

STUDIENGANG VERMESSUNGSWESEN
an der Universität Stuttgart

Diplomarbeit

BEATE MÜLLER

Kartenprojektionen
des
dreiachsigen Ellipsoids

Betreuer :
E.W. Grafarend, J.Engels
Geodätisches Institut

Stuttgart 1991

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, daß die vorliegende Diplomarbeit in allen ihren Teilen - ohne Benutzung anderer als der aufgeführten Quellen - selbständig verfaßt worden ist.

Stuttgart, den 20. 03. 91

Beate Müller

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
2	Geometrische Eigenschaften	5
2.1	Hauptschnitte	5
2.2	Kreisschnitte	6
2.3	Vertikalschnitte	7
2.4	Krümmungslinien	7
3	Das dreiachsige Ellipsoid als Referenzellipsoid	12
3.1	Abbildung der topographischen Oberfläche auf das dreiachsige Referenzellipsoid	13
3.2	Ein vollständiger Atlas des dreiachsigen Ellipsoids	14
3.3	Ein minimaler Atlas des dreiachsigen Ellipsoids	17
4	Geodätische Parallel- und Polarkoordinaten	21
4.1	Geodätische Linien des dreiachsigen Ellipsoids	21
4.2	Geodätische Polarkoordinaten	25
4.3	Geodätische Parallelkoordinaten	26
5	Kartenprojektionen (Kartennetzentwürfe)	27
5.1	Kurze Formelsammlung	27
5.1.1	Isometrische Netze	27
5.1.2	Konforme Abbildungen	28
5.1.3	Flächentreue Abbildung	29
5.1.4	Äquidistante Abbildung	29
5.2	Parametersysteme auf dem dreiachsigen Ellipsoid und in der Bildebene . .	30
5.3	Abbildung des dreiachsigen Ellipsoids auf eine Tangentialebene	34
5.3.1	“Echte azimutale“ Abbildungen	34
5.3.2	“Unechte azimutale“ Abbildungen	37
5.3.3	Abbildung des dreiachsigen Ellipsoids auf der Basis von elliptischen Koordinaten	40

A Grundlagen	42
A.1 Kurvenbegleitendes Frenet-Dreibein	42
A.2 Flächenbegleitendes Gauß-Dreibein	42
A.3 Darboux-Dreibein	42
A.4 Krümmung und Torsion	43
A.5 I. Fundamentalform	43
A.6 II. Fundamentalform	43
A.7 Krümmung	44
A.8 Berechnung des Metrik- und Deformationstensors	44
A.9 Christoffelsymbole	45
A.10 Isometrische Parameter	45
B Parametrisierungen	47
B.1 Ellipsoidnormale Koordinaten L und B	47
B.2 Kugelreduzierte Koordinaten Λ und Φ	49
B.3 Ellipsoidzentrische Koordinaten λ und φ	51
B.4 Elliptische Flächenkoordinaten μ und ν	53
B.5 Elliptisch-trigonometrische Koordinaten ϕ und ψ	55
B.6 Isometrische Parameter P und Q	57
Literatur	59
Dank	61

Abbildungsverzeichnis

1	Ebene E_0	6
2	Kreispunkte K_1, K_2, K_3, K_4 des dreiachsigen Ellipsoids	7
3	Einschaliges Hyperboloid	8
4	Zweischaliges Hyperboloid	9
5	Krümmungslinien des dreiachsigen Ellipsoids	11
6	Zusammenhang zwischen den kartesischen Koordinaten eines Punktes auf der Erdoberfläche (X, Y, Z) und auf dem Referenzellipsoid (x, y, z)	13
7	Vollständiger Atlas des dreiachsigen Ellipsoids	15
8	Zusammenhang der Koordinatensysteme (x, y, z) und (x^*, y^*, z^*)	18
9	Singuläre Punkte beider Abbildungen (mit $\Lambda_0 = 180^\circ$)	19
10	Geodätische Linie	23
11	Geodätische Polarkoordinaten	25
12	Geodätische Parallelkoordinaten	26
13	(Echte) azimutale Abbildung	32
14	Isoparametrische Abbildung in elliptisch-trigonometrischen Koordinaten .	33
15	Ellipsoidzentrische (λ) und kugelreduzierte (Λ) Länge	35
16	“Unechte“ azimutale Abbildung äquidistant entlang der Meridiane	39

1 Einleitung

Die Abbildung der Erde oder eines anderen Himmelskörpers in einer ebenen Karte erfordert eine Referenzfigur, die sich einerseits der abzubildenden Fläche möglichst gut anpassen, andererseits eine analytisch möglichst gut beherrschbare Geometrie aufweisen sollte. Bisher wurde die Figur der Himmelskörper, insbesondere der Erde, in der Regel durch eine Kugel oder ein Rotationsellipsoid angenähert; kompliziertere Flächen schieden bis vor kurzem aus Gründen des Rechenaufwands aus.

Nachdem heute sehr leistungsfähige Computer zur Verfügung stehen, so daß der numerische Aufwand kaum noch eine wesentliche Rolle spielt, können auch andere Flächen als Referenzflächen in Betracht gezogen werden. Insbesondere eignet sich hierfür das dreiachsige Ellipsoid, das die tatsächliche Figur der Himmelskörper teilweise beträchtlich besser approximiert als ein Rotationsellipsoid.

In der vorliegenden Arbeit wird das dreiachsige Ellipsoid auf seine differentialgeometrischen Eigenschaften hin untersucht; es werden verschiedene Parametrisierungen dieser Figur und deren Eigenschaften vorgestellt sowie einige Abbildungsgleichungen der Abbildung des Ellipsoids auf eine Tangentialebene herausgearbeitet.

2 Geometrische Eigenschaften des dreiachsigen Ellipsoids

Die Mannigfaltigkeit eines dreiachsigen Ellipsoids läßt sich wie folgt definieren

$$\mathbf{x} \in X := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\} \quad (1)$$

Die Längen der Hauptachsen des Ellipsoids seien mit a, b, c ($a > b > c$) bezeichnet. Für die Schnittellipse in der x, y -Ebene lassen sich die äquatoriale Abplattung $f_{12} = \frac{a-b}{a}$, die absolute Exzentrizität $\varepsilon_{12} = \sqrt{a^2 - b^2}$, die erste $e_{12} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$ und die zweite relative Exzentrizität $e'_{12} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2}}$ berechnen.

Analog folgen daraus für die Schnittellipse in der x, z -Ebene die Berechnungen der polaren Abplattung $f_{13} = \frac{a-c}{a}$, der absoluten Exzentrizität $\varepsilon_{13} = \sqrt{a^2 - c^2}$, der ersten $e_{13} = \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{a^2}}$ und der zweiten relativen Exzentrizität $e'_{13} = \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{c^2}}$.

2.1 Hauptschnitte

Die Fläche eines dreiachsigen Ellipsoids ist symmetrisch bezüglich dreier Ebenen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ und wird von diesen in Ellipsen geschnitten, wobei die Hauptachsen dieser Schnittellipsen in je zwei Koordinatenachsen liegen. Diese sogenannten *Hauptschnitte* besitzen die Gleichungen :

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2)$$

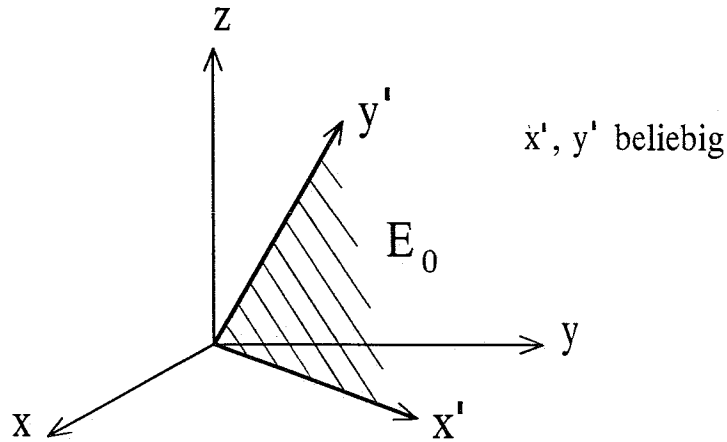
Die Ebenen $x = k \cdot a$, $y = k \cdot b$, $z = k \cdot c$ mit $-1 < k < 1$ schneiden das Ellipsoid ebenfalls in Ellipsen, die denen des Hauptschnittes ähnlich sind. Die Ellipsenschnitte erfüllen die Gleichungen :

$$\frac{x^2}{a^2(1-k^2)} + \frac{y^2}{b^2(1-k^2)} = 1 \quad \frac{x^2}{a^2(1-k^2)} + \frac{z^2}{c^2(1-k^2)} = 1 \quad \dots \quad (3)$$

Das Verhältnis der Hauptachsen beträgt

$$a^2(1-k^2) : b^2(1-k^2) : c^2(1-k^2) = a^2 : b^2 : c^2$$

Die beliebig festlegbaren Koordinatenachsen x' und y' spannen eine Schnittebene E_0 auf (vgl. Abb. 1). Es kann gezeigt werden, daß auch dieser Schnitt sowie alle durch parallele Ebenen zu E_0 erzeugten Schnitte Ellipsen darstellen. [Sml1]

Abbildung 1: Ebene E_0

2.2 Kreisschnitte

Es stellt sich nun die Frage, ob diese Schnitellipsen zu Kreisen ausarten können. Tatsächlich wurde bewiesen [Sml1], daß sogenannte *Kreisschnitte* existieren; sie liegen in Ebenen parallel zur y -Achse und bilden den Winkel α mit der x,y -Ebene.

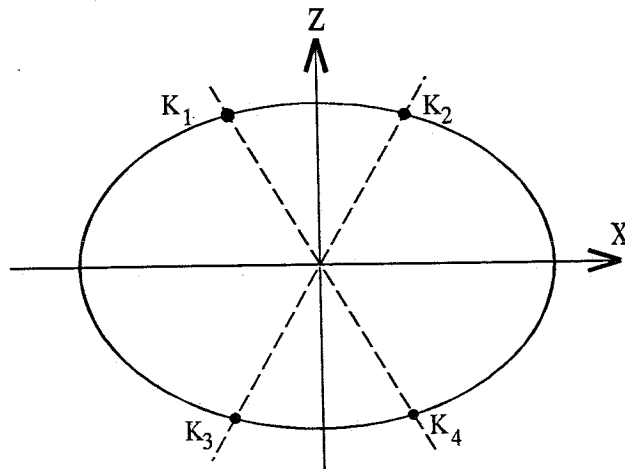
$$\cos \alpha = \pm \frac{a}{b} \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}} \quad (4)$$

Es existieren demnach zwei Scharen paralleler Ebenen, die das Ellipsoid in Kreisen schneiden. Punkte des Ellipsoids, deren Tangentialebenen den Ebenenscharen angehören, heißen *Kreispunkte* und besitzen folgende Koordinaten:

$$x_k = \pm a \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, \quad y_k = 0, \quad z_k = \pm c \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}} \quad (5)$$

Alle Kreispunkte sind Nabelpunkte; also Punkte, in denen alle Normalschnitte der Fläche dieselbe Krümmung haben (vgl. Kap.2.3). Eine Kugel besteht z.B. aus lauter Nabelpunkten.

Die beiden durch den Mittelpunkt des Ellipsoids gehenden Verbindungsgeraden der Kreispunkte (vgl. Abb.2) enthalten die Mittelpunkte sämtlicher Kreisschnitte. [Sml1]

Abbildung 2: Kreispunkte K_1, K_2, K_3, K_4 des dreiachsigen Ellipsoids

2.3 Vertikalschnitte

Die Flächennormalen einer Kugel schneiden sich im Kugelmittelpunkt. Liegt der Punkt P_2 in der Vertikalebene des Kugelaufpunkts P_1 , so enthält diese auch die Flächennormale von P_2 .

Im Falle des Rotationsellipsoids schneiden sich die Flächennormalen nur dann, wenn deren Schnittpunkte mit dem Ellipsoid entweder auf demselben Meridian oder auf demselben Parallelkreis liegen. Ansonsten verlaufen sie windschief zueinander.

Beim dreiachsigen Ellipsoid schneiden sich die Flächennormalen nur, wenn sie auf demselben Meridian errichtet werden (vgl. Anhang B.1). In allen anderen Fällen sind die in zwei verschiedenen Punkten P_1 und P_2 erzeugten Vertikalebenen, die den jeweiligen anderen Punkt P_2 bzw. P_1 enthalten, gegeneinander geneigt.

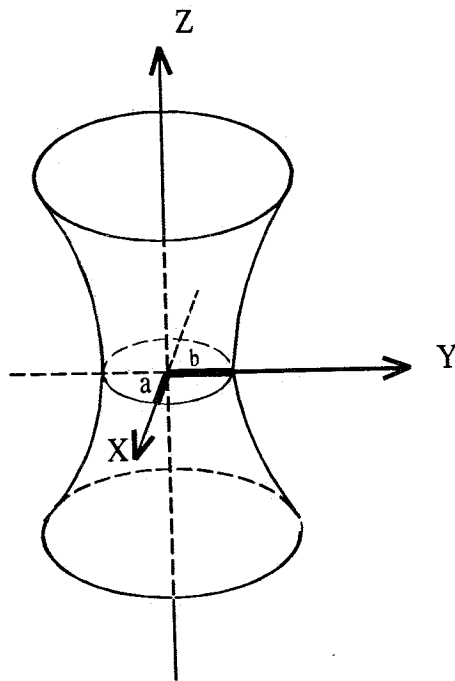
2.4 Krümmungslinien

Die Änderung des Normalenvektors bzw. Krümmung einer Kurve $\kappa(s)$ berechnet sich aus der zweiten Ableitung der Kurvenfunktion $x(s)$.

$$\mathbf{x}''(s) = \kappa(s) \cdot \mathbf{n}$$

In einem Punkt einer Fläche ist die Krümmung stets richtungsabhängig, wobei die Hauptkrümmungsrichtungen, d.h. die Richtungen der maximalen bzw. der minimalen Krümmung, orthogonal sind. Parameterlinien sind genau dann Krümmungslinien, wenn für die Nebendiagonalelemente des Metrik- (I) und des Krümmungstensors (II) $G_{12} = H_{12} = 0$ gilt.

Die Krümmungslinien des dreiachsigen Ellipsoids werden erzeugt, indem das Ellipsoid mit allen konfokalen ein- (vgl. Abb. 3) und zweischaligen (vgl. Abb. 4) Hyperboloiden geschnitten wird [Sml1].



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

a, b reelle Halbachsen
 c imaginäre Halbachse

Abbildung 3: Einschaliges Hyperboloid

Allgemein sei

$$f(t) = \frac{x^2}{a^2 - t} + \frac{y^2}{b^2 - t} + \frac{z^2}{c^2 - t} - 1. \quad (6)$$

Dies entspricht der Ellipsoid-Gleichung (1) für

$$f(0) = 0. \quad (7)$$

Die dazu konfokalen einschaligen Hyperboloide werden durch

$$\begin{aligned} f(u) &= 0 \\ b^2 &\geq u \geq c^2, \end{aligned} \quad (8)$$

die zu (1) konfokalen zweischaligen Hyperboloide durch

$$\begin{aligned} f(v) &= 0 \\ a^2 &\geq v \geq b^2 \end{aligned} \quad (9)$$

festgelegt. Bei Übereinstimmung von u bzw. v mit dem Quadrat einer der Halbachsen des Ellipsoids arten diese Hyperboloide zu Ebenen aus.

