt, die wir mit dem Ergebnis mit doppelter Integrationsschrittweite verglichen haben. Die Abweichung belief sich in der Größenordnung mehrerer Millimeter nach einer Stunde Integrationszeit.

Um den nicht linearen Term zu erhalten, haben wir parallel zu (5.17) eine weitere Satellitenbahn integriert, deren räumliche Komponenten nicht relativistisch berechnet wurden. Die Anfangswerte für die 3-Koordinatengeschwindigkeit wurden so gewählt, daß der Satellit eine Kreisbahn mit derselben Umlaufdauer durchläuft. Das Bilden der Differenz in den zeitlichen Komponenten liefert den nichtlinearen Anteil des Streckenfehlers, den wir in Abbildung 5.2 aufgetragen haben.

Zur Verdeutlichung bemerken wir, daß die nichtlineare Korrektur dann angebracht werden muß, wenn wir die Satellitenbahn als kreisförmig, d.h. ein konstantes Eigenzeit- zu Koordinatenzeitverhältnis, annehmen. Dies ist bei der derzeitigen Systemkorrektur von GPS der Fall (vergl. Ashby 1986), die darin besteht, daß das Frequenznormal um einen bestimmten Betrag verändert wird. Wir können die Verbesserungen aus Abbildung (5.2) als diejenigen Korrekturen auffassen, die wir an eine Laufzeitmessung zu GPS aufgrund der Bahnexzentrizität anzubringen haben.

Das Ergebnis aus Abbildung (5.2) wurde schon in einer früheren Arbeit erhalten (z.B. Schwarze 1990, p.32), jedoch wurde im Rahmen dieser Arbeit eine relativistische Satellitenbahn berechnet, während wir in der o.g. Arbeit die Satellitenbahn als Kepler-Ellipse angenommen haben. Diese Annahme verursacht in der Zeitkoordinate einen Fehler, der

im Submillimeterbereich liegt, was wir dadurch zeigen können, indem wir zwei Satelliten vergleichen, deren räumliche Komponenten jeweils relativistisch bzw. nicht relativistisch ermittelt werden. Die Anfangswerte sind für die beiden Satelliten identisch zu nehmen. Ferner bemerken wir, daß die von uns eingeführte Kreisbahn nicht der Referenzbahn von GPS entspricht. Dies verursacht einen zeitproportionalen Fehler, der im obigen Fall vierzehn Zentimeter nach zwölf Stunden beträgt.

### 5-3. Signalausbreitung im Gravitationsfeld

#### 5-31. Signalausbreitung im e-System

Den zweiten Effekt, den wir in diesem Kapitel untersuchen wollen, ist die Ablenkung eines Lichtstrahls. Wir wenden dabei die Bewegungsgleichung (3.92) auf den Fall des Vakuums an und erhalten mit den Christoffelsymbolen (5.11) folgendes Differentialgleichungssystem erster Ordnung

$$\frac{dx^i}{dt} = v^i \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{dv^i}{dt} = & -\frac{GM}{r^3} x^i + \frac{1}{c^2} \left[ \frac{GM}{r^3} (4x^k v^k v^i - x^i v^2) + \right. \\ & \left. + 4 \frac{GM}{r^3} \left( \frac{GM}{r} - \frac{1}{5} (R^2 \omega^2 + 3 \frac{GM}{R}) \right) x^i + 4(W^i_{,j} - W^j_{,i}) v^j \right] + o(c^{-3}). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Wir können die unterstrichenen Terme vernachlässigen, da wir aufgrund der Größenordnung des Effekts (nur wenige Zentimeter, vergl. Abbildung 5.3 u. 5.4) nur Terme der Größenordnung  $o(c^{-0})$  in Gleichung (5.20) zu berücksichtigen haben. Dabei gilt für die Komponenten der 3-Koordinatengeschwindigkeit

$$\| \underline{v} \| = v \cong o(c). \quad (5.21)$$

Die Gleichungen (5.19) u. (5.20) werden wiederum numerisch ausgewertet, das Programm verlangt im Anfangspunkt die Vorgabe der räumlichen Komponenten des 4-Ortsvektors und der 3-Koordinatengeschwindigkeit des Lichtstrahls bezüglich des e-Systems. Durch Festlegung der Signallaufzeit haben wir das obige Differentialgleichungssystem (5.19) u. (5.20) auf eine Anfangswertaufgabe zurückgeführt. Die Integrationszeit von 0.001s erwies sich hier als vollkommen ausreichend, eine Verdopplung der Schrittweite ergab Abweichungen im Submillimeterbereich für einen GPS-Satelliten. In den unteren Abbildungen wurde die Differenz

$$ds = \| \underline{x} - \underline{\zeta}_{1\alpha} \Delta t \| \quad (5.22)$$

aufgetragen. Dabei bezeichnen wir mit  $x^i$  die räumlichen Komponenten des 4-Ortsvektors, mit  $c^i_{1\alpha}$  die räumlichen Komponenten der Lichtgeschwindigkeit im Punkt  $P_\alpha$ . In der Abbildung 5.4 haben wir die Richtung des Lichtstrahls variiert, wobei wir die

Signallaufzeit so gewählt haben, daß sie der Signallaufzeit zu einem GPS-Satelliten entspricht. Der angegebene Winkel entspricht demjenigen gegenüber der Flächennormalen (kugelförmige Modellerde).

Wir bemerken, daß im Falle eines GPS-Satelliten die Abweichung gegenüber der Euklidischen Geradengleichung, von ca. zwei Zentimetern für horizontnahe Zielungen, bis ca. 1.5 Zentimeter im Zenit, variiert.