Es ergeben sich aus den Gleichungen (7), (8) und (9) die Quadrate der Koordinaten x, y, z eines Punktes P des Ellipsoids in Abhängigkeit von u und v , wobei für ein vorgegebenes Parameterpaar (u_P, v_P) jeweils zwei, im Vorzeichen unterschiedliche Lösungen für

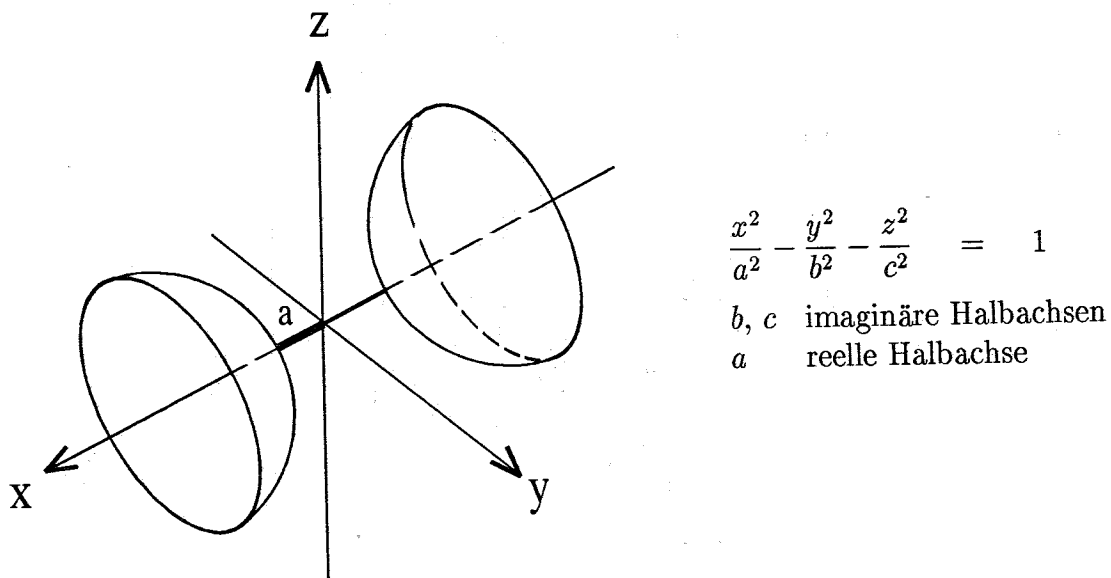


Abbildung 4: Zweischaliges Hyperboloid

x_P, y_P bzw. z_P existieren. Die Koordinaten des Punktes $P(x_P, y_P, z_P)$ können aus 16 verschiedenen Kombinationen bestehen, so daß dessen Lösung nicht eindeutig ist. (Diese Mehrdeutigkeit kann durch die Transformation in elliptisch-trigonometrische Koordinaten beseitigt werden, vgl. Anhang B.5.)

$$\begin{aligned} x^2 &= a^2 \frac{(a^2 - u)(a^2 - v)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} \\ y^2 &= b^2 \frac{(b^2 - u)(b^2 - v)}{(b^2 - c^2)(b^2 - a^2)} \\ z^2 &= c^2 \frac{(c^2 - u)(c^2 - v)}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)} \end{aligned} \quad (10)$$

Die Umkehrfunktion stellt sich wie folgt dar :

Die Gleichungen (7), (8) und (9) sind vom Typ

$$\omega^3 + \alpha\omega^2 + \beta\omega + \gamma = 0$$

$$\begin{aligned} \text{mit } \alpha &= x^2 + y^2 + z^2 - a^2 - b^2 - c^2 \\ \beta &= a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 - x^2(b^2 + c^2) - y^2(a^2 + c^2) - z^2(a^2 + b^2) \\ \gamma &= x^2b^2c^2 + y^2a^2c^2 + z^2a^2b^2 - a^2b^2c^2 \end{aligned}$$

Die drei Lösungen der kubischen Gleichung $(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)(\omega - \omega_3) = 0$ ergeben sich für

$$\begin{aligned}\omega_1 &= 0 & \text{falls} & \quad 0 < c^2 < b^2 < a^2 \\ \omega_2 &= u & \text{falls} & \quad c^2 < u < b^2 \\ \omega_3 &= v & \text{falls} & \quad b^2 < v < a^2\end{aligned}$$

Als Parameterdarstellung des Ellipsoids in elliptischen Flächenkoordinaten wird meist das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}x &= a \sqrt{\frac{(a^2 - u)(a^2 - v)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}} \\ y &= b \sqrt{\frac{(b^2 - u)(b^2 - v)}{(b^2 - c^2)(b^2 - a^2)}} \\ z &= c \sqrt{\frac{(c^2 - u)(c^2 - v)}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}}\end{aligned} \quad (11)$$

verwendet, wobei mit (11) nur Punkte im 1. Quadranten des kartesischen Koordinatensystems beschrieben werden können.

Nach Gl.(10) existieren also zwei Scharen von Krümmungslinien, welche man als Krümmungslinien 1. Art und Krümmungslinien 2. Art bezeichnet. Die u -Parameterlinien $v = \text{const} \in]b^2, a^2[$ werden durch die Schnitte des Ellipsoids mit der Schar der zweischaligen Hyperboloide, die v -Parameterlinien $u = \text{const} \in]c^2, b^2[$ durch die Schnitte des Ellipsoids mit der Schar der einschaligen Hyperboloide erzeugt. Die Krümmungslinien werden durch folgende Eigenschaften charakterisiert [Sml1]:

- Zwei Krümmungslinien derselben Schar haben keinen gemeinsamen Punkt.
- Es schneiden sich je zwei Linien, die nicht zur selben Schar gehören, in zwei Punkten unter rechten Winkeln.
- Durch jeden Punkt der Fläche, mit Ausnahme der Nabelpunkte, gehen genau zwei Krümmungslinien.
- Jede Schnittlinie des zweischaligen Hyperboloides zerlegt die Fläche in zwei Teile, so daß ein Teil die oberen zwei Kreispunkte, der andere Teil die unteren zwei Kreispunkte enthält.
- Die Projektionen der Krümmungslinien auf die Hauptschnittebenen des Ellipsoids sind Kegelschnitte in Form von Ellipsen und Hyperbelbögen.
- Der Äquator ist eine Krümmungslinie 1. Art.

Die Parameterdarstellung der Oberfläche des dreiachsigen Ellipsoids, bei der die Parameterlinien den Krümmungslinien entsprechen, wird in *elliptischen Flächenkoordinaten* angegeben. Es gilt: $u \equiv \mu$ und $v \equiv \nu$. (Vgl. Anhang B.4)

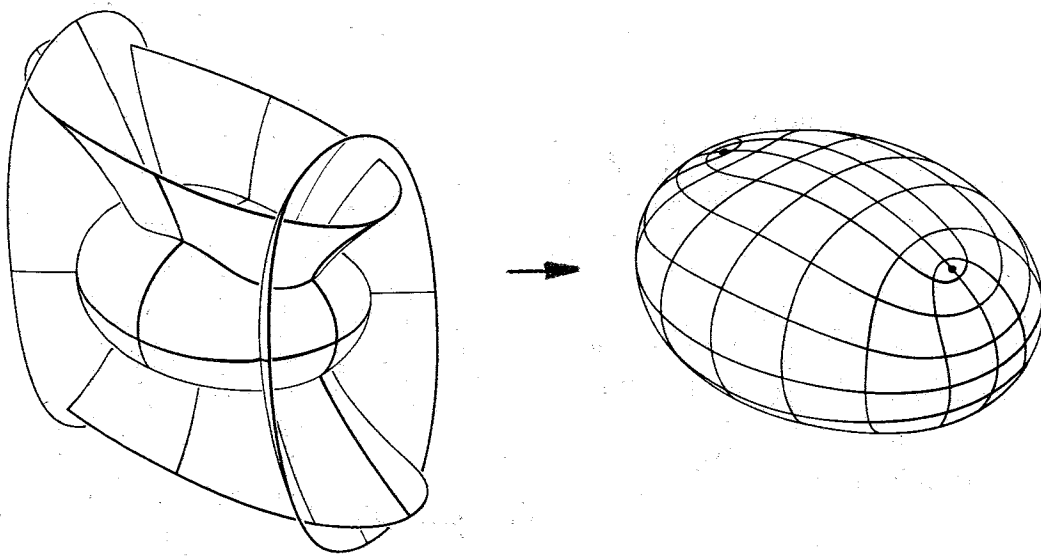


Abbildung 5: Krümmungslinien des dreiachsigen Ellipsoids

3 Das dreiachsige Ellipsoid als Referenzellipsoid

Noch genauer als es mit der Kugel oder dem Rotationsellipsoid als Referenzfläche möglich ist, kann die Erdfigur, die festgelegt wird durch die Äquipotentialfläche der Schwere im mittleren Meeresniveau, durch ein dreiachsiges Ellipsoid angenähert werden. Die Entfernung zwischen dem Massenmittelpunkt der Erde und dem Mittelpunkt eines bestangepaßten dreiachsigen Ellipsoids beträgt ungefähr 11 - 15 m, und die Achsen des Ellipsoids liegen relativ genau in den Richtungen der Hauptträgheitsachsen. Gegenüber dem Rotationsellipsoid wird eine um 65% bessere Anpassung erreicht [Eits].

Unter Verwendung von zahlreichen geodätischen, astronomisch-geodätischen und gravimetrischen Messungen von F.N. Krassowskij, Struve und A.A. Isotow konnte M.S.Zverev schon 1940 Zahlenwerte für ein dreiachsiges Referenzellipsoid angeben [Slh1], welche schon relativ nahe bei den von Eitschberger (1975) berechneten Zahlen liegen. Auch andere Himmelskörper wie z.B. der Mond der Erde, der Planet Mars oder Satelliten anderer Planeten lassen sich durch dreiachsige Ellipsoide approximieren. Einige Zahlenwerte wurden in Tabelle 1 zusammengestellt.

	a [km]	b [km]	c [km]	Λ_0	Quelle
Erde	6 378,245	6 378,0324	6 356,8630	+ 15°	Schliephake 1955
Erde	6 378,173435	6 378,1039	6 356,7544	- 14°53'42"	Eitschberger 1975
Mond	1 738,30	1 738,18	1 737,65		Wu 1981
Mars	3 394,6	3 393,3	3 376,3	- 105°	Wu 1981
Phobos	12,908	11,410	9,122		Burša 1989
Phobos	13,5	10,7	9,6		Burša 1988
Amalthea	135	82	75		Burša 1988
Io	1833	1822	1819		Burša 1988
Mimas	209,1	196,1	191,3		Burša 1988

Tabelle 1: Zahlenwerte für das dreiachsige Ellipsoid als Referenzellipsoid

a , b und c stellen die Längen der Hauptachsen des bestangepaßten Ellipsoids dar. Λ_0 entspricht der Richtung der 1. Hauptachse a bezüglich des 0°-Meridians. (Im Falle der Erde der 0°-Meridian von Greenwich.)

Bei der Verwendung des dreiachsigen Ellipsoids als Referenzfigur der Erde stellt sich das Problem der Zuordnung der Topologie der Erde zur Ellipsoidoberfläche. In Kapitel 3.1 werden die kartesischen Koordinaten eines Punktes der topographischen Oberfläche (X, Y, Z) in kartesische Koordinaten auf dem Rotationsellipsoid (x, y, z) transformiert, unter der Bedingung, daß der Abstand zwischen $P(X, Y, Z)$ und $p(x, y, z)$ minimal wird (*minimal distance mapping* [GrLo]).

In Kapitel 3.2 wird ein vollständiger Atlas der Erde in lokalen (kartesischen) Koordinaten hergeleitet, von denen ausgehend die verschiedenen Parametrisierungen des dreiachsigen Ellipsoids entwickelt werden können.

Ein minimaler Atlas in ellipsoidnormalen Koordinaten wird in Kapitel 3.3 berechnet.

3.1 Abbildung der topographischen Oberfläche auf das dreiachsige Referenzellipsoid

Die topographische Oberfläche der Erde, die in einem dreidimensionalen euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ eingebettet ist, soll Punkt für Punkt auf das Referenzellipsoid projiziert werden. Bei dieser Abbildung muß die Bedingung der eindeutigen Umkehrbarkeit erfüllt sein, so daß jedem Punkt der *sternförmigen* Topographie der Erde genau ein Punkt auf dem Ellipsoid zugeordnet wird, sowie umgekehrt jeweils genau ein zu einem Ellipsoidpunkt zugehöriger Punkt auf der Erdoberfläche existiert. Zur Berechnung einer solchen Abbil-

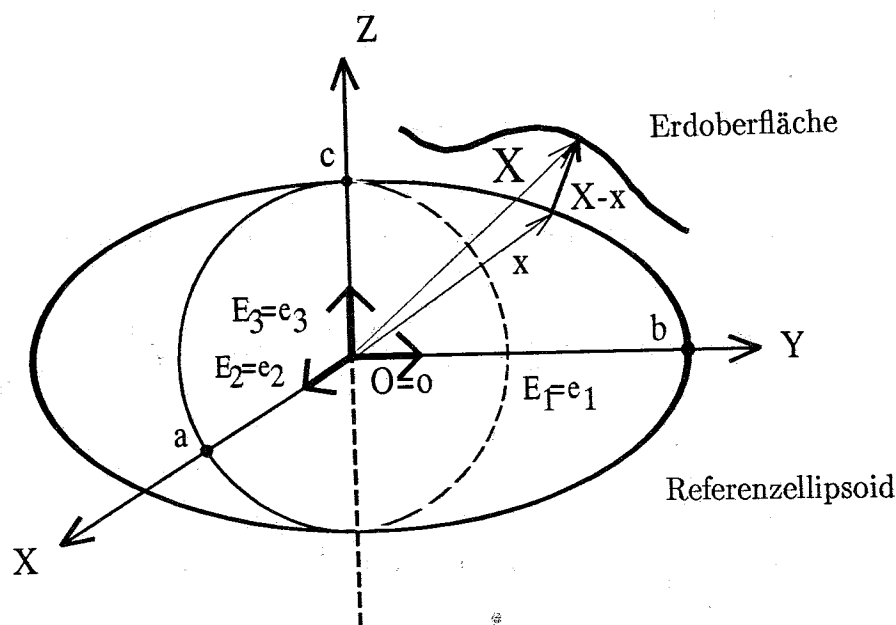


Abbildung 6: Zusammenhang zwischen den kartesischen Koordinaten eines Punktes auf der Erdoberfläche (X, Y, Z) und auf dem Referenzellipsoid (x, y, z)

dung kann folgende Extremwertaufgabe mit Nebenbedingung definiert werden: Es wird der Punkt $p(x, y, z)$ des Ellipsoids gesucht, zu dem ein Punkt $P(X, Y, Z)$ auf der Erdoberfläche minimalen Abstand hat, unter der Bedingung, daß p auf der Oberfläche des Referenzellipsoids liegt.

$$L(x, y, z, \lambda) = \|\mathbf{X} - \mathbf{x}\|^2 + \lambda \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right\} = \min \quad (12)$$

Mit $\mathbf{X}$ wird der Ortsvektor vom Ursprung des $\mathbb{R}^3$ zu einem Punkt P auf der topographischen Oberfläche der Erdfigur bezeichnet, während $\mathbf{x}$ dem Ortsvektor des Punktes p auf dem Ellipsoid entspricht. p ist der Schnittpunkt des Normalenvektors durch P mit dem Ellipsoid. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werden die Unbekannten (x, y, z, λ) mit

(x_1, x_2, x_3, x_4) bezeichnet.

Bekannt sind die Koordinaten (X, Y, Z) von Punkten auf der Erdoberfläche (z.B. durch Satellitenbeobachtungen), sowie die Ellipsoidhauptachsen a, b und c . Die *Lagrange-Funktion* L ist also abhängig von den vier Unbekannten x_1, x_2, x_3 und x_4 , welche den Koordinaten x, y, z des auf das Ellipsoid projizierten Punktes P und dem *Lagrange-Faktor* λ entsprechen.

Zu prüfen ist nun, ob die notwendige und die hinreichende Bedingung für die Existenz einer Lösung erfüllt ist. Die notwendige Bedingung beinhaltet, daß die ersten Ableitungen, die den *Normalgleichungen* entsprechen, gleich Null sein sollen; die hinreichende Bedingung verlangt, daß die *Hesse-Matrix* der 2.Ableitungen $H_3 = \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}, x_i, x_j \forall i, j = 1, 2, 3$ positiv-semi-definit sein muß, was der Fall ist, wenn die drei Eigenwerte $\Lambda_i \forall i = 1, 2, 3$ des charakteristischen Polynoms $|H - \Lambda I| = 0$ nicht negativ sind. Vgl. Gl.(17) [GrLo].

- Notwendige Bedingung (1.Ableitungen)

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{x}_4) = -2(X - \hat{x}_1) + 2\hat{x}_4 b^2 c^2 \hat{x}_1 = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{x}_4) = -2(Y - \hat{x}_2) + 2\hat{x}_4 a^2 c^2 \hat{x}_2 = 0 \quad (14)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{x}_4) = -2(Z - \hat{x}_3) + 2\hat{x}_4 a^2 b^2 \hat{x}_3 = 0 \quad (15)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_4}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{x}_4) = b^2 c^2 \hat{x}_1^2 + a^2 c^2 \hat{x}_2^2 + a^2 b^2 \hat{x}_3^2 - a^2 b^2 c^2 = 0 \quad (16)$$

Durch Auflösen der Gleichungen (13), (14) und (15) nach $\hat{x}_1, \hat{x}_2$ und $\hat{x}_3$ und Einsetzen in Gleichung (16) erhält man eine algebraische Gleichung 6.Grades für die Lösung des Lagrange-Faktors $\lambda (= x_4)$.