### 5-32. Signalausbreitung im $f^*$ -System

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Lichtausbreitung bezüglich eines erdfesten Bezugssystems, dem  $f^*$ -System aus Abschnitt 1-2.. Wir schreiben zunächst die Metrik (5.1) unter Anwendung des Transformationsverhaltens (3.13) für kovariante Tensoren zweiter Stufe an

$$\begin{aligned}
 g_{ij} &= \delta_{ij} \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right) + o(c^{-4}) \\
 g_{4i} &= \left(1 + \frac{2}{c^2} \frac{GM}{r}\right) \epsilon_{ijk} (\omega^j/c) y^k - (4/c^3) W^i + o(c^{-5}) \\
 g_{41} &= - \left(1 + \frac{2}{c^2} \frac{GM}{r}\right) \frac{\omega}{c} y^2 + \frac{4}{c^3} \left(\frac{1}{5} \omega \frac{GM}{r^3} R^2 y^2\right) + o(c^{-5}) \\
 g_{42} &= + \left(1 + \frac{2}{c^2} \frac{GM}{r}\right) \frac{\omega}{c} y^1 - \frac{4}{c^3} \left(\frac{1}{5} \omega \frac{GM}{r^3} R^2 y^1\right) + o(c^{-5}) \\
 g_{43} &= 0 \\
 g_{44} &= \frac{\omega^2}{c^2} ((y^1)^2 + (y^2)^2) \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right) + \left(-1 + \frac{2U}{c^2} - \frac{1}{c^4} (2U^2 - 4\Phi)\right) \\
 &\quad - \frac{8}{5} \frac{\omega^2}{c^4} \frac{GM}{r} \left(\frac{R}{r}\right)^2 ((y^1)^2 + (y^2)^2) + o(c^{-5}),
 \end{aligned} \tag{5.23}$$

indem wir die Transformation gem. den Gleichungen (1.4) u. (1.5) anwenden. Wir stellen dabei das Auftreten von Termen der Größenordnung  $o(c^{-1})$  in den Nebendiagonalelementen fest, die wir ebenfalls für eine Newton-Raum-Zeit (vergl. z.B. Heitz u. Stöcker-Meier 1990, p. 83ff.) erhalten. Die zur Berechnung der Christoffelsymbole benötigten Komponenten des kontravarianten Metriktensors werden mit Hilfe einer Neumannschen Reihe (5.9) vom Programm berechnet, die wir aufgrund der Terme  $o(c^{-1})$  nach der vierten Potenz in  $h_{\alpha\beta}$  abbrechen. Des weiteren benötigen wir die partiellen

Ableitungen der kovarianten Metrik

$$\begin{aligned}
g_{ij,k} &= \delta_{ij} \left( -\frac{2}{c^2} \frac{GM}{r^3} y^k \right) + o(c^{-4}) \\
g_{4i,1} &= \left( 1 + \frac{2}{c^2} \frac{GM}{r} \right) \epsilon_{ijl} (\omega^j/c) - \frac{2}{c^2} \frac{GM}{r^3} \epsilon_{ijk} (\omega^j/c) y^k y^1 - (4/c^3) W^i_{,1} + o(c^{-5}) \\
g_{41,1} &= \frac{2\omega}{c^3} \frac{GM}{r^3} y^1 y^2 - \frac{12}{5} \frac{\omega}{c^3} \frac{GM}{r^3} \left( \frac{R}{r} \right)^2 y^1 y^2 + o(c^{-5}) \\
g_{41,2} &= - \left( 1 + \frac{2}{c^2} \frac{GM}{r} \right) \frac{\omega}{c} + 2 \frac{\omega}{c^3} \frac{GM}{r^3} y^2 y^2 - \frac{4}{5} \frac{\omega}{c^3} \frac{GM}{r^3} \left( \frac{R}{r} \right)^2 (3(y^2)^2 - r^2) + o(c^{-5}) \\
g_{41,3} &= \frac{2\omega}{c^3} \frac{GM}{r^3} y^2 y^3 - \frac{12}{5} \frac{\omega}{c^3} \frac{GM}{r^3} \left( \frac{R}{r} \right)^2 y^2 y^3 + o(c^{-5}) \\
g_{42,1} &= + \left( 1 + \frac{2}{c^2} \frac{GM}{r} \right) \frac{\omega}{c} - 2 \frac{\omega}{c^3} \frac{GM}{r^3} y^1 y^1 + \frac{4}{5} \frac{\omega}{c^3} \frac{GM}{r^3} \left( \frac{R}{r} \right)^2 (3(y^1)^2 - r^2) + o(c^{-5}) \\
&\hspace{25em} (5.24) \\
g_{42,2} &= - \frac{2\omega}{c^3} \frac{GM}{r^3} y^1 y^2 + \frac{12}{5} \frac{\omega}{c^3} \frac{GM}{r^3} \left( \frac{R}{r} \right)^2 y^1 y^2 + o(c^{-5}) \\
g_{42,3} &= - \frac{2\omega}{c^3} \frac{GM}{r^3} y^1 y^3 + \frac{12}{5} \frac{\omega}{c^3} \frac{GM}{r^3} \left( \frac{R}{r} \right)^2 y^1 y^3 + o(c^{-5}) \\
g_{44,i} &= - \frac{2}{c^2} \frac{GM}{r^3} \left[ 1 - \frac{2}{c^2} \frac{GM}{r} + \frac{1}{c^2} \frac{4}{5} (R^2 \omega^2 + 3 \frac{GM}{R}) \right] y^i \\
&\quad + \frac{\omega^2}{c^4} \frac{GM}{r^3} \left( \frac{24}{5} \frac{R^2}{r^2} - 2 \right) ((y^1)^2 + (y^2)^2) y^i + \\
&\quad + 2 \frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 + \frac{2U}{c^2} - \frac{8}{5} \frac{R^2}{c^2} \frac{GM}{r^3} \right) (\delta_{1i} y^1 + \delta_{2i} y^2) + o(c^{-5}),
\end{aligned}$$

um die Christoffelsymbole anschreiben zu können, wobei wir mit den Gleichungen (5.8) u. (5.9) unter Annahme einer stationären Metrik folgende numerisch günstige Form erhalten

$$\begin{aligned}
\Gamma_{jk}^i &= (1/2)(h_{ki,j} + h_{ij,k} - h_{jk,i}) + (1/2)h^{i4}(h_{4k,j} + h_{4j,k}) \\
&\quad + (1/2)h^{i1}(h_{k1,j} + h_{1j,k} - h_{jk,1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{4j}^i &= (1/2)(h_{i4,j} - h_{4j,i}) + (1/2)h^{il}(h_{l4,j} - h_{4j,l}) + (1/2)h^{i4}h_{44,j} \\
\Gamma_{44}^i &= -(1/2)h_{44,i} - (1/2)h^{il}h_{44,l} \\
\Gamma_{ij}^4 &= (1/2)h^{4l}(h_{jl,i} + h_{li,j} - h_{ij,l}) - (1/2)(h_{j4,i} + h_{4i,j}) \\
&\quad + (1/2)h^{44}(h_{j4,i} + h_{4i,j}) \\
\Gamma_{4j}^4 &= (1/2)h^{4l}(h_{l4,i} - h_{4i,l}) - (1/2)h_{44,i} + (1/2)h^{44}h_{44,i} \\
\Gamma_{44}^4 &= -(1/2)h^{4l}h_{44,l}.
\end{aligned} \tag{5.25}$$

Die Christoffelsymbole wurden im Programm mit den obigen Gleichungen berechnet. Analog unserer Vorgehensweise im e-System wurde die Differenz gem. Gleichung (5.22) aufgetragen, wobei sich eine Integrationsschrittweite von 0.001s als ausreichend erwies (vergl. Abschnitt 5–31). Ein in Richtung der jeweiligen Flächennormalen ausgesandter Lichtstrahl weicht in mittleren Breiten ( $48^\circ$ ) in der Größenordnung von ca. sechzig Meter von der Geraden im Euklidischen Raum ab, während ein in der Äquatorebene entsandter Lichtstrahl um ca. hundert Meter (97.550m) abweicht (im Falle eines GPS-Satelliten).

In den beiden Abbildungen 5.5 und 5.6 haben wir für eine Bodenstation sowohl die Entfernungs- als auch die Richtungsabhängigkeit untersucht. Bemerkenswert dabei ist die ausgeprägte Richtungsabhängigkeit, die von dem unterschiedlichen Winkel des jeweiligen Lichtstrahls gegenüber der Drehachse der Erde herrührt. Dies können wir sofort nachvollziehen, indem wir beachten, daß ein Lichtstrahl in dem o.g. terrestrischen Punkt ( $\phi = 48^\circ$ ) für den Zenitwinkel  $-42^\circ$  bzw.  $+48^\circ$  parallel zur Drehachse der Erde bzw. parallel zur Äquatorebene verläuft.

*Mit der numerischen Untersuchung der Signalausbreitung im f-System ist die Diskussion der relativistischen Phasenmessung abgeschlossen, wobei wir zur numerischen Untersuchung des Einflusses des Mediums auf die Arbeit von (Stöcker–Meier 1988, p.51f) verweisen. Zusammenfassend können wir sagen, daß die betreiberseits angebrachte relativistische Korrektur (vergl. Abschnitt 5–2.) nicht ausreicht, da wir immer noch einen periodischen Term mit einer Amplitude von ca. sieben Metern zu verzeichnen haben. Des weiteren können wir festhalten, daß der Einfluß des Gravitationsfeldes auf die Signalausbreitung eine Größenordnung von mehreren Zentimetern annimmt, während der kinematische Anteil der Rotation einen Effekt verursacht, der, je nach dem Winkel zwischen dem Lichtstrahl im Anfangspunkt und der Rotationsachse der Erde, einen Wert bis zu hundert Metern annehmen kann. Damit haben wir gezeigt, daß wir für Zwecke der Positionsbestimmung im f-System den Zusammenhang zwischen der Signallaufzeit und der 3-Koordinatendifferenz nicht mehr in der Form (4.3) anschreiben können, wie dies in der Literatur oft der Fall ist (z.B. Seeber 1989, p. 276).*