- Hinreichende Bedingung (2.Ableitungen)

$$|H_3| = \left| \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j} \right| = \begin{vmatrix} 1 + \hat{x}_4 b^2 c^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \hat{x}_4 a^2 c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \hat{x}_4 a^2 b^2 \end{vmatrix} \geq 0 \quad (17)$$

$$x_i, x_j \forall i, j = 1, 2, 3$$

Die Eigenwerte der H_3 -Matrix lassen sich sofort ablesen :

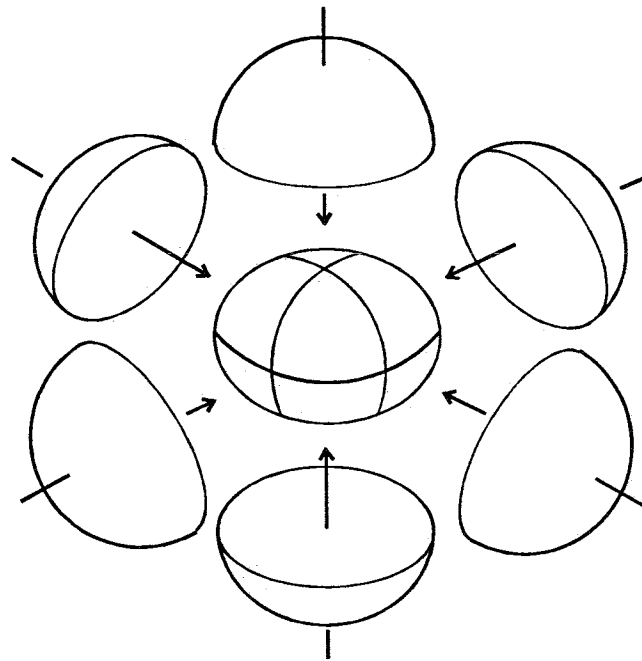
$$\Lambda_1 = 1 + \hat{x}_4 b^2 c^2, \Lambda_2 = 1 + \hat{x}_4 a^2 c^2 \text{ und } \Lambda_3 = 1 + \hat{x}_4 a^2 b^2.$$

3.2 Ein vollständiger Atlas des dreiachsigen Ellipsoids

Die abzubildende Mannigfaltigkeit $\mathbb{E}_{a,b,c}^3$ wird definiert durch

$$\mathbf{x} \in \mathbf{X} \equiv \mathbb{E}_{a,b,c}^3 := \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, a, b, c \in \mathbb{R}^+, a > b > c \}$$

Bei der Wahl von lokalen Koordinaten benötigt man genau sechs Karten, um alle Punkte des dreiachsigen Ellipsoids zu überdecken (vgl. Abb.7). [GrLo]



Abbildungung 7: Vollständiger Atlas des dreiachsigen Ellipsoids

1.Karte $U_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{E}_{a,b,c}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1, z > 0\}$
 Abbildungsgleichungen

$$\xi_1(\mathbf{x}) := \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix}$$

$$\chi_1(\mathbf{x}) = \xi_1^{-1}(\mathbf{x}) = (u_1, v_1, +c \sqrt{1 - (\frac{u_1^2}{a^2} + \frac{v_1^2}{b^2})})$$

$$\mathbf{x}(u_1, v_1) = u_1 \mathbf{e}_1 + v_1 \mathbf{e}_2 + c \sqrt{1 - (\frac{u_1^2}{a^2} + \frac{v_1^2}{b^2})} \mathbf{e}_3$$

Mit der Einschränkung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1, z > 0$ wurde das nördliche Halbellipsoid *ohne* Äquator abgebildet, um somit jede mögliche Singularität zu umgehen.

2.Karte $U_2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{E}_{a,b,c}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1, z < 0\}$
 Abbildungsgleichungen

$$\xi_2(\mathbf{x}) := \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$\chi_2(\mathbf{x}) = \xi_2^{-1}(\mathbf{x}) = (u_2, v_2, -c \sqrt{1 - (\frac{u_2^2}{a^2} + \frac{v_2^2}{b^2})})$$

$$\mathbf{x}(u_2, v_2) = u_2 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 - c \sqrt{1 - (\frac{u_2^2}{a^2} + \frac{v_2^2}{b^2})} \mathbf{e}_3$$

Die zweite Karte überdeckt das südliche Halbellipsoid ohne den Äquator.

3.Karte $U_3 := \{(x, y, z) \in \mathbb{E}_{a,b,c}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} < 1, y > 0\}$
Abbildungsgleichungen

$$\begin{aligned}\xi_3(\mathbf{x}) &:= \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} \\ \chi_3(\mathbf{x}) &= \xi_3^{-1}(\mathbf{x}) = (u_3, +b \sqrt{1 - (\frac{u_3^2}{a^2} + \frac{v_3^2}{c^2})}, v_3) \\ \mathbf{x}(u_3, v_3) &= u_3 \mathbf{e}_1 + b \sqrt{1 - (\frac{u_3^2}{a^2} + \frac{v_3^2}{c^2})} \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3\end{aligned}$$

Die dritte Karte überdeckt das östliche Halbellipsoid ohne den Null- bzw. 180°-Meridian.

4.Karte $U_4 := \{(x, y, z) \in \mathbb{E}_{a,b,c}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} < 1, y < 0\}$
Abbildungsgleichungen

$$\begin{aligned}\xi_4(\mathbf{x}) &:= \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} \\ \chi_4(\mathbf{x}) &= \xi_4^{-1}(\mathbf{x}) = (u_4, -b \sqrt{1 - (\frac{u_4^2}{a^2} + \frac{v_4^2}{c^2})}, v_4) \\ \mathbf{x}(u_4, v_4) &= u_4 \mathbf{e}_1 - b \sqrt{1 - (\frac{u_4^2}{a^2} + \frac{v_4^2}{c^2})} \mathbf{e}_2 + v_4 \mathbf{e}_3\end{aligned}$$

Die vierte Karte überdeckt das westliche Halbellipsoid ohne den Null- bzw. 180°-Meridian.

5.Karte $U_5 := \{(x, y, z) \in \mathbb{E}_{a,b,c}^3 \mid \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} < 1, x > 0\}$
Abbildungsgleichungen

$$\begin{aligned}\xi_5(\mathbf{x}) &:= \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_5 \\ v_5 \end{bmatrix} \\ \chi_5(\mathbf{x}) &= \xi_5^{-1}(\mathbf{x}) = (+b \sqrt{1 - (\frac{u_5^2}{b^2} + \frac{v_5^2}{c^2})}, u_5, v_5) \\ \mathbf{x}(u_5, v_5) &= +b \sqrt{1 - (\frac{u_5^2}{b^2} + \frac{v_5^2}{c^2})} \mathbf{e}_1 + u_5 \mathbf{e}_2 + v_5 \mathbf{e}_3\end{aligned}$$

Die fünfte Karte überdeckt die vordere Hälfte des Ellipsoids ohne den $\pm 90^\circ$ -Meridian.

6.Karte $U_6 := \{(x, y, z) \in \mathbb{E}_{a,b,c}^3 \mid \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} < 1, x < 0\}$
Abbildungsgleichungen

$$\xi_6(\mathbf{x}) := \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_6 \\ v_6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\chi_6(\mathbf{x}) &= \xi_6^{-1}(\mathbf{x}) = (-b \sqrt{1 - (\frac{u_6^2}{b^2} + \frac{v_6^2}{c^2})}, u_6, v_6) \\ \mathbf{x}(u_6, v_6) &= -b \sqrt{1 - (\frac{u_6^2}{b^2} + \frac{v_6^2}{c^2})} \mathbf{e}_1 + u_6 \mathbf{e}_2 + v_6 \mathbf{e}_3\end{aligned}$$

Die sechste Karte überdeckt die hintere Hälfte des Ellipsoids ohne den $\pm 90^\circ$ -Meridian.

3.3 Ein minimaler Atlas des dreiachsigen Ellipsoids

Ein minimaler Atlas mit zwei Karten kann in ellipsoidnormalen Koordinaten (vgl. Anhang B.1) angegeben werden.

Bijektive Abbildung des Ellipsoids in die erste Karte

$$\phi_I(\mathbf{x}) := \begin{bmatrix} L \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U^1 \\ V^1 \end{bmatrix}$$

$$\chi_I(\mathbf{x}) = \phi_I^{-1}(\mathbf{x}) = (f_1(L, B) \cos L \cos B, f_2(L, B) \sin L \cos B, f_3(L, B) \sin B)$$

$$\mathbf{x}_I(L, B) = \mathbf{e}_1 f_1(L, B) \cos L \cos B + \mathbf{e}_2 f_2(L, B) \sin L \cos B + \mathbf{e}_3 f_3(L, B) \sin B$$

Eingesetzt in die Ellipsoid-Gleichung

$$\mathbf{x}_I \in \mathbf{X} \equiv \mathbb{E}_{a,b,c}^3 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, a, b, c \in \mathbb{R}^+, a > b > c\}$$

kann mit $f_2(L, B) = (1 - e_{12}^2) f_1(L, B)$ und $f_3(L, B) = (1 - e_{13}^2) f_1(L, B)$

$$f_1(L, B) := \frac{a}{W} = \frac{a}{\sqrt{1 - e_{13}^2 \sin^2 B - e_{12}^2 \sin^2 L \cos^2 B}}$$

berechnet werden. Es ergibt sich bei Einsetzen von $f_1(L, B)$ in $\mathbf{x}_I(L, B)$ die Parametrisierung des dreiachsigen Ellipsoids in flächennormalen Koordinaten L und B .

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a \cos L \cos B}{\sqrt{1 - e_{13}^2 \sin^2 B - e_{12}^2 \sin^2 L \cos^2 B}} \\ \frac{a(1 - e_{12}^2) \sin L \cos B}{\sqrt{1 - e_{13}^2 \sin^2 B - e_{12}^2 \sin^2 L \cos^2 B}} \\ \frac{a(1 - e_{13}^2) \sin B}{\sqrt{1 - e_{13}^2 \sin^2 B - e_{12}^2 \sin^2 L \cos^2 B}} \end{bmatrix} \quad (18)$$

Die Umkehrfunktion kann dem Anhang B.1 entnommen werden.

Der gewählte Definitionsbereich $0 < L < 2\pi$ und $-\frac{\pi}{2} < B < +\frac{\pi}{2}$ schließt die beiden

Pole und den 0°-Meridian aus, um jeder möglichen Singularität zu entgehen.

Eine zweite Karte, die diese Bereiche überdeckt, komplettiert den minimalen Atlas. Durch zwei Drehungen des Koordinatensystems (x, y, z) mit den Einheitsvektoren $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ in (x^*, y^*, z^*) mit $(\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3^*)$ und die Einführung der *Metakoordinaten* (α, β) läßt sich eine zweite bijektive Abbildung herleiten.

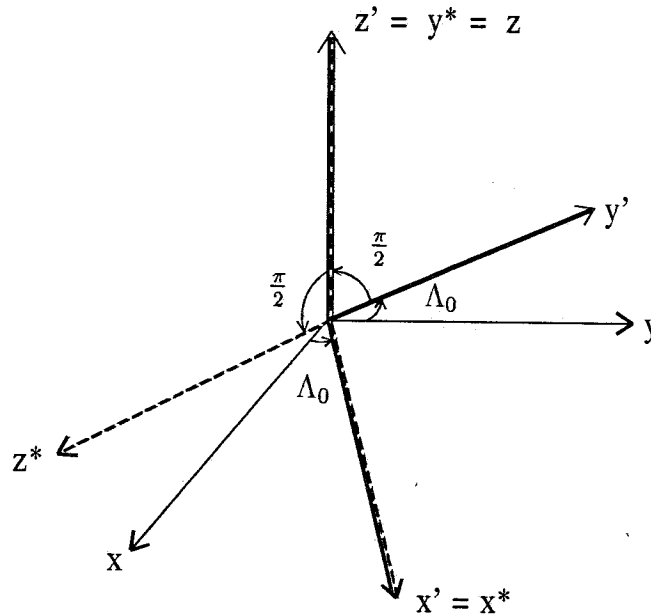


Abbildung 8: Zusammenhang der Koordinatensysteme (x, y, z) und (x^*, y^*, z^*) .

In Abbildung 8 wird der Übergang von (x, y, z) über (x', y', z') in (x^*, y^*, z^*) verdeutlicht.

$$1. \text{ Drehung : } [\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3] = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] R_3^T(\Lambda_0)$$

$$2. \text{ Drehung : } [\mathbf{e}^*_1, \mathbf{e}^*_2, \mathbf{e}^*_3] = [\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3] R_1^T\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow [\mathbf{e}^*_1, \mathbf{e}^*_2, \mathbf{e}^*_3] = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] R_3^T(\Lambda_0) R_1^T\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad (19)$$

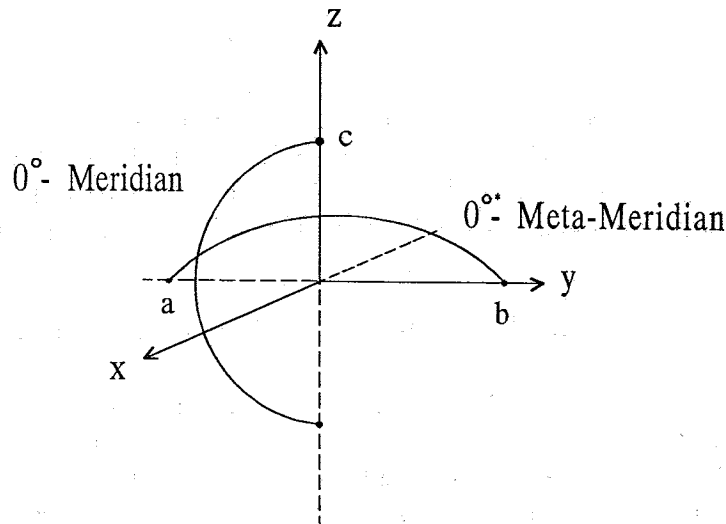
$$\Leftrightarrow [x^*, y^*, z^*] = [x, y, z] R_3^T(\Lambda_0) R_1^T\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad (20)$$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} \mathbf{e}^*_1 &= \cos \Lambda_0 \mathbf{e}_1 + \sin \Lambda_0 \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}^*_2 &= \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (21)$$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} \mathbf{e}^*_3 &= \sin \Lambda_0 \mathbf{e}_1 - \cos \Lambda_0 \mathbf{e}_2 \\ x^* &= \cos \Lambda_0 x + \sin \Lambda_0 y \\ y^* &= z \\ z^* &= \sin \Lambda_0 x - \cos \Lambda_0 y \end{aligned} \quad (22)$$

Wird Λ_0 im Bereich $90^\circ < \Lambda_0 < 180^\circ$ gewählt, haben beide Abbildungen keinen gemeinsamen singulären Punkt (vgl. Abb. 9).

Wird die Transformation (20) auf die quadratische Form des Ellipsoids angewandt, ergibt sich

Abbildung 9: Singuläre Punkte beider Abbildungen (mit $\Lambda_0 = 180^\circ$)

$$x^{*2} \left(\frac{\cos^2 \Lambda_0}{a^2} + \frac{\sin^2 \Lambda_0}{b^2} \right) + \frac{y^{*2}}{c^2} + z^{*2} \left(\frac{\sin^2 \Lambda_0}{a^2} + \frac{\cos^2 \Lambda_0}{b^2} \right) + x^* z^{*2} 2 \sin \Lambda_0 \cos \Lambda_0 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) = 1 \quad (23)$$

Theoretisch sollte Λ_0 im oben definierten Bereich frei wählbar sein; da aber nur im Fall $\Lambda_0 = 180^\circ$ die Ellipsoidhalbachsen in Richtung der Koordinatenachsen verlaufen und somit keine gemischten Glieder wie in Gl.(23) auftreten, wurde dieser spezielle Fall weiterverfolgt.

$$\Lambda_0 \stackrel{!}{=} 180^\circ \quad \frac{x^{*2}}{a^2} + \frac{y^{*2}}{c^2} + \frac{z^{*2}}{b^2} = 1 \quad (24)$$

Bijektive Abbildung des Ellipsoids in die zweite Karte

$$\phi_{II}(\mathbf{x}) := \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U^1 \\ V^2 \end{bmatrix}$$

$$\chi_{II}(\mathbf{x}) = \phi_{II}^{-1}(\mathbf{x}) = (f_1^*(\alpha, \beta) \cos \alpha \cos \beta, f_2^*(\alpha, \beta) \sin \alpha \cos \beta, f_3^*(\alpha, \beta) \sin \beta)$$

$$\mathbf{x}_{II}(\alpha, \beta) = \mathbf{e}_1^* f_1^*(\alpha, \beta) \cos \alpha \cos \beta + \mathbf{e}_2^* f_2^*(\alpha, \beta) \sin \alpha \cos \beta + \mathbf{e}_3^* f_3^*(\alpha, \beta) \sin \beta$$

Eingesetzt in die Ellipsoid-Gleichung

$$\mathbf{x}_{II} \in \mathbf{X} \equiv E_{a,b,c}^3 := \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^{*2}}{a^2} + \frac{y^{*2}}{c^2} + \frac{z^{*2}}{b^2} = 1, a, b, c \in \mathbb{R}^+, a > b > c \}$$

kann mit $f_2^*(\alpha, \beta) = (1 - e_{13}^2) f_1^*(\alpha, \beta)$ und $f_3^*(\alpha, \beta) = (1 - e_{12}^2) f_1^*(\alpha, \beta)$

$$f_1^*(\alpha, \beta) := \frac{a}{W^*} = \sqrt{1 - e_{12}^2 \sin^2 \beta - e_{13}^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \beta}$$

berechnet werden. Es ergibt sich bei Einsetzen von $f_1^*(\alpha, \beta)$ in $\mathbf{x}_{II}(\alpha, \beta)$ die Parametrisierung des dreiachsigen Ellipsoids in flächennormalen Metakoordinaten α und β .

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a \cos \alpha \cos \beta}{\sqrt{1 - e_{12}^2 \sin^2 \beta - e_{13}^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \beta}} \\ \frac{a(1 - e_{13}^2) \sin \alpha \cos \beta}{\sqrt{1 - e_{12}^2 \sin^2 \beta - e_{13}^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \beta}} \\ \frac{a(1 - e_{12}^2) \sin \beta}{\sqrt{1 - e_{12}^2 \sin^2 \beta - e_{13}^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \beta}} \end{bmatrix} \quad (25)$$

Definitionsbereich : $0 < \alpha < 2\pi$, $-\frac{\pi}{2} < \beta < +\frac{\pi}{2}$

Umkehrfunktion :

$$\begin{aligned} \alpha &= \arctan \left[\frac{1}{1 - e_{13}^2} \frac{y^*}{x^*} \right] && \text{für } x^* > 0 \\ &= \left(\arctan \left[\frac{1}{1 - e_{13}^2} \frac{y^*}{x^*} \right] \right) + \pi && \text{für } x^* < 0 \\ &= \operatorname{sgn} y^* \frac{\pi}{2} && \text{für } x^* = 0 \wedge y^* \neq 0 \\ &\text{nicht definiert} && \text{für } x^* = 0 \wedge y^* = 0 \\ \beta &= \arctan \left[\frac{1 - e_{13}^2}{1 - e_{12}^2} \frac{z^*}{\sqrt{(1 - e_{13}^2)x^{*2} + y^{*2}}} \right] && \text{für } x^* \neq 0 \vee y^* \neq 0 \\ &= \operatorname{sgn} z^* \frac{\pi}{2} && \text{für } (x^* = 0 \wedge y^* = 0) \wedge z^* \neq 0 \\ &\text{nicht definiert} && \text{für } x^* = 0 \wedge y^* = 0 \wedge z^* = 0 \end{aligned}$$

4 Geodätische Parallel- und Polarkoordinaten auf dem dreiachsigen Ellipsoid

In diesem Kapitel werden allgemeine Kenntnisse über die geometrischen und analytischen Eigenschaften der geodätischen Linie vorausgesetzt. Es wird ein Überblick über die Existenz von geodätischen Linien auf dem dreiachsigen Ellipsoid gegeben, um die daraus entwickelbaren geodätischen Parallel- und Polarkoordinaten ableiten zu können.

4.1 Geodätische Linien des dreiachsigen Ellipsoids

Geodätische Linien sind alle stetig gekrümmten Flächenkurven mit verschwindender geodätischer Krümmung $\kappa_g = 0$ (vgl. Anhang A.4). Sie können einfach geschlossen, geschlossen oder nicht geschlossen sein. Ihre Schmiegeebene steht in jedem Punkt orthogonal zur Tangentialebene der Fläche und enthält den lokalen Flächennormalenvektor, der dem Hauptnormalenvektor der Kurve (je nach Krümmung der Fläche) entweder entspricht oder genau entgegengesetzt ist. [Heck]

Das Bogenelement jeder beliebigen Kurve und somit auch der geodätischen Linie läßt sich in elliptischen Flächenkoordinaten beschreiben mit (vgl. Anhang B.4)

$$dS^2 = \frac{1}{4}(\mu - \nu) \left\{ \frac{\mu d\mu^2}{(a^2 - \mu)(b^2 - \mu)(c^2 - \mu)} - \frac{\nu d\nu^2}{(a^2 - \nu)(b^2 - \nu)(c^2 - \nu)} \right\} \quad (26)$$

Nach H. Schmehl [Sml1] ist für die geodätische Linie das Produkt des Abstands A des Ellipsoidmittelpunkts von der Horizontalebene eines Punktes P und des halben Durchmessers d , der dem Bogenelement ds parallel ist, konstant.

$$A \cdot d = \text{const.} \quad (27)$$

In einem Netz elliptischer Flächenkoordinaten (μ, ν) berechnen sich die quadratischen Kehrwerte von A und d mit

$$\begin{aligned} \frac{1}{A^2} &= \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} = \frac{\mu\nu}{a^2b^2c^2} \\ \frac{1}{d^2} &= \frac{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2}{a^2} + \frac{\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}{b^2} + \frac{\left(\frac{dz}{ds}\right)^2}{c^2} = \frac{\sin^2 \Theta}{\nu} + \frac{\cos^2 \Theta}{\mu} \end{aligned}$$

Analog der Gl.(27) gilt $\frac{1}{A^2} \cdot \frac{1}{d^2} = \text{const.}$, und nach Eliminieren des Nenners ergibt sich die Gleichung [Vie1], [Sml1], [Kli1]

$$\mu_0 \sin^2 \Theta + \nu_0 \cos^2 \Theta = \gamma = \text{const.},$$

welche für die geodätische Linie erfüllt ist, die von $P_0(\mu_0, \nu_0)$ ausgeht und mit der Parameterlinie $\nu = \nu_0 = \text{const.}$ den Winkel Θ bildet (vgl. Abb.10). γ ist der *Parameter der geodätischen Linie*.

Nach [Vie1], [Sml1] und [Kli1] gelten für die geodätische Linie und deren Bogenlänge die Gleichungen (28) und (29),

$$\frac{\mu d\mu}{\sqrt{R(\gamma, \mu)}} + \frac{\nu d\nu}{\sqrt{R(\gamma, \nu)}} = 0 \quad (28)$$

(mit $R(\gamma, x) = -x(a^2 - x)(b^2 - x)(c^2 - x)(\gamma - x)$ ($\nu < \gamma < \mu$))

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{-\mu}{4(a^2 - \mu)(b^2 - \mu)(c^2 - \mu)(\gamma - \mu)}} d\mu + \sqrt{\frac{-\nu}{4(a^2 - \nu)(b^2 - \nu)(c^2 - \nu)(\gamma - \nu)}} d\nu = 0$$

$$ds = \frac{1}{2} \frac{(\gamma - \mu)}{\sqrt{R(\gamma, \mu)}} d\mu + \frac{1}{2} \frac{(\gamma - \nu)}{\sqrt{R(\gamma, \nu)}} d\nu \quad (29)$$

$$\Leftrightarrow ds = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{-\mu(\gamma - \mu)}{4(a^2 - \mu)(b^2 - \mu)(c^2 - \mu)}} d\mu + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{-\nu(\gamma - \nu)}{4(a^2 - \nu)(b^2 - \nu)(c^2 - \nu)}} d\nu$$

die durch Integration in die Jacobischen Gleichungen

$$\int_{\mu_1}^{\mu_2} \frac{\mu d\mu}{\sqrt{R(\gamma, \mu)}} + \int_{\nu_1}^{\nu_2} \frac{\nu d\nu}{\sqrt{R(\gamma, \nu)}} = 0 \quad (30)$$

$$s = \frac{1}{2} \int_{\mu_1}^{\mu_2} \frac{(\gamma - \mu)}{\sqrt{R(\gamma, \mu)}} d\mu + \frac{1}{2} \int_{\nu_1}^{\nu_2} \frac{(\gamma - \nu)}{\sqrt{R(\gamma, \nu)}} d\nu \quad (31)$$

übergehen. $P_1(\mu_1, \nu_1)$ und $P_2(\mu_2, \nu_2)$ beschreiben die Endpunkte der geodätischen Linie.

Zum Verlauf der geodätischen Linien sei folgendes angemerkt :

Mit Ausnahme der Hauptschnitte sind weder die Krümmungslinien 1. bzw. 2. Art noch die Breiten- bzw. Längengleichenen der geographischen (ellipsoidnormalen) Koordinaten geodätische Linien. Jede Geodätische schneidet den 0° -Meridian [Sml1], der in Richtung der 1. Halbachse des Ellipsoids definiert ist.

Die geodätischen Linien des dreiachsigen Ellipsoids werden in drei Fälle unterteilt, je nachdem, ob sie den 0° -Meridian

- Fall 1 : im Äquator oder zwischen dem Äquator und einem Kreispunkt,
- Fall 2 : in einem der Kreispunkte oder
- Fall 3 : in einem Pol oder zwischen einem Pol und einem Kreispunkt

schneiden. Die drei Hauptschnitte (Kap.2.1) schneiden aus dem Ellipsoid drei einfach geschlossene geodätische Linien heraus, wobei die des 1. Hauptschnittes $z = 0$ dem Fall 1, die des 2. Hauptschnittes $y = 0$ allen drei Fällen und die des 3. Hauptschnittes $x = 0$ dem Fall 3 angehören. Letztere ist gleichzeitig die kürzeste aller Geodätischen auf dem dreiachsigen Ellipsoid.

Es läßt sich die Gleichung(27) auch in ellipsoidnormalen Koordinaten (L, B) und dem Azimut α der geodätischen Linie schreiben (vgl. Abb. 10).

$$\begin{aligned} \frac{1}{A^2} &= \frac{1}{a^2 W^2} = \frac{1}{a^2 (1 - e_{13}^2 \sin^2 B - e_{12}^2 \cos^2 B \sin^2 L)} \\ \frac{1}{d^2} &= \frac{(\sin B \cos L \cos \alpha + \sin L \sin \alpha)^2}{a^2} + \frac{(\sin B \sin L \cos \alpha - \cos L \sin \alpha)^2}{b^2} + \frac{\cos^2 B \cos^2 \alpha}{c^2} \end{aligned}$$

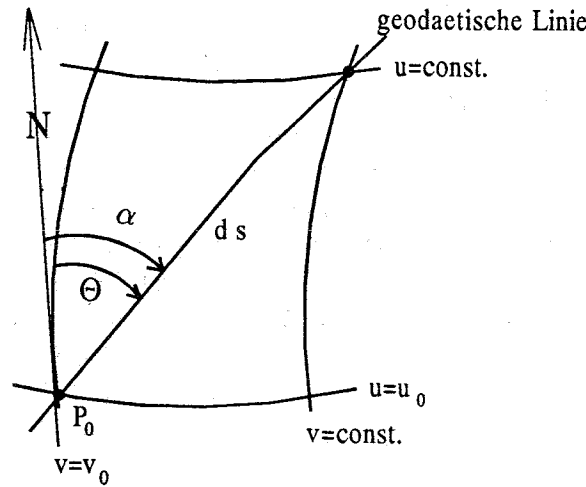


Abbildung 10: Geodätische Linie

Für die geodätische Linie auf dem dreiaxigen Ellipsoid gilt somit

$$\begin{aligned}
 S(\alpha, L, B) &= \frac{(1 - e_{13}^2)(1 - e_{12}^2 \sin^2 L) \sin^2 \alpha}{(1 - e_{12}^2)W^2} \\
 &\quad - \frac{(1 - e_{13}^2)e_{12}^2 \sin B \sin L \cos L \sin 2\alpha}{(1 - e_{12}^2)W^2} \\
 &\quad + \frac{(W^2 - e_{12}^2(1 - e_{13}^2 \sin^2 B) \cos^2 L) \cos^2 \alpha}{(1 - e_{12}^2)W^2} \\
 &= C = \text{const.}
 \end{aligned} \tag{32}$$

Im Gegensatz zum Rotationsellipsoid schneidet die geodätische Linie des dreiaxigen Ellipsoids ein und denselben Breitenkreis nicht mehr unter gleichem Winkel. Wird der 0°-Meridian von einer geodätischen Linie in der Breite B_0 unter dem Azimut α_0 geschnitten, ergibt sich aus (32)

$$S(\alpha_0, 0, B_0) = 1 + \left[\frac{(1 - e_{13}^2)}{(1 - e_{12}^2)(1 - e_{13}^2 \sin^2 B_0)} - 1 \right] \sin \alpha_0 = C = \text{const.}$$

- Im Fall 1 ist

$$0 \leq \sin^2 B_0 < \frac{e_{13}^2 - e_{12}^2}{e_{13}^2(1 - e_{12}^2)} : \frac{1 - e_{13}^2}{1 - e_{12}^2} \leq C < 1.$$

Die Geodätischen oszillieren um die z -Achse in der durch $b^2 \geq \mu \geq c^2$ (vgl. Gl.(8)) gebildeten Zone zwischen den beiden Krümmungslinien $\mu = \pm \gamma$, die jeweils nur berührt werden.

(μ, ν : ellipt. Flächenkoordinaten, die dem Verlauf der Krümmungslinien des dreiaxigen Ellipsoids entsprechen; γ : Parameter der geodätischen Linie)

- Für Fall 3 gilt

$$\frac{e_{13}^2 - e_{12}^2}{e_{13}^2(1 - e_{12}^2)} < \sin^2 B_0 \leq 1 : 1 < C \leq \frac{1}{1 - e_{12}^2}.$$

Die geodätischen Linien oszillieren um die x -Achse in der durch $a^2 \geq \nu \geq b^2$ (vgl. Gl.(9)) gebildeten Zone zwischen den beiden Krümmungslinien $\nu = \pm\gamma$.

- Im Fall 2 ist

$$\sin^2 B_0 = \frac{e_{13}^2 - e_{12}^2}{e_{13}^2(1 - e_{12}^2)} : C = 1 .$$

Die geodätischen Linien verlaufen durch zwei gegenüberliegende Nabelpunkte und nähern sich dem Hauptschnitt $y = 0$ an. Diese Linien sind nicht geschlossen [Vie1].

Ein voller Umlauf der Linien um die Fläche wird als *Windung*, eine volle Schwingung bezüglich des Hauptschnittes als *Oszillation* bezeichnet. Voraussetzung für eine geschlossene geodätische Linie in den Fällen 1 und 3 ist, daß das Verhältnis (ω) der Oszillationen (m) zu den Windungen (n) rational ist $\omega = m : n$ mit $m, n \in \mathbb{N}$. Bei ganzzahligem ω handelt es sich um eine einfach geschlossene Geodätische.

Sämtliche Herleitungen und Beweise für die Existenz und den Verlauf geodätischer Linien auf dem dreiachsigen Ellipsoid werden z.B. bei W.Klingenberg [Kli1] H.Viesel [Vie1] oder H.Schmehl [Sml1], [Sml2] ausführlich beschrieben.

Schmehl arbeitet vorwiegend mit den ellipsoidnormalen Parametern (L, B) , im Gegensatz zu Klingenberg und Viesel, die elliptische Flächenkoordinaten (μ, ν) und elliptisch-trigonometrische Koordinaten (ψ, φ) bevorzugen.

Die Differentialgleichung der geodätische Linie auf dem dreiachsigen Ellipsoid läßt sich mit Hilfe der Christoffelsymbole (vgl. Anhang A.9) bestimmen [Gra4], [Gra3], [Gros]. Die allgemeine Differentialgleichung einer geodätischen Linie in einem orthogonalen Parameternetz lautet

$$u''^\beta + \Gamma_\alpha^\beta{}_\gamma u'^\alpha u'^\gamma = 0 \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2 \quad (33)$$

In elliptischen Flächenkoordinaten ergeben sich mit Anhang B.4 zwei Differentialgleichungen 2.Ordnung

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mu}{ds^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{2\mu-\nu}{\mu(\mu-\nu)} + \frac{1}{a^2-\mu} + \frac{1}{b^2-\mu} + \frac{1}{c^2-\mu} \right) \left(\frac{d\mu}{ds} \right)^2 - \frac{1}{\mu-\nu} \frac{d\mu}{ds} \frac{d\nu}{ds} - \\ - \frac{1}{2} \frac{\nu}{\mu(\nu-\mu)} \frac{(a^2-\mu)(b^2-\mu)(c^2-\mu)}{(a^2-\nu)(b^2-\nu)(c^2-\nu)} \left(\frac{d\nu}{ds} \right)^2 = 0 \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \nu}{ds^2} - \frac{1}{2} \frac{\mu}{\nu(\mu-\nu)} \frac{(a^2-\nu)(b^2-\nu)(c^2-\nu)}{(a^2-\mu)(b^2-\mu)(c^2-\mu)} \left(\frac{d\nu}{ds} \right)^2 - \frac{1}{\nu-\mu} \frac{d\mu}{ds} \frac{d\nu}{ds} + \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{2\nu-\mu}{\nu(\nu-\mu)} + \frac{1}{a^2-\nu} + \frac{1}{b^2-\nu} + \frac{1}{c^2-\nu} \right) \left(\frac{d\mu}{ds} \right)^2 = 0 , \end{aligned} \quad (35)$$

die nach [Gros] in drei Differentialgleichungen 1.Ordnung umgewandelt werden können, wobei α der Richtungswinkel der geodätischen Linie ist.

$$\mu' = \frac{d\mu}{ds} = 2 \sqrt{\frac{(a^2-\nu)(b^2-\nu)(c^2-\nu)}{\nu(\nu-\mu)}} \cos \alpha \quad (36)$$

$$\nu' = \frac{d\nu}{ds} = 2 \sqrt{\frac{(a^2-\mu)(b^2-\mu)(c^2-\mu)}{\mu(\mu-\nu)}} \sin \alpha \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \alpha' = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{-1}{\mu-\nu} \left(\sqrt{\frac{(a^2-\mu)(b^2-\mu)(c^2-\mu)}{\mu(\mu-\nu)}} \cos \alpha + \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{(a^2-\nu)(b^2-\nu)(c^2-\nu)}{\nu(\nu-\mu)}} \sin \alpha \right) \end{aligned} \quad (38)$$

4.2 Geodätische Polarkoordinaten

Eine der Hauptaufgaben der Landesvermessung ist, geographische (ellipsoidnormale), rechtwinklige und Polarkoordinaten ineinander überzuführen. Beobachtet werden Strecken und Winkel (also Polarkoordinaten); kleine Flächen werden in rechtwinkligen, große Flächen in geographischen Koordinaten koordiniert.