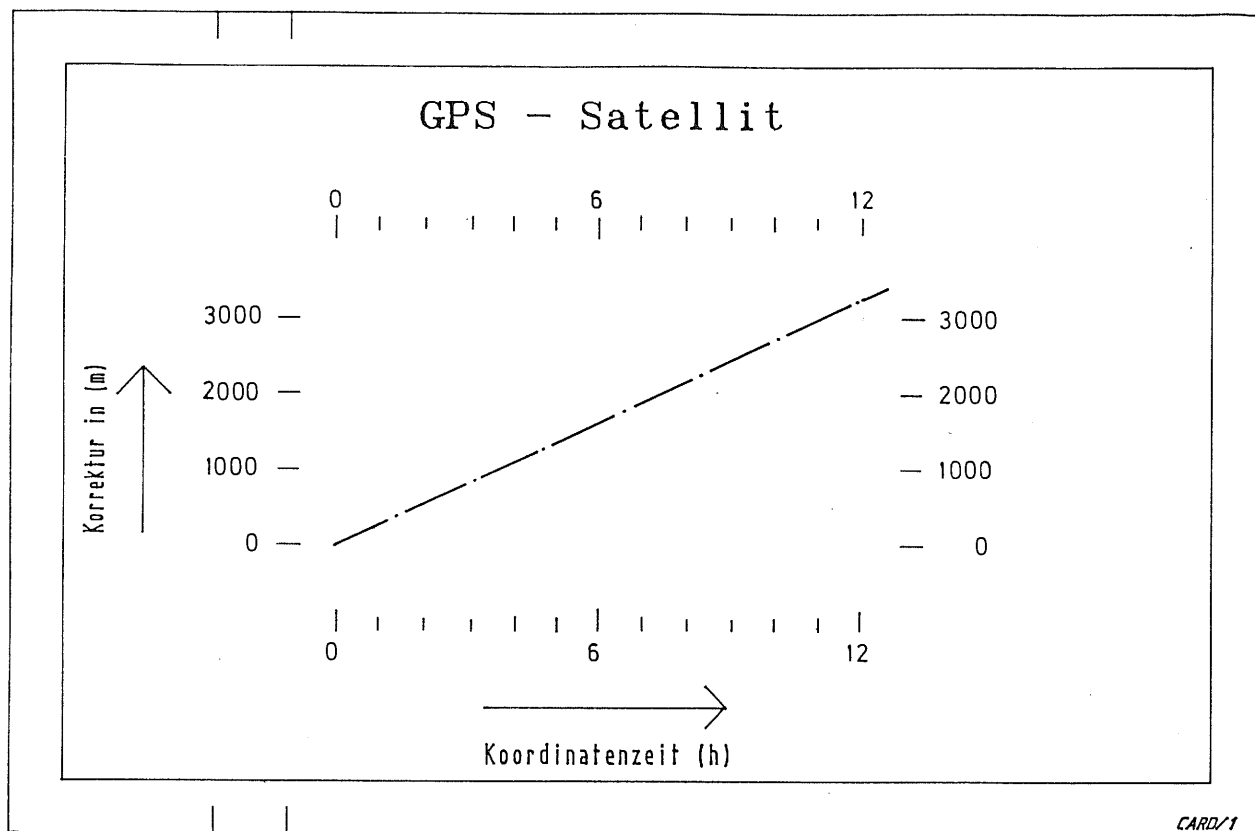


Abb. 5.1: Relativistische Streckenkorrektur (linearer Anteil)

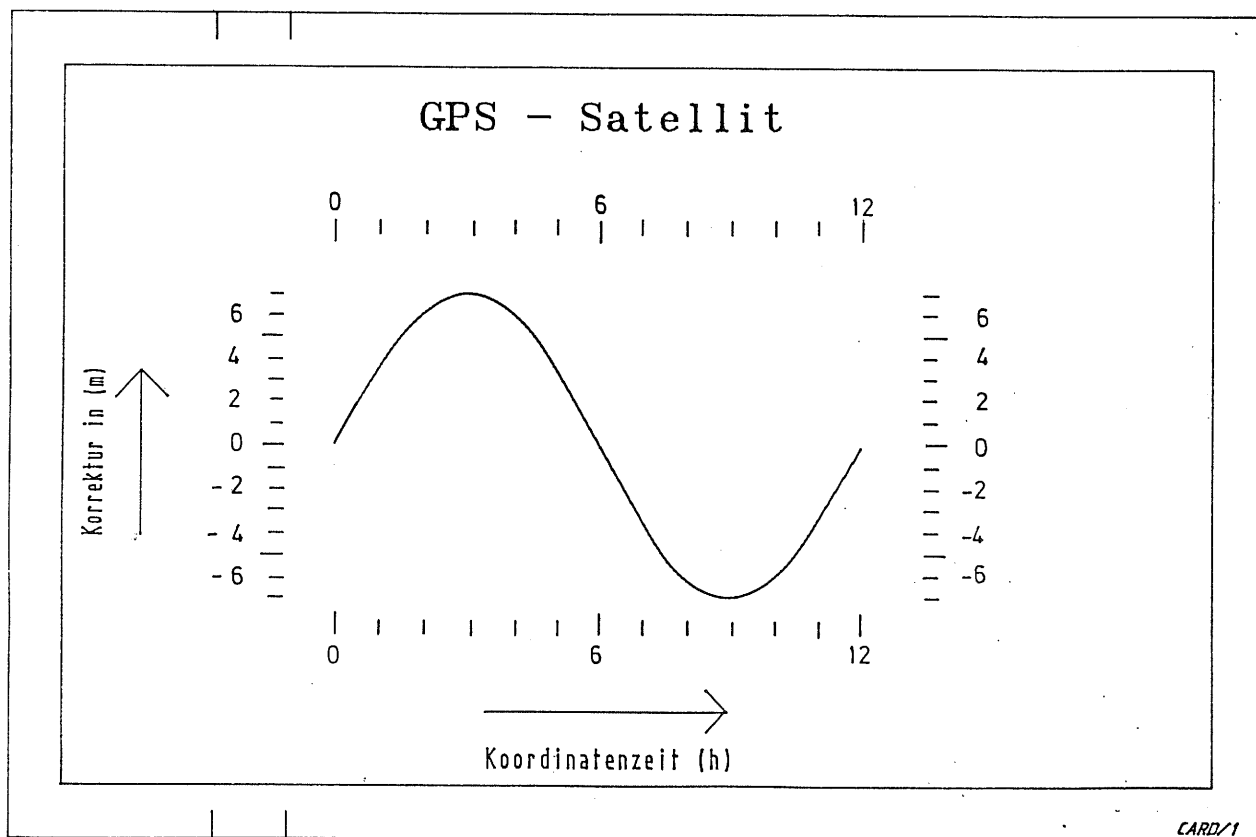


Abb. 5.2: Relativistische Streckenkorrektur aufgrund der Bahnexzentrizität ( $e=0.01$ )