Ein geodätisches Polarkoordinatensystem wird von einem *Büschel geodätischer Linien*, ausgehend von einem festen Flächenpunkt P_0 , und deren *Orthogonaltrajektorien* erzeugt. Die Orthogonaltrajektorien, die auch *geodätische Kreise* genannt werden, sind geschlossene aber nicht immer ebene Kurven.

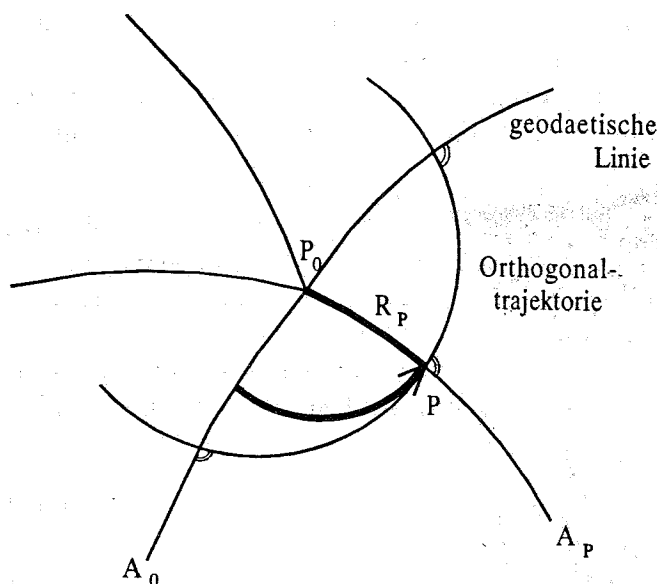


Abbildung 11: Geodätische Polarkoordinaten

Die Lage eines anderen Flächenpunktes P wird durch die Länge R der geodätischen Linie und deren Azimut A gegenüber einer vorgegebenen Anfangsrichtung in P_0 festgelegt.

$$u^1 = A \quad u^2 = R$$

Die u^2 -Linien $A = \text{const.}$ (geodätische Linien) und die u^1 -Linien $R = \text{const.}$ schneiden sich unter rechten Winkeln, so daß das Bogenelement sich zu

$$ds^2 = m^2 dA^2 + dR^2$$

mit $g_{11} = m^2, g_{12} = 0, g_{22} = 1$ ergibt.

Von großem Interesse wäre die Lösung der Unbekannten m , die nach *E.B. Christoffel* auch *reduzierte Länge* der geodätischen Linie bezeichnet wird.

Wie bei der Kugel und beim Rotationsellipsoid kann ein geodätisches Polarkoordinatensystem auf einem dreiachsigen Ellipsoid an jeder beliebigen Stelle festgelegt werden. Besonders anschaulich wäre die Wahl von P_0 in einem der vier Nabelpunkte (vgl. Kap.4.1, Fall 2). Die Orthogonaltrajektorien verlaufen in ebenen Kurven und entsprechen genau den Kreisschnitten (vgl. Kap.2.2).

4.3 Geodätische Parallelkoordinaten

Das geodätische *Parallelkoordinatensystem* ist ein rechtwinkliges System, welches zur Koordinierung lokaler Flächen verwendet wird. Parallelkoordinaten haben metrische Einheiten und sind gegen Krümmungsänderungen unempfindlich. [Gros]

Der durch den Koordinatenanfangspunkt $P_0(x = 0, y = 0)$ verlaufende Meridian wird als Ordinatenlinie definiert. Durch den zu koordinierenden Punkt P wird eine geodätische Linie gelegt, die die Ordinate rechtwinklig in P_f schneidet.

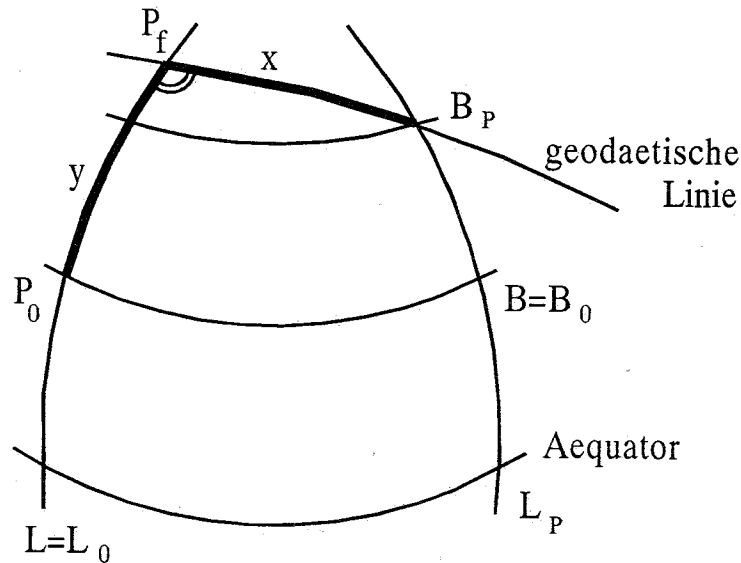


Abbildung 12: Geodätische Parallelkoordinaten

Die Lage des Flächenpunktes P ist somit eindeutig durch die Bogenlängen $x = \widehat{P_f P}$ und $y = \widehat{P_0 P_f}$ festgelegt, wobei der Wert der Ordinate y von P_0 ausgehend nach Norden, der Wert der Abszisse x von P_f ausgehend nach Osten gezählt wird.

$$u^1 = x \quad u^2 = y$$

Das Bogenelement ergibt sich zu

$$ds^2 = dx^2 + n^2 dy^2$$

mit $g_{11} = 1, g_{12} = 0, g_{22} = n^2$.

Für den *Abszissenverjüngungsfaktor* n sollte mit Hilfe von Differentialgleichungen eine Formel gefunden werden.

5 Kartenprojektionen (Kartennetzentwürfe)

Die Aufgabe der Kartenprojektionslehre (Kartennetzentwurfslehre) ist es, *Netzklinien und Punkte eines Koordinatensystems von der exakt definierten Oberfläche eines Weltkörpers nach bestimmten Regeln so in die Ebene abzubilden, daß sie dort ein geeignetes geometrisches Gerüst für kartographische Darstellungen sind*. [Hake]

Eine absolut optimale Abbildung hätte die Eigenschaften der Winkeltreue (Konformität), der Flächentreue (Äquivalenz) und der Längentreue (Äquidistanz) in sich vereinigt. Eine Fläche mit einer Gauß'schen Krümmung ungleich Null kann jedoch *nicht* verzerrungsfrei in die Ebene abgebildet werden [Kli1]. Die Abbildung einer Kugel- oder Ellipsoidfläche (ob zwei- oder dreiaxsig) in eine Ebene kann also nie alle drei Eigenschaften gleichzeitig erfüllen. Es ist nur möglich, entweder konforme oder flächentreue oder äquidistante (längentreu in bestimmten Richtungen oder längs vorgegebener Linien) abzubilden. Im Verlauf dieser Arbeit soll daher zwischen konformen, flächentreuen, speziell äquidistant und vermittelnden (ohne besondere Eigenschaften) Abbildungen unterschieden werden.

Des weiteren können die Parametersysteme der abzubildenden Oberfläche (Urbild) und der Ebene (Bild) in verschiedene Kategorien unterteilt werden. Parametersysteme können beliebig, orthogonal oder isometrisch (vgl. Anhang A.10) sein. Wie allgemein bekannt, lassen sich die Formeln der Abbildung bzw. die der Abbildungseigenschaften unter Verwendung isometrischer Netze stark vereinfachen. Aus diesem Grunde werden den Formeln der verschiedenen Abbildungseigenschaften die Gleichungen zur Berechnung eines isometrischen Netzes aus einem beliebigen Parameternetz vorangestellt.

5.1 Kurze Formelsammlung

5.1.1 Isometrische Netze

Jedes beliebige Netz einer Riemannschen Mannigfaltigkeit läßt sich mit Hilfe von Differentialgleichungen auf ein isometrisches Netz zurückführen [Stru]. Sei $f : U \leftarrow \mathbb{R}^3$ eine (Urbild-) Fläche, parametrisiert in $\{u^1, v^1\} = \{u, v\} \in U$. Die isometrischen Parameter $\{u^2, v^2\} = \{p, q\} \in U$ sind Lösungen der Differentialgleichungen

$$\begin{bmatrix} p_u \\ p_v \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{G_{uu}G_{vv} - G_{uv}^2}} \begin{bmatrix} -G_{uv} & G_{uu} \\ -G_{vv} & G_{uv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_u \\ q_v \end{bmatrix} \quad (39)$$

bzw.

$$\begin{bmatrix} q_u \\ q_v \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{G_{uu}G_{vv} - G_{uv}^2}} \begin{bmatrix} G_{uv} & -G_{uu} \\ G_{vv} & -G_{uv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_u \\ p_v \end{bmatrix}. \quad (40)$$

Für die isometrischen Koordinaten (p, q) muß die Integrabilitätsbedingung erfüllt sein.

$$q_{uv} - q_{vu} = 0$$

$$p_{uv} - p_{vu} = 0$$

Es lassen sich mit

$$\Delta p = q_{uv} - q_{vu}$$

$$\Delta q = p_{uv} - p_{vu}$$

die Laplace-Beltrami-Differentialgleichungen aufstellen :

$$\Delta p := \left(\frac{G_{uu} p_v - G_{uv} p_u}{\sqrt{G_{uu} G_{vv} - G_{uv}^2}} \right)_v + \left(\frac{G_{vv} p_u - G_{uv} p_v}{\sqrt{G_{uu} G_{vv} - G_{uv}^2}} \right)_u = 0 \quad (41)$$

bzw.

$$\Delta q := \left(\frac{G_{uu} q_v - G_{uv} q_u}{\sqrt{G_{uu} G_{vv} - G_{uv}^2}} \right)_v + \left(\frac{G_{vv} q_u - G_{uv} q_v}{\sqrt{G_{uu} G_{vv} - G_{uv}^2}} \right)_u = 0 \quad (42)$$

deren Lösung für die DGN (39) bzw. (40) *notwendig* aber *nicht* hinreichend ist.

Δ ist der Laplace-Beltrami-Operator. Funktionen, die die Gleichungen $\Delta p(u, v) = 0$ bzw. $\Delta q(u, v) = 0$ erfüllen, heißen *harmonische Funktionen*.

G_{uu} , G_{uv} und G_{vv} stellen die Elemente des Metrikensors der Urbildparametrisierung (u, v) dar. Die Gleichungen (39) und (40) können auch als Abbildungsgleichungen eines beliebigen Parameternetzes auf ein isometrisches Parameternetz angesehen werden. Isometrische Parameter liegen vor, wenn für die Differentialgleichungen (39), (40) und (41), (42) eine *eindeutige* Lösung gefunden werden kann.

5.1.2 Konforme Abbildungen

Die Längenverzerrung Λ , die bei konformen Abbildungen in allen Richtungen gleich groß ist, wird gebildet durch

$$\Lambda^2 = \frac{d s^2}{d S^2} = \frac{g_{kl} d u^k d u^l}{G_{KL} d U^K d U^L} = \frac{c_{KL} d U^K d U^L}{G_{KL} d U^K d U^L} = \frac{g_{kl} d u^k d u^l}{C_{kl} d u^k d u^l} \quad (43)$$

Mit $d s^2 = \Lambda^2 \cdot d S^2$ ergeben sich die Zusammenhänge

$$c_{11} = \Lambda^2 \cdot G_{11}, \quad c_{12} = \Lambda^2 \cdot G_{12}, \quad c_{22} = \Lambda^2 \cdot G_{22} \quad (44)$$

in den Parametern (KL) des Urbildes, sowie

$$g_{11} = \Lambda^2 \cdot C_{11}, \quad g_{12} = \Lambda^2 \cdot C_{12}, \quad g_{22} = \Lambda^2 \cdot C_{22} \quad (45)$$

in den Parametern (kl) des Bildes, aus denen zwei Gleichungen abgeleitet werden können, die bei konformen Abbildungen erfüllt sein müssen.

$$\boxed{\frac{c_{11}}{c_{22}} = \frac{G_{11}}{G_{22}}} \quad \boxed{\frac{c_{11}}{c_{12}} = \frac{G_{11}}{G_{12}}} \quad (46)$$

in den Parametern (KL) des Urbildes, sowie analog

$$\boxed{\frac{g_{11}}{g_{22}} = \frac{C_{11}}{C_{22}}} \quad \boxed{\frac{g_{11}}{g_{12}} = \frac{C_{11}}{C_{12}}} \quad (47)$$

in den Parametern (kl) des Bildes.

Bei orthogonalen Urbild- (KL) und Bildparameternetzen (kl) fallen die Fortschreitungsrichtungen der Parameterlinien mit den Hauptstreckungsrichtungen Λ_1 und Λ_2 zusammen, und es vereinfachen sich die Gleichungen (46) zu

$$\boxed{\frac{c_{11}}{c_{22}} = \frac{G_{11}}{G_{22}}} \quad \boxed{c_{12} = 0} \quad (48)$$

Ausgeschrieben (vgl. Anhang A.8) ergibt sich

$$\frac{\partial u}{\partial U} = \sqrt{\frac{G_{11}}{G_{22}}} \frac{\partial v}{\partial V} \quad \frac{\partial u}{\partial V} = \sqrt{\frac{G_{22}}{G_{11}}} \frac{\partial v}{\partial U} \quad (49)$$

Im Falle zweier isometrischer Netze gilt $G_{11} = G_{22}$, und es reduzieren sich die Gleichungen (48) zu

$$\boxed{\frac{c_{11}}{c_{22}} = 1} \quad \boxed{c_{12} = 0}. \quad (50)$$

Durch Einsetzen der c_{KL} -Elemente und unter Berücksichtigung einer orientierungstreuen Abbildung [Kli2], für welche $|\frac{\partial u^k}{\partial U^k}| > 0$ gilt, ergeben sich die *CAUCHY-RIEMANN-Differentialgleichungen*

$$\frac{\partial u}{\partial U} = \frac{\partial v}{\partial V} \quad \frac{\partial u}{\partial V} = -\frac{\partial v}{\partial U} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial P} = \frac{\partial q}{\partial Q} \quad \frac{\partial p}{\partial Q} = -\frac{\partial q}{\partial P} \quad (51)$$

Die Vereinfachungen gelten analog auch für die g_{kl} und C_{kl} im Bild.

5.1.3 Flächentreue Abbildung

Eine flächentreue Abbildung liegt vor, wenn das Produkt der beiden Hauptverzerrungen gleich eins ist ($\Lambda_1 \cdot \Lambda_2 = 1$) oder wenn äquivalent gilt

$$|c_{KL}| = |G_{KL}|. \quad (52)$$

Unter Verwendung von $c_{KL} = g_{kl} \frac{\partial u^k}{\partial U^K} \frac{\partial u^l}{\partial U^L}$ ergibt sich

$$\boxed{|u_K^k|^2 = \frac{|G_{KL}|}{|g_{kl}|}}, \quad (53)$$

wobei die negative Determinante von u_K^k auf Grund der Orientierungstreue [Kli2] als Lösung nicht verwendet wird. Für flächentreue Abbildungen gilt somit

$$\boxed{|u_K^k| = +\sqrt{\frac{|G_{KL}|}{|g_{kl}|}} = \frac{\partial u^1}{\partial U^1} \frac{\partial u^2}{\partial U^2} - \frac{\partial u^1}{\partial U^2} \frac{\partial u^2}{\partial U^1} = \sqrt{\frac{G_{11}G_{22} - G_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}}} \quad (54)$$

5.1.4 Äquidistante Abbildung

Bei äquidistanten, d.h. auf speziellen Koordinatenlinien längentreuen, Abbildungen wird eine ausgezeichnete Richtung bzw. eine Schar von Kurven verzerrungsfrei abgebildet. In der Kartenprojektionslehre wird meist versucht, Meridianbögen, die im Falle der Kugel und des Rotationsellipsoids Großkreise darstellen, oder Hauptkrümmungslinien, die im

Fälle der Kugel mit den Meridianen zusammenfallen, äquidistant abzubilden.

Für die äquidistante Abbildung der Meridianbögen ($U^1 = \text{const.}$) des dreiachsigen Ellipsoids ergibt sich mit $dU^1 = 0$

$$\Lambda = k = \sqrt{\frac{c_{22}}{G_{22}}} = 1 \quad (55)$$

5.2 Parametersysteme auf dem dreiachsigen Ellipsoid und in der Bildebene

Wie schon zu Beginn dieses Kapitels angedeutet, können sowohl die Parametrisierungen des abzubildenden Ellipsoids als auch die zugehörigen Bildparametrisierungen in zwei Kategorien unterteilt werden. Die erste Kategorie umfaßt die ellipsoidnormalen, -zentrischen und kugelreduzierten Koordinaten, welche die Gemeinsamkeit besitzen, daß die Ebenen, in denen die jeweiligen Längengleichen liegen, die z -Achse enthalten (vgl. Anhang B).

Ellipsoidnormale Koordinaten :

$$\begin{aligned} X(L, B) &= \frac{a}{W} \{ \cos B \cos L \mathbf{e}_1 + (1 - e_{12}^2) \cos B \sin L \mathbf{e}_2 + (1 - e_{13}^2) \sin B \mathbf{e}_3 \} \\ W(L, B) &= \{ 1 - e_{13}^2 \sin^2 B - e_{12}^2 \cos^2 B \sin^2 L \}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Ellipsoidzentrische Koordinaten :

$$\begin{aligned} X(\lambda, \varphi) &= r(\lambda, \varphi) \{ \cos \varphi \cos \lambda \mathbf{e}_1 + \cos \varphi \sin \lambda \mathbf{e}_2 + \sin \varphi \mathbf{e}_3 \} \\ r(\lambda, \varphi) &= a \sqrt{(1 - e_{12}^2)(1 - e_{13}^2)} \{ 1 - e_{13}^2 \cos^2 \varphi - e_{12}^2 \sin^2 \varphi - e_{12}^2 (1 - e_{13}^2) \cos^2 \lambda \cos^2 \varphi \}^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Kugelreduzierte Koordinaten :

$$\begin{aligned} X(\Lambda, \Phi) &= \{ a \cos \Phi \cos \Lambda \mathbf{e}_1 + b \cos \Phi \sin \Lambda \mathbf{e}_2 + c \sin \Phi \mathbf{e}_3 \} \\ b &= a \sqrt{1 - e_{12}^2} \quad c = a \sqrt{1 - e_{13}^2} \end{aligned}$$

Transformationen :

$$\begin{aligned} \tan \lambda &= (1 - e_{12}^2) \tan L & \tan \varphi &= \frac{(1 - e_{13}^2)}{\sqrt{\cos^2 L + (1 - e_{12}^2) \sin^2 L}} \tan B \\ \tan \lambda &= \sqrt{1 - e_{12}^2} \tan \Lambda & \tan \varphi &= \frac{\sqrt{1 - e_{13}^2}}{\sqrt{1 - e_{12}^2 \sin^2 \Lambda}} \tan \Phi \\ \tan \Lambda &= \sqrt{1 - e_{12}^2} \tan L & \tan \Phi &= \frac{\sqrt{1 - e_{13}^2}}{\sqrt{1 - e_{12}^2 \sin^2 L}} \tan B \end{aligned}$$

Als Bildparameter werden die Polarkoordinaten α und r gewählt, die ein orthogonales (nicht isometrisches) Netz bilden. Die *azimutale Abbildung* wird wie folgt definiert :

- In einem Punkt P der abzubildenden Fläche wird eine Tangentialebene durch die beiden Tangentenrichtungen der Urbild-Parameterlinien U und V aufgespannt und eine bestimmte Umgebung des Punktes P auf diese Ebene abgebildet.

- Die u - und v -Parameterlinien des Bildes werden mit den Polarkoordinaten α und r festgelegt.
- Die r -Linien schneiden sich in einem Punkt, dem Berührungspunkt P .
- Es existieren keine weiteren Schnittpunkte der r -Linien im vorgegebenen Bildbereich.
- Durch jeden Punkt der Bildfläche geht genau eine Kurve dieser Schar.
- Die α -Linien der 2. Kurvenschar schneiden die r -Linien unter rechten Winkeln.
- Die α -Linien selbst schneiden sich im vorgegebenen Bereich nie.
- Durch jeden Punkt der Bildfläche geht genau eine Kurve dieser Schar.
- Im vorgegebenen Bereich hat jede Kurve der 2. Schar genau einen Schnittpunkt mit einer Kurve der 1. Schar.
- Durch jeden Punkt der Bildfläche gehen genau zwei Parameterlinien, die sich unter rechten Winkeln schneiden.

Für die Abbildung der Kugel und des Rotationsellipsoids auf eine Tangentialebene lassen sich die azimutalen Abbildungen in echte und unechte (pseudo-) azimutale Abbildungen unterteilen. Echte azimutale Abbildungen zeichnen sich dadurch aus, daß jeweils ein Bildparameter nur von einem Urbildparameter abhängt (vgl. Gl.(56)). Liegt die Tangentialebene im Nord- oder Südpol (kreisförmiger Äquator) werden im Bild die r -Linien als Geraden, die α -Linien als konzentrische Kreise abgebildet werden (vgl. Abb. 13). Bei den unechten azimutalen Abbildungen, deren Parameter von beiden Urbildparametern abhängen können, verschwinden diese Abbildungseigenschaften.

Die Abbildungen des dreiaxigen Ellipsoids auf eine Tangentialebene - diese Arbeit beschränkt sich auf Tangentialebenen in den Polen - sollen mit "echten" und "unechten azimutalen" Abbildungen bezeichnet werden. Im allgemeinen werden weder die r -Linien als Geraden noch die α -Linien als Kreise abgebildet.

$$\text{"echte azimutale" Abb.:} \quad u^1 = u^1(U^1), \quad u^2 = u^2(U^2) \quad (56)$$

$$\text{"unechte azimutale" Abb.:} \quad u^1 = u^1(U^1, U^2), \quad u^2 = u^2(U^1, U^2) \quad (57)$$

$$u^1 = u^1(U^1), \quad u^2 = u^2(U^1, U^2) \quad (58)$$

$$u^1 = u^1(U^1, U^2), \quad u^2 = u^2(U^2) \quad (59)$$

Zur zweiten Kategorie gehören die im Gegensatz zur ersten Kategorie, orthogonalen elliptischen und elliptisch-trigonometrischen (Urbild-) Koordinaten, die auf eine lokale Tangentialebene projiziert werden. Die elliptisch-trigonometrischen Koordinaten beruhen auf einer Umskalierung der nicht sehr "handlichen" elliptischen Koordinaten (vgl. Kap.B.4, B.5).

Elliptische Flächenkoordinaten :

$$X(\mu, \nu) = \left\{ a \sqrt{\frac{(a^2 - \mu)(a^2 - \nu)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}} \mathbf{e}_1 + b \sqrt{\frac{(b^2 - \mu)(b^2 - \nu)}{(b^2 - c^2)(b^2 - a^2)}} \mathbf{e}_2 + c \sqrt{\frac{(c^2 - \mu)(c^2 - \nu)}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}} \mathbf{e}_3 \right\}$$

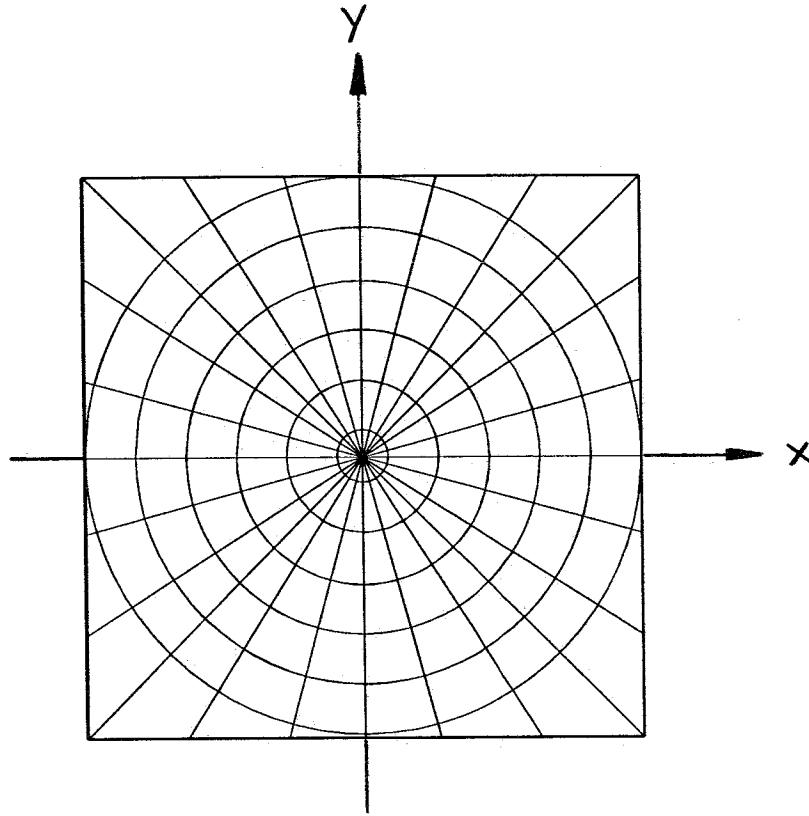


Abbildung 13: (Echte) azimutale Abbildung

Elliptisch-trigonometrische Koordinaten :

$$\mathbf{X}(\psi, \phi) = \{a \cos \psi \sqrt{\cos^2 \phi \frac{e_{12}^2}{e_{13}^2} \sin^2 \phi} \mathbf{e}_1 + b \sin \psi \cos \phi \mathbf{e}_2 + c \sin \phi \sqrt{1 - \frac{e_{12}^2}{e_{13}^2} \cos^2 \psi} \mathbf{e}_3\}$$

Transformationen :

$$\begin{aligned} \mu &= c^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi \\ \nu &= a^2 \sin^2 \psi + b^2 \cos^2 \psi \end{aligned}$$

Wird das dreiachsige Ellipsoid in elliptisch-trigonometrischen Koordinaten parametrisiert und isoparametrisch in die Ebene abgebildet, entsteht eine Karte wie in Abb. 14.

Isometrische Koordinaten :

Sehr hilfreich für weitere Berechnungen wäre, wenn sich aus einer oder aus beiden "Parametergruppen" isometrische Koordinaten herleiten ließen. Die Laplace-Beltrami-Differentialgleichungen in allgemeinen Flächenkoordinaten (41) und (42) können umgeformt werden

$$G_{vv}p_{uu} + G_{uu}p_{vv} - 2 G_{uv}p_{uv} + \left(\left(\frac{G_{vv}}{D}\right)_u - \left(\frac{G_{uv}}{D}\right)_v\right) Dp_u + \left(\left(\frac{G_{uu}}{D}\right)_v - \left(\frac{G_{uv}}{D}\right)_u\right) Dp_v = 0 \quad (60)$$

$$G_{vv}q_{uu} + G_{uu}q_{vv} - 2 G_{uv}q_{uv} + \left(\left(\frac{G_{vv}}{D}\right)_u - \left(\frac{G_{uv}}{D}\right)_v\right) Dq_u + \left(\left(\frac{G_{uu}}{D}\right)_v - \left(\frac{G_{uv}}{D}\right)_u\right) Dq_v = 0 \quad (61)$$

mit $D = \sqrt{G_{uu}G_{vv} - G_{uv}^2}$ und $\bar{u}_i = \frac{\partial \bar{u}}{\partial i}$ bzw. $\bar{u}_{ij} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial i \partial j}$.

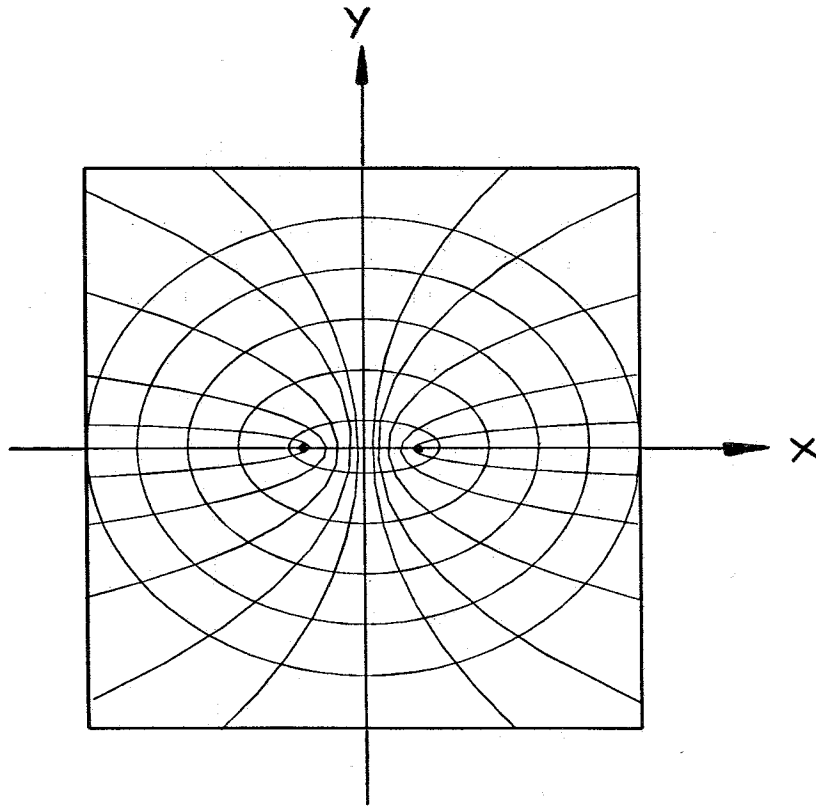


Abbildung 14: Isoparametrische Abbildung in elliptisch-trigonometrischen Koordinaten

Soll ein nicht orthogonales Parameternetz in ein isometrisches Netz transformiert werden, führt das Ableiten und Einsetzen der Metrikkoeffizienten zu zwei Differentialgleichungen mit allen bisher vorkommenden partiellen Ableitungen, die i.a. nicht separierbar sind. Auf weitere Lösungsversuche dieser Differentialgleichungen wurde somit verzichtet.

Bei der Transformation von orthogonalen auf isometrische Parameter vereinfachen sich die Gleichungen (60) und (61) zu

$$G_{vv}p_{uu} + G_{uu}p_{vv} + \left(\frac{G_{vv}}{D}\right)_u Dp_u + \left(\frac{G_{uu}}{D}\right)_v Dp_v = 0 \quad (62)$$

$$G_{vv}q_{uu} + G_{uu}q_{vv} + \left(\frac{G_{vv}}{D}\right)_u Dq_u + \left(\frac{G_{uu}}{D}\right)_v Dq_v = 0. \quad (63)$$

Durch Einsetzen und Ableiten der elliptischen Metrikkoeffizienten $G_{uu}(G_{\mu\mu})$ und $G_{vv}(G_{\nu\nu})$ (vgl. Anhang B.4) ergibt sich eine Differentialgleichung für $p(\mu, \nu)$ (und analog auch für $q(\mu, \nu)$),

$$G_{\nu\nu}p_{\mu\mu} + G_{\mu\mu}p_{\nu\nu} + \left(\frac{G_{\nu\nu}}{D}\right)_\mu Dp_\mu + \left(\frac{G_{\mu\mu}}{D}\right)_\nu Dp_\nu = 0$$

die sich mit Hilfe des Separationsansatzes $p(\mu, \nu) = s(\mu) \cdot t(\nu)$ [Bron](p.429) in zwei

homogene lineare Differentialgleichungen 2.Ordnung umformen läßt.

$$\left\{ \prod_{i=1,2,3} (a_i^2 - \mu) \right\} \mu \frac{d^2 s}{d\mu^2} - f(\mu) \frac{ds}{d\mu} + \mu^2 s(\mu) k = 0 \quad (64)$$

$$\left\{ \prod_{i=1,2,3} (a_i^2 - \nu) \right\} \nu \frac{d^2 t}{d\nu^2} - f(\nu) \frac{dt}{d\nu} + \nu^2 t(\nu) k = 0 \quad (65)$$

mit $a_i = a, b, c$, $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{1}{2}a^2b^2c^2$ für $x = \mu$ und $x = \nu$, $k = \text{Konstante}$. Existieren für $p(\mu, \nu)$ und $q(\mu, \nu)$ eindeutige Lösungen dieser Differentialgleichungen, so liegen isometrische Parameter p, q vor.

5.3 Abbildung des dreiachsigen Ellipsoids auf eine Tangentialebene

Analog zu den Parametersystemen wird zwischen der "azimutalen" Abbildung und der Abbildung auf der Basis von elliptischen Koordinaten unterschieden. Weiterhin werden Urbildparameter mit U^1, U^2 , Bildparameter mit u^1, u^2 bezeichnet.