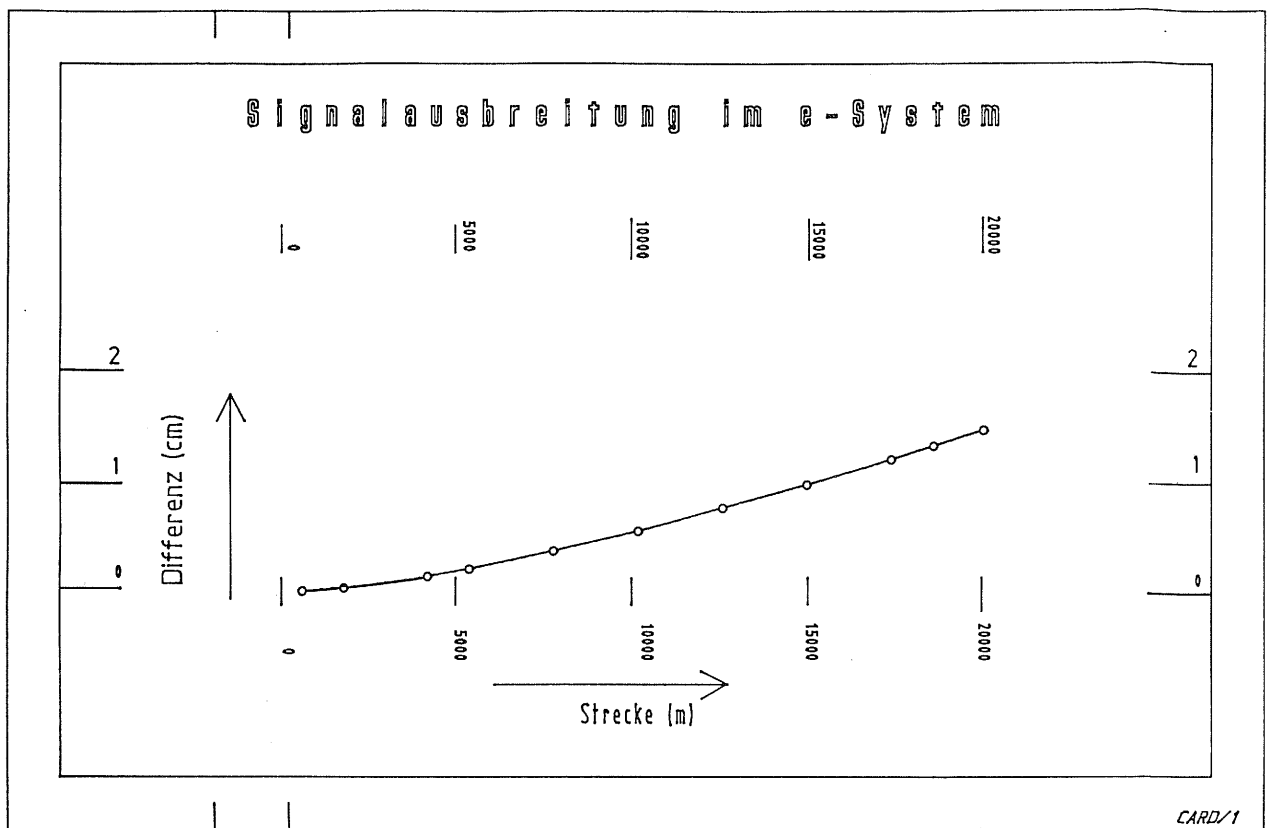


Abb. 5.3: Abweichung von der Geraden im Euklidischen Raum in Abhängigkeit von der Entfernung (Breite der Bodenstation:  $48^\circ$ )