5.3.1 "Echte azimutale" Abbildungen

Urbildparameter (U^1, U^2): ellipsoidnormale (L, B), -zentrische (λ, ϕ) oder kugelreduzierte (Λ, Φ) Koordinaten.

Bildparameter (u^1, u^2): Polarkoordinaten (α, r).

$$G_{KL} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \quad g_{kl} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Karte ϕ : $x(u^1, u^2) = r \cos \alpha$
 $y(u^1, u^2) = r \sin \alpha$

Abbildungsgleichungen: $u^1 = u^1(U^1)$
 $u^2 = u^2(U^2)$

$$c_{KL} = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 \\ 0 & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r^2 \left(\frac{\partial u^1}{\partial U^1} \right)^2 & 0 \\ 0 & \left(\frac{\partial u^2}{\partial U^2} \right)^2 \end{bmatrix}$$

KONFORME ABBILDUNG

Es gelten die Beziehungen (43),(44),(45),(46) und (47). Die Forderung $c_{12} = \Lambda_{1,2} \cdot G_{12}$ kann nicht erfüllt werden, da $c_{12} = 0$, $G_{12} \neq 0$ und $\Lambda_{1,2}^2 \neq 0$ sind.

Es existiert also keine "echte" azimutale konforme Abbildung mit den obigen Abbildungsgleichungen und den vorgegebenen Parametrisierungen.

FLÄCHENTREUE ABBILDUNG

Es gelten die Beziehungen (52),(54) und (55). Ausgehend von den Voraussetzungen zu

Beginn des Kapitels 5.3.1 muß die folgende Gleichung erfüllt sein.

$$\frac{\partial u^1}{\partial U^1} \frac{\partial u^2}{\partial U^2} = \sqrt{\frac{G_{11}G_{22} - G_{12}^2}{g_{11}g_{22}}} \quad (66)$$

Als Urbildparameter werden kugelreduzierte Koordinaten (Λ, Φ) eingeführt. Der zugehörige Metritensor G_{KL} wurde in Anhang B.2 berechnet.

Die Abbildungsgleichungen werden festgelegt mit

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha(\Lambda) = \lambda = \arctan(\sqrt{1 - e_{12}^2} \tan \Lambda) \\ r &= r(\Phi) \end{aligned}$$

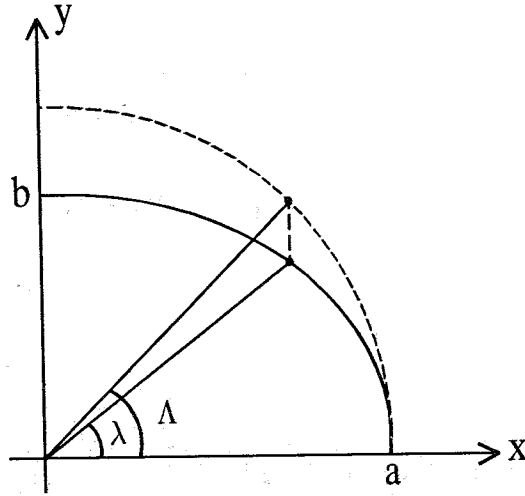


Abbildung 15: Ellipsoidzentrische (λ) und kugelreduzierte (Λ) Länge

Das Azimut α entspricht der ellipsoidzentrischen Länge λ . Die Funktion für die Entfernung r muß noch bestimmt werden.

Unter Verwendung aller bekannten Terme führt die Gleichung (66) zu folgender Differentialgleichung

$$\begin{aligned} r r' &= r \frac{dr}{d\Phi} \\ &= a^2 \cos \Phi \frac{1 - e_{12}^2 \sin^2 \Lambda}{\sqrt{1 - e_{12}^2}} \sqrt{1 - e_{13}^2 (1 - e_{12}^2 \cos^2 \Lambda) \cos^2 \Phi + e_{12}^2 (\sin^2 \Lambda \sin^2 \Phi + \cos^2 \Lambda)}. \end{aligned}$$

Es ergibt sich für r

$$r = \sqrt{2a^2 \frac{1 - e_{12}^2 \sin^2 \Lambda}{\sqrt{1 - e_{12}^2}}} \int \cos \Phi \sqrt{1 - e_{13}^2 (1 - e_{12}^2 \cos^2 \Lambda) \cos^2 \Phi + e_{12}^2 (\sin^2 \Lambda \sin^2 \Phi + \cos^2 \Lambda)} d\Phi. \quad (67)$$

Man sieht jedoch sofort, daß r eine Funktion von Λ und Φ ist und somit der Ansatz bzgl. der Abbildungsgleichungen $r = r(\Phi)$ nicht erfüllt werden kann.

Unter den oben genannten Voraussetzungen existiert also keine "echte azimutale" flächentreue Abbildung.

ÄQUIDISTANTE ABBILDUNG

Die Abbildung soll entlang den Meridianen äquidistant sein. Nur die vier Meridiane $\Lambda = 0^\circ$, $\Lambda = 90^\circ$, $\Lambda = 180^\circ$, $\Lambda = 270^\circ$ sind Krümmungslinien des dreiachsigen Ellipsoids (vgl. Kap. 2.4). Auch hier werden als Urbildparameter kugelreduzierte Koordinaten (Λ, Φ) eingeführt. Die Abbildungsgleichungen werden festgelegt mit

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha(\Lambda) = \lambda = \arctan(\sqrt{1 - e_{12}^2} \tan \Lambda) \\ r &= r(\Phi)\end{aligned}$$

Es folgt daraus der Deformationstensor c_{KL}

$$c_{KL} = \begin{bmatrix} r^2 \frac{1 - e_{12}^2}{(1 - e_{12}^2 \sin^2 \Lambda)^2} & 0 \\ 0 & r'^2 \end{bmatrix} \quad |c_{KL}| = r^2 r'^2 \frac{1 - e_{12}^2}{(1 - e_{12}^2 \sin^2 \Lambda)^2}$$

mit $r' = \frac{dr}{d\Phi}$.

Entlang den Meridianen gilt für die Längenverzerrung (vgl. Gl.(55))

$$k = \sqrt{\frac{c_{22}}{G_{22}}}$$

Sollen die Meridiane äquidistant abgebildet werden, muß gelten

$$k = \sqrt{\frac{c_{22}}{G_{22}}} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad c_{22} = G_{22}$$

Das Einsetzen der bekannten Terme c_{22} und G_{22} führt zur der Differentialgleichung

$$\begin{aligned}r' &= a \sqrt{1 - e_{12}^2 \sin^2 \Lambda} \sqrt{1 + \cos^2 \Phi \left(\frac{e_{13}^2 - e_{12}^2 \sin^2 \Lambda}{1 - e_{12}^2 \sin^2 \Lambda} \right)} \\ \Rightarrow [r]_0^r &= a \sqrt{1 - e_{12}^2 \sin^2 \Lambda} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos^2 \Phi \left(\frac{e_{13}^2 - e_{12}^2 \sin^2 \Lambda}{1 - e_{12}^2 \sin^2 \Lambda} \right)} d\Phi\end{aligned}$$

Auch hier ist ersichtlich, daß r nach Lösung des elliptischen Integrals von Λ und Φ abhängt und somit die Ausgangsforderung $u^2 = u^2(U^2)$ nicht erfüllt werden kann.

Zusammenfassung

Der vorgegebene Zusammenhang zwischen Λ und α und die Abbildungsvorschriften der "echten azimutalen" Abbildungen

$$\begin{aligned}\alpha &= \arctan(\sqrt{1 - e_{12}^2} \tan \Lambda) & \alpha &= \alpha(\Lambda) \\ r &= r(\Phi) & r &= r(\Phi)\end{aligned}$$

können bei der Abbildung eines dreiachsigen Ellipsoids in die Ebene nicht in Einklang gebracht werden. Nach der Vorgabe der α -Parameterlinien können in diesem Fall keine "echten azimutalen" Abbildungen konstruiert werden.

5.3.2 "Unechte azimutale" Abbildungen

Urbild- und Bildparametrisierung wird analog dem Kap.5.3.1 gewählt. Es wird in dieser Arbeit nur die "unechte azimutale" Abbildung der Form $u^1 = u^1(U^1)$, $u^2 = u^2(U^1, U^2)$ (vgl. Gl.(58)) näher untersucht.

Urbildparameter (U^1, U^2) : ellipsoidnormale (L, B) , -zentrische (λ, ϕ) oder kugelreduzierte (Λ, Φ) Koordinaten.

Bildparameter (u^1, u^2) : Polarkoordinaten (α, r) .

$$G_{KL} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \quad g_{kl} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Karte ϕ : $x(u^1, u^2) = r \cos \alpha$
 $y(u^1, u^2) = r \sin \alpha$

Abbildungsgleichungen : $u^1 = u^1(U^1)$
 $u^2 = u^2(U^1, U^2)$

$$c_{KL} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \text{ ist voll besetzt.}$$

KONFORME ABBILDUNG

Es gelten die Beziehungen (43),(44),(45),(46) und (47).

Die Berechnung des Deformationstensors in Bildkoordinaten erfolgt mit $C_{kl} = G_{KL} \frac{\partial U^K}{\partial u^k} \frac{\partial U^L}{\partial u^l} = J^T G_{KL} J$, wobei die Jacobi-Matrix J wie folgt gebildet wird :

$$J = \frac{\partial U^K}{\partial u^k} = \begin{bmatrix} \frac{\partial U^1}{\partial u^1} & \frac{\partial U^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial U^2}{\partial u^1} & \frac{\partial U^2}{\partial u^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & 0 \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix}$$

wobei nach den obigen Voraussetzungen $J_{12} = \frac{\partial U^1}{\partial u^2} = 0$ gilt.

$$C_{kl} = \begin{bmatrix} J_{11}(J_{11}G_{11} + J_{21}G_{21}) + J_{21}(J_{11}G_{12} + J_{21}G_{22}) & J_{22}(J_{11}G_{12} + J_{21}G_{22}) \\ J_{11}J_{22}G_{21} + J_{21}J_{22}G_{22} & J_{22}^2 G_{22} \end{bmatrix}$$

Mit $g_{12} = \Lambda_{1,2}^2 \cdot C_{12}$ und $g_{12} = 0$ wird die erste Bedingung für konforme Abbildungen

$$C_{12} = 0$$

aufgestellt, mit $g_{11} = \Lambda_{1,2}^2 \cdot C_{11}$ und $g_{22} = \Lambda_{1,2}^2 \cdot C_{22}$ ergibt sich die zweite Bedingung

$$\frac{g_{11}}{g_{22}} = \frac{C_{11}}{C_{22}}$$

(vgl. Kap.5.1). Diese beiden Gleichungen gehen nach Einsetzen der obigen g_{kl} und C_{kl} über in die Differentialgleichungen

$$\frac{\partial U^2}{\partial u^1} = -\frac{\partial U^1}{\partial u^1} \frac{G_{12}}{G_{22}} \quad \frac{\partial U^2}{\partial u^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial U^1}{\partial u^2} \frac{\sqrt{\det(G_{KL})}}{G_{22}}, \quad (68)$$

die der Integrabilitätsbedingung $(\frac{\partial U^2}{\partial u^1})/\partial u^2 - (\frac{\partial U^2}{\partial u^2})/\partial u^1 = 0$ genügen müssen, um eine konforme Abbildung zu generieren.

Nach Einsetzen der kugelreduzierten Urbildparameter Λ und Φ und deren Metriktenor ergibt sich jedoch

$$\frac{(\frac{\partial U^2}{\partial u^1})}{\partial u^2} \neq \frac{(\frac{\partial U^2}{\partial u^2})}{\partial u^1} \text{ bzw. } \frac{(\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha})}{\partial r} \neq \frac{(\frac{\partial \Phi}{\partial r})}{\partial \alpha}$$

Es existiert somit auch unter den in diesem Kapitel gemachten Ansätzen keine konforme Abbildung.

FLÄCHENTREUE ABBILDUNG

Es gelten die Beziehungen wiederum (52), (54) und (55) und die Abbildungsgleichung $r = r(\Lambda, \Phi)$. Für kugelreduzierte Koordinaten ergibt sich nach Einführen der Poldistanz $\Delta = \frac{\pi}{2} - \Phi$

$$\begin{aligned} u^1 &= u^1(U^1) & \Leftrightarrow & \alpha = \alpha(\Lambda) \\ u^2 &= u^2(U^1, U^2) & \Leftrightarrow & r = r(\Lambda, \Phi) = r(\Lambda, \Delta = \frac{\pi}{2} - \Phi) \end{aligned}$$

Mit der weiteren Annahme, daß r separierbar ist $r(\Lambda, \Delta) = s(\Lambda) \cdot t(\Delta)$, und durch Einsetzen aller bekannten Terme führt die Gl.(55) bzw. (66) zu

$$\begin{aligned} rr_{\Delta} &= r \frac{\partial r}{\partial \Delta} = a^2(1 - e_{12}^2 \sin^2 \Lambda) \sin \Delta \sqrt{1 - \sin^2 \Delta \left(\frac{e_{13}^2(1 - e_{12}^2 \cos^2 \Lambda) + e_{12}^2 \sin^2 \Lambda}{1 - e_{12}^2} \right)} \\ [r]_0^r &= a^2(1 - e_{12}^2 \sin^2 \Lambda) \cdot \\ &\quad \cdot \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \Delta \sqrt{1 - \sin^2 \Delta \left(\frac{e_{13}^2(1 - e_{12}^2 \cos^2 \Lambda) + e_{12}^2 \sin^2 \Lambda}{1 - e_{12}^2} \right)} d\Delta + F(\Lambda) \right\}, \end{aligned} \quad (69)$$

wobei die Funktion $F(\Lambda)$ noch unbekannt ist. Somit können auch hier keine Abbildungsgleichungen gefunden werden.

ÄQUIDISTANTE ABBILDUNG

Die Abbildung soll wiederum entlang den Meridianen äquidistant sein. Auch hier wird angesetzt $r = r(\Lambda, \Phi) = r(\Lambda, \Delta) = s(\Lambda) \cdot t(\Delta)$ und $k = \sqrt{\frac{c_{22}}{G_{22}}} = 1$. Es ergibt sich somit in kugelreduzierten Koordinaten

$$\begin{aligned} s \cdot t' &= s \cdot \frac{dt}{d\Delta} = a \sqrt{1 - e_{12}^2 \sin^2 \Lambda} \sqrt{1 - \sin^2 \Delta \left(\frac{e_{13}^2 - e_{12}^2 \sin^2 \Lambda}{1 - e_{12}^2 \sin^2 \Lambda} \right)} \\ s \cdot t &= [r]_0^r = a \sqrt{1 - e_{12}^2 \sin^2 \Lambda} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 \Delta \left(\frac{e_{13}^2 - e_{12}^2 \sin^2 \Lambda}{1 - e_{12}^2 \sin^2 \Lambda} \right)} d\Delta \\ r &= a \sqrt{1 - e_{12}^2 \sin^2 \Lambda} E(k_e, \frac{\pi}{2}) \end{aligned} \quad (70)$$

$$\text{mit } k_e = \sqrt{\frac{e_{13}^2 - e_{12}^2 \sin^2 \Lambda}{1 - e_{12}^2 \sin^2 \Lambda}}.$$

Die auf den Meridianen der Hauptschnitte äquidistante "unechte" azimutale Abbildung des dreiachsigen Ellipsoids ergibt sich zu

$$\alpha = \arctan(\sqrt{1 - e_{12}^2} \tan \Lambda)$$

$$r = a\sqrt{1 - e_{12}^2 \sin^2 \Lambda} E(k_e, \frac{\pi}{2})$$

Zusammenfassung

Unter den gegebenen Voraussetzungen können nur äquidistante Abbildungen gefunden werden. In Abb.16 wurde die Exzentrizität e_{12}^2 vergrößert, um den Verlauf der Parameterlinien in der Karte zu verdeutlichen. Die flächentreue Abbildung scheitert an der unbestimmt gebliebenen Funktion $F(\Lambda)$, die konforme Abbildung an dem Ansatz $u^1 = u^1(U^1)$.