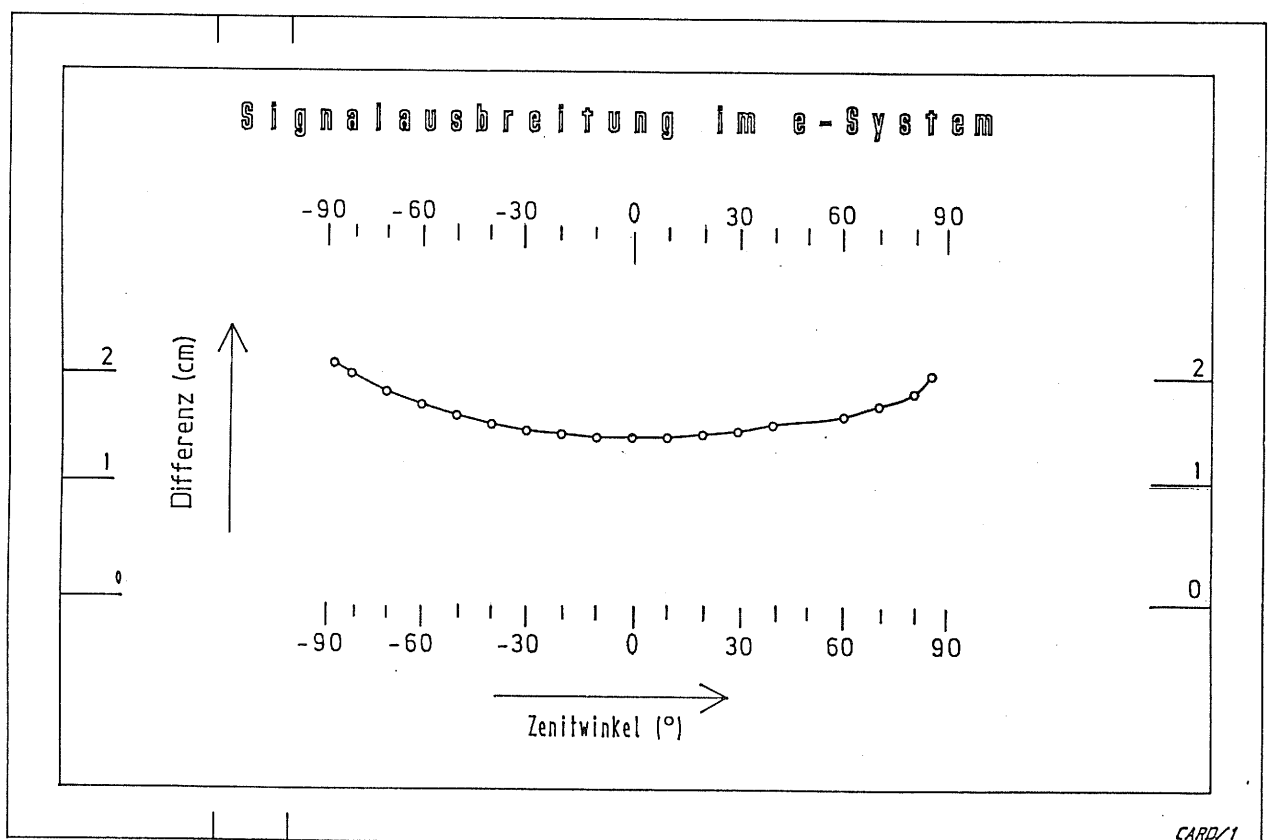


Abb. 5.4: Abweichung von der Geraden im Euklidischen Raum in Abhängigkeit vom Zenitwinkel im Anfangspunkt

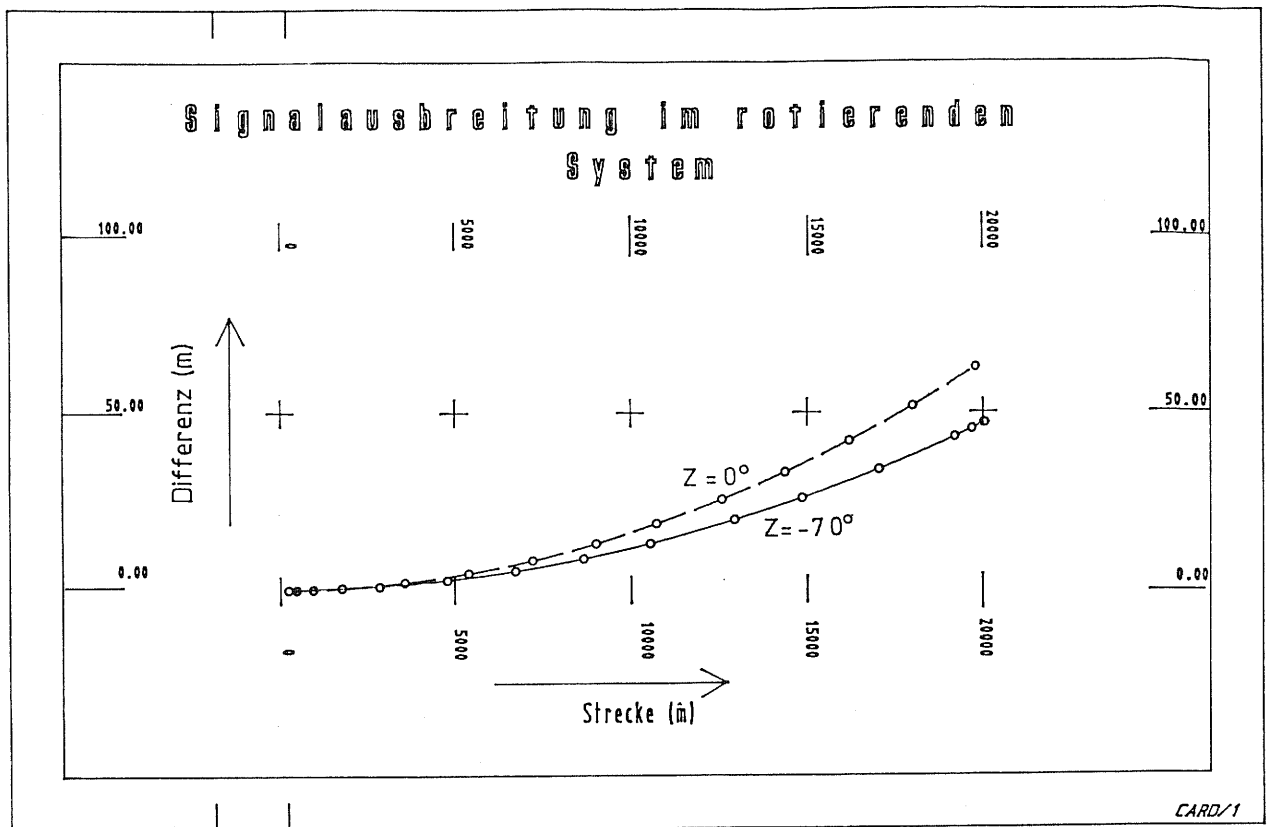


Abb. 5.5: Signalausbreitung im  $f^\circ$ -System  
Abweichung von der Geraden im Euklidischen Raum in Abhängigkeit von  
der Entfernung für zwei unterschiedliche Zenitwinkel  
Breite der Bodenstation:  $48^\circ$

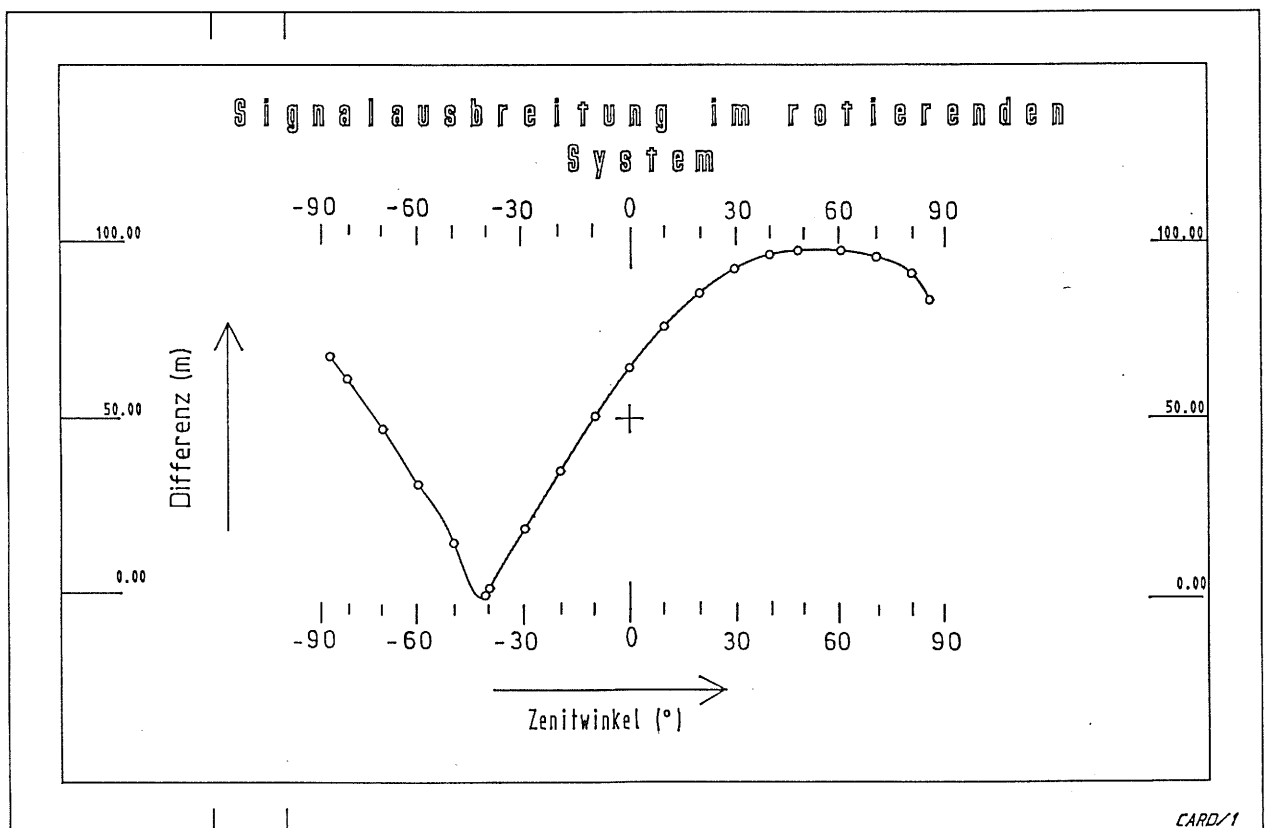


Abb. 5.6: Signalausbreitung im  $f^\circ$ -System  
Abweichung von der Geraden im Euklidischen Raum in Abhängigkeit vom  
Zenitwinkel im Anfangspunkt

## 6. Abstract

The main aim of this work is to discuss an important observation technique in satellite geodesy, namely the phase difference measurement, within the framework of general relativity. A relativistic approach to this observation technique consists of three steps. Firstly the orbit of the satellite has to be considered as a geodesic in curved space-time with gravitational forces being present, secondly we have to consider the influence of the gravitational field on a moving oscillator and finally we have to model the propagation of an electromagnetic wave in a refractive medium.

Starting from the propagation of an electromagnetic wave we derive the well-known eikonal equation, which is valid only under certain assumptions (i.e. high frequency limit). It is also shown that this equation is only valid in the rest frame of the medium and thus it is not consistent with the laws of special relativity. In order to obtain a covariant formulation in Minkowski-space, we introduce the four-velocity of the medium. The influence of the gravitational field on electrodynamic systems is considered in the subsequent chapter, where we have to generalize the basic laws of electrodynamics to curved space-time. This is achieved by applying the principle of minimal coupling which means that there is no direct coupling between the dynamical variables describing the electromagnetic field and the gravitational field. As a consequence of this principle we obtain the basic laws of classical electrodynamics in a so-called Local Inertial Frame (the influence of the gravitational field vanishes for small space-time distances), which enables us to derive the general covariant eikonal equation by applying the strong equivalence principle. This is an important result and means a generalization of the non-relativistic geometrical optics to four-dimensional curved space-time.

The analogy between geometrical optics and mechanical systems in the Hamilton-Jacobi formalism is used to derive a covariant variational principle. It is shown in the subsequent discussion, that this general covariant principle contains the well-known Fermat principle. A system of ordinary differential equations of first order for the four-position vector and the four-wave vector is derived with the help of calculus of variation, while the eikonal equation is considered as a holonomic constraint. By eliminating the four-wave vector we obtain a system of differential equations of second order for the four-position vector, which is nothing other than a geodesic, disturbed by the influence of the medium. After having discussed the wave propagation in four dimensional space-time, we consider the behaviour of so-called standard oscillators moving in a gravitational field.

The chapter dealing with phase difference measurement starts with a brief overview of the common approach to phase measurement techniques. The observation equation for the phase difference measurement is derived, which is consistent within the framework of general relativity. We also discuss the physical significance of each component appearing in the observation equation.

In order to eliminate or minimize systematic errors several differencing techniques are used in satellite geodesy. We also apply these differencing techniques and discuss them from a relativistic point of view and show that no complete elimination of systematic errors, due to the neglect of relativistic effects, can be achieved.

Finally we give some numerical values for the systematic errors caused by effects which are not taken into account by the usual non-relativistic approach. The first effect is that the proper time of a satellite or receiver clock does not coincide with the corresponding coordinate time interval. In the case of a GPS-satellite we obtain a linear increasing systematic error with respect to coordinate time of the order of several thousands of meters per day. In the case of a Kepler type orbiting satellite we obtain a periodic error of the amount of seven meters (amplitude). These results are derived with the help of numerical methods. In our case the Runge-Kutta-Fehlberg method (8th order) has been applied.

The second effect considers the signal propagation (vacuum case) in a non-rotating reference frame and in a rotating, earth fixed reference frame. One can clearly distinguish the influence of the gravitational field (a few centimeters in the case of a GPS satellite) from the kinematic influence of the rotation (it can reach 100m in the case of a GPS satellite, depending upon the angle between the earth's rotation axis and the direction of the light ray).

These effects mentioned above clearly show, that a relativistic treatment of the phase measurement is necessary.

## 7. Literaturverzeichnis

- Anderson, J.L., Decanio, T.C. (1975):  
Equations of Hydrodynamics in General Relativity in the Slow Motion Approximation, General Relativity and Gravitation 6 (1975)
- Arfken, G. (1985):  
Mathematical Methods for Physicists, Academic Press 1985
- Arnol'd, V.I. (1988):  
Mathematische Methoden der klassischen Mechanik, Birkhäuser Verlag, Basel/Boston/Berlin 1988
- Ashby, N. (1986):  
Relativistic Effects in the Global Positioning System, Proceedings of the International Association of Geodesy (IAG), Vancouver 1987
- Born, M., Wolf E. (1967):  
Principles of Optics, Pergamon Press, Oxford/London/Edinburgh 1967
- Danby, J.M.A. (1988):  
Celestial Mechanics, Willmann-Bell, Richmond 1988
- Goldstein, H. (1980):  
Classical Mechanics, Addison-Wesley Publishing Company, Reading 1980
- Grafarend, E.W. (1984):  
The Equations of Electromagnetic Wave Propagation in a Refractive Medium Corotating with the Earth, in: BRUNNER, F.K.: Geodetic Refraction, Springer Verlag, Berlin/Heidelberg/New York 1984
- Grafarend, E.W. (1988):  
Four Lectures on Special and General Relativity, International Summer School on Theory of Satellite Geodesy and Gravity Field Determination, Assisi 1988
- Grigorieff, R.D. (1972):  
Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen  
Band 1: Einschrittverfahren, Teubner, Stuttgart 1972
- Heitz, S. (1980):  
Mechanik fester Körper, 2 Bände, F. Dümmers Verlag Bonn 1980/83
- Heitz, S. (1991):  
Einführung in Dreidimensionale geometrische Modelle der Geodäsie, Mitteilungen aus den Geodätischen Instituten der Universität Bonn, 79, Bonn 1991
- Heitz, S., Stöcker-Meier E. (1990):  
Grundlagen der physikalischen Geodäsie, F. Dümmers Verlag, Bonn 1990
- Jackson, J.D. (1975):  
Classical Electrodynamics, John Wiley and Sons, New York 1975
- Joos, G. (1990):  
Relativistische Bahnberechnung künstlicher Erdsatelliten, Diplomarbeit, Stuttgart 1990
- Klingbeil, E. (1966):  
Tensorrechnung für Ingenieure, Bibliographisches Institut, Mannheim 1966
- Meetz, K., Engl W.L. (1980):  
Elektromagnetische Felder, Springer Verlag, Berlin 1980
- Meschkowski, H. (1972):  
Meyers Handbuch über die Mathematik, Bibliographisches Institut, Mannheim/Wien/Zürich 1972

- Misner, C.W., Thorne, K.S., Wheeler, J.A. (1973):  
 Gravitation, W.H. Freeman and Company, New York 1973
- Schmidt, J. (1990):  
 Zur näherungsweise Lösung der Bewegungsgleichungen der nichtminimal gekoppelten Einstein–Maxwell–Gleichungen, Diplomarbeit, Göttingen 1990
- Schneider, M. (1988):  
 Satellitengeodäsie, Bibliographisches Institut, Mannheim/Wien/Zürich, 1988
- Schwarze, S.V. (1990):  
 Relativistische Effekte in der Satellitengeodäsie, Selbständige Geodätische Arbeit, Stuttgart 1990
- Seeber, G. (1989):  
 Satellitengeodäsie, Walter de Gruyter, Berlin/New York 1989
- Stöcker–Meier, E. (1988):  
 Untersuchungen zur Elektrodynamik in relativistischen geodätischen Modellen, DGK Reihe C, 339, München 1988
- Stephani, H. (1982):  
 General Relativity, Cambridge University Press, Cambridge 1982
- Weinberg, S. (1972):  
 Gravitation and Cosmology, John Wiley and Sons, New York 1972
- Wells, D. (1987):  
 Guide to GPS Positioning, Canadian GPS Associates, Fredericton 1987