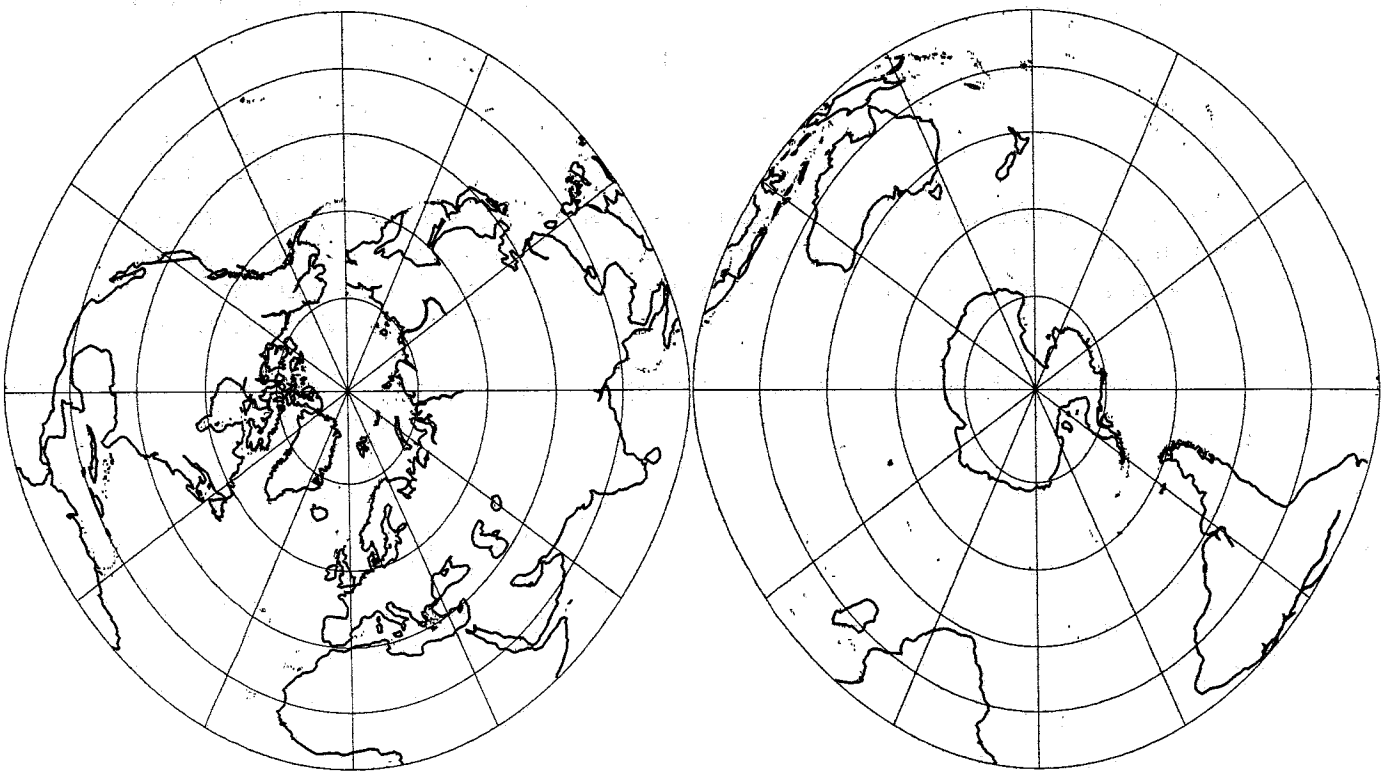


Abbildung 16: "Unechte" azimutale Abbildung äquidistant entlang der Meridiane

5.3.3 Abbildung des dreiachsigen Ellipsoids auf der Basis von elliptischen Koordinaten

Die ebenen elliptischen Koordinaten sind gegeben durch

$$x(\bar{\psi}, \bar{\phi}) = l \cosh \bar{\psi} \cos \bar{\phi} \quad (71)$$

$$y(\bar{\psi}, \bar{\phi}) = l \sinh \bar{\psi} \sin \bar{\phi} \quad (72)$$

mit $2l$ = Abstand zwischen zwei Nabelpunkten.

Eine einfache isoparametrische Abbildung von elliptischen Flächenkoordinaten auf ebene elliptische Koordinaten ist weder konform noch flächentreu noch äquidistant entlang den Meridianen. Sind die elliptischen Flächenkoordinaten isometrisierbar (vgl. Anhang B.6), ist eine isoparametrische Abbildung dieser isometrischen Koordinaten $(P(\mu), Q(\nu))$ auf ebene elliptische Koordinaten $(\bar{\psi}, \bar{\phi})$, die ihrerseits bereits isometrisch sind, zumindest konform.

Urbildparameter (U^1, U^2) : isometrische Koordinaten $(P(\mu), Q(\nu))$

Bildparameter (u^1, u^2) : elliptische Koordinaten $(\bar{\psi}, \bar{\phi})$.

$$G_{KL} = \begin{bmatrix} G_{11} & 0 \\ 0 & G_{22} \end{bmatrix} = h(P, Q) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = h(P, Q) \delta_{KL}$$

$$g_{kl} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & g_{22} \end{bmatrix} = l^2(\sinh^2 \bar{\psi} + \sin^2 \bar{\phi}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = l^2(\sinh^2 \bar{\psi} + \sin^2 \bar{\phi}) \delta_{kl}$$

Karte ϕ :

$$x(u^1, u^2) = l \sinh \bar{\psi} \sin \bar{\phi}$$

$$y(u^1, u^2) = l \cosh \bar{\psi} \cos \bar{\phi}$$

$2l$ = Abstand zwischen zwei Nabelpunkten = konstant

Abbildungsgleichungen :

$$u^1 = U^1$$

$$u^2 = U^2$$

$$c_{KL} = g_{KL}$$

KONFORME ABBILDUNG

Da es sich um die Abbildung zwischen zwei isometrischen Parametersystemen handelt, können die Formeln (43) - (47) zu den CR-DGn (51) reduziert werden.

$$\frac{\partial u^1}{\partial U^1} = \frac{\partial u^2}{\partial U^2} \quad \frac{\partial u^1}{\partial U^2} = -\frac{\partial u^2}{\partial U^1}$$

Mit den obigen Abbildungsgleichungen und deren Ableitungen $\frac{\partial u^1}{\partial U^1} = \frac{\partial u^2}{\partial U^2} = 1$ und $\frac{\partial u^1}{\partial U^2} = \frac{\partial u^2}{\partial U^1} = 0$ sind die CR-DGn erfüllt.

Die Abbildungsgleichung der konformen Abbildung ergibt sich zu

$$\begin{aligned} x &= l \sinh P(\mu) \sin Q(\nu) \\ y &= l \cosh P(\mu) \cos Q(\nu) \end{aligned}$$

FLÄCHENTREUE ABBILDUNG

Es gilt wiederum die Gleichung

$$\frac{\partial u^1}{\partial U^1} \frac{\partial u^2}{\partial U^2} - \frac{\partial u^1}{\partial U^2} \frac{\partial u^2}{\partial U^1} = \sqrt{\frac{G_{11}G_{22} - G_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}},$$

die für die isometrischen Urbildkoordinaten (P, Q) nur dann erfüllt ist, wenn gilt

$$h(P, Q) = l^2(\sinh^2 \bar{\psi} + \sin^2 \bar{\phi}) \quad (73)$$

ÄQUIDISTANTE ABBILDUNG

Eine äquidistante Abbildung entlang der Hauptkrümmungslinien liegt vor, wenn

$$k = \sqrt{\frac{c_{22}}{G_{22}}} = 1 \quad \text{und} \quad h = \sqrt{\frac{c_{11}}{G_{11}}} = 1 \quad \text{gilt.}$$

Voraussetzung dafür ist wiederum

$$h(P, Q) = l^2(\sinh^2 \bar{\psi} + \sin^2 \bar{\phi})$$

Zusammenfassung

Da die Abbildung von isometrischen Urbild- auf isometrische Bildkoordinaten immer winkeltreu ist, existiert eine konforme Abbildung, sobald die isometrischen Koordinaten P und Q bestimmt werden können. Flächentreu und äquidistant ist diese Abbildung nur dann, wenn Gl.(73) erfüllt ist.

A Grundlagen

Da diese Arbeit keinem Lehrbuch über Differentialgeometrie entsprechen soll, werden in diesem Kapitel die einzelnen Fachbegriffe nur kurz erläutert und eine von mehreren (und oft auch eleganteren) Berechnungs- bzw. Darstellungsmöglichkeiten angegeben. Zur weiteren Vertiefung darf auf gängige Vorlesungsskripte und diverse Differentialgeometrie- bzw. Landesvermessungslehrbücher (siehe Literaturverzeichnis) verwiesen werden.

A.1 Kurvenbegleitendes Frenet-Dreibein

Es sei $\mathbf{x}_P = \mathbf{x}_P(t) = x^1(t) \mathbf{e}_1 + x^2(t) \mathbf{e}_2 + x^3(t) \mathbf{e}_3$ der Ortsvektor des Punktes P auf einer Kurve $\mathbf{x}(t)$. Das *kurvenbegleitende Dreibein* setzt sich zusammen aus dem *Tangentenvektor* $\mathbf{t}$, dem *Normalenvektor* $\mathbf{n}$ und dem *Binormalenvektor* $\mathbf{b}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1 &= \mathbf{t} = \frac{\dot{\mathbf{x}}}{\|\dot{\mathbf{x}}\|} \\ \mathbf{f}_2 &= \mathbf{n} = \frac{\dot{\mathbf{t}}}{\|\dot{\mathbf{t}}\|} \\ \mathbf{f}_3 &= \mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} \end{aligned} \quad (74)$$

$\mathbf{n}$, $\mathbf{t}$ und $\mathbf{b}$ stehen senkrecht aufeinander und besitzen die Einheitslänge 1. Das Frenet-Dreibein ist also ein *orthonormiertes Dreibein*, dessen $\mathbf{f}_1$ - und $\mathbf{f}_2$ -Vektor die Schmiegeebene, der $\mathbf{f}_2$ - und $\mathbf{f}_3$ -Vektor die Normalebene, der $\mathbf{f}_1$ - und $\mathbf{f}_3$ -Vektor die rektifizierende Ebene in einem Punkt der Kurve $\mathbf{x}(t)$ aufspannen.

A.2 Flächenbegleitendes Gauß-Dreibein

Es sei $\mathbf{x}_P = \mathbf{x}_P(u, v) = x^1(u, v) \mathbf{e}_1 + x^2(u, v) \mathbf{e}_2 + x^3(u, v) \mathbf{e}_3$ der Ortsvektor des Punktes P auf einer Fläche $\mathbf{x}(u, v)$ im $\mathbb{R}^3$. Das *flächenbegleitende Dreibein* setzt sich zusammen aus den beiden linear unabhängigen *Tangentenvektoren* $\mathbf{g}_u$ und $\mathbf{g}_v$ in Richtung der u - und v -Parameterlinien sowie dem *Flächennormalenvektor* $\mathbf{g}_3$.

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1 &= \mathbf{g}_u = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} = \mathbf{x}_u \\ \mathbf{g}_2 &= \mathbf{g}_v = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} = \mathbf{x}_v \\ \mathbf{g}_3 &= \frac{\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2}{\|\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2\|} = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|} \end{aligned} \quad (75)$$

Das Gauß-Dreibein ist somit weder orthogonal noch normiert.

A.3 Darboux-Dreibein

Das Darboux-Dreibein ist ein *kurvenbegleitendes Dreibein auf einer Fläche*. Es setzt sich zusammen aus dem *Tangentenvektor* $\mathbf{t}$, dem *Flächennormalenvektor* $\mathbf{g}_3$ und dem auf diesen beiden senkrecht stehenden Vektor $\mathbf{g}_3 \times \mathbf{t}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_1 &= \mathbf{f}_1 = \mathbf{t} = \frac{\dot{\mathbf{x}}}{\|\dot{\mathbf{x}}\|} \\ \mathbf{d}_3 &= \mathbf{g}_3 = \frac{\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2}{\|\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2\|} \\ \mathbf{d}_2 &= \mathbf{d}_3 \times \mathbf{d}_1 = \mathbf{g}_3 \times \mathbf{t} \end{aligned} \quad (76)$$

Das Darboux-Dreibein ist somit orthonormal. Mit θ wird der Winkel zwischen der Kurvennormalen $\mathbf{n}$ und der Flächennormalen $\mathbf{g}_3 = \mathbf{d}_3$ bezeichnet.

A.4 Krümmung und Torsion

Die Krümmung κ und die Torsion τ einer Kurve $\mathbf{x}(t)$ im $\mathbb{R}^3$ können wie folgt berechnet werden

$$\kappa = \frac{\|\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}\|}{\|\dot{\mathbf{x}}\|^3} \quad \tau = \frac{\langle \dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}} \rangle}{\|\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}\|^2}$$

Auf einer Fläche $\mathbf{x}(u, v)$ können die geodätische- κ_g , die Normalkrümmung κ_N und die geodätische Torsion τ_g berechnet werden mit [Gra4] :

$$\kappa_g = \frac{\det|\dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}, \mathbf{g}_3|}{\|\dot{\mathbf{x}}\|^3} \quad (77)$$

$$\kappa_N = \frac{\langle d\mathbf{x}, -d\mathbf{g}_3 \rangle}{\langle d\mathbf{x}, d\mathbf{x} \rangle} \quad (78)$$

$$\tau_g = \tau + \frac{d\theta}{ds} \quad (79)$$

A.5 I. Fundamentalform

Das Bogenelement ergibt sich zu $I := ds^2 = g_{kl} du^k dv^l$ (I. Fundamentalform), wobei sich der Metriktenor g_{kl} aus den Tangentenvektoren $\mathbf{g}_u$ und $\mathbf{g}_v$ berechnet.

$$\begin{aligned} g_{uu} &= g_{11} = e = \langle \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_1 \rangle \\ g_{uv} &= g_{12} = f = \langle \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 \rangle \\ g_{vv} &= g_{22} = g = \langle \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_2 \rangle \end{aligned} \quad (80)$$

Die I.Fundamentalform beschreibt die Metrik einer Fläche.

A.6 II. Fundamentalform

Die II.Fundamentalform $II = h_{kl} du^k dv^l$ liefert die lokalen Krümmungsverhältnisse in einem Punkt P auf der Fläche $\mathbf{x}(u, v)$. h_{kl} ist der Krümmungstensor der Fläche $\mathbf{x}(u, v)$.

$$\begin{aligned} II &= - \langle d\mathbf{x}, d\mathbf{g}_3 \rangle \\ &= - \langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^\alpha}, \frac{\partial \mathbf{g}_3}{\partial u^\beta} \rangle du^\alpha dv^\beta = \langle \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^\alpha \partial u^\beta}, \mathbf{g}_3 \rangle du^\alpha dv^\beta \end{aligned} \quad (81)$$

$$\alpha, \beta = 1, 2$$

$$\begin{aligned} h_{uu} &= h_{11} = l = \langle \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^2}, \mathbf{g}_3 \rangle \\ h_{uv} &= h_{12} = m = \langle \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u \partial v}, \mathbf{g}_3 \rangle \\ h_{vv} &= h_{22} = n = \langle \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial v^2}, \mathbf{g}_3 \rangle \end{aligned} \quad (82)$$

A.7 Krümmung

Die Krümmung einer Fläche wird beschrieben durch die Änderung des Flächennormalenvektors. Die *Weingarten-Ableitungsgleichung* [Gra3]

$$\begin{aligned} d \mathbf{g}_3 &= - [d u^1, d u^2]^T H G^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{g}_3}{\partial u^1} \\ \frac{\partial \mathbf{g}_3}{\partial u^2} \end{bmatrix} &= - H G^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

enthält die Krümmungsmatrix $K_{KL} = -H G^{-1}$, deren einzelne Elemente sich ergeben zu

$$\begin{aligned} K_{11} &= \frac{G_{12}H_{12} - G_{22}H_{11}}{D^2} \stackrel{(H_{12}=0)}{=} -\frac{G_{22}H_{11}}{D^2} \stackrel{\substack{(H_{12}=0) \\ (G_{12}=0)}}{=} -\frac{H_{11}}{G_{11}} \\ K_{12} &= \frac{G_{12}H_{11} - G_{11}H_{12}}{D^2} \stackrel{(H_{12}=0)}{=} \frac{G_{12}H_{11}}{D^2} \stackrel{\substack{(H_{12}=0) \\ (G_{12}=0)}}{=} 0 \\ K_{21} &= \frac{G_{12}H_{22} - G_{22}H_{12}}{D^2} \stackrel{(H_{12}=0)}{=} \frac{G_{12}H_{22}}{D^2} \stackrel{\substack{(H_{12}=0) \\ (G_{12}=0)}}{=} 0 \\ K_{22} &= \frac{G_{12}H_{12} - G_{11}H_{22}}{D^2} \stackrel{(H_{12}=0)}{=} -\frac{G_{11}H_{22}}{D^2} \stackrel{\substack{(H_{12}=0) \\ (G_{12}=0)}}{=} -\frac{H_{22}}{G_{22}} \end{aligned} \quad (83)$$

mit $D = \sqrt{G_{11}G_{22} - G_{12}^2}$.

Die Krümmungsmatrix hängt somit von der Flächenparametrisierung ab und *ist nicht notwendigerweise symmetrisch*. Ist die Fläche in den Parametern der Krümmungslinien parametrisiert (d.h. $G_{12} = H_{12} = 0$), ergibt sich immer eine symmetrische Krümmungsmatrix.

Aus der Matrix K lassen sich die Gauß'sche Krümmung k und die mittlere Krümmung h berechnen.

$$\begin{aligned} k &= \det K = \frac{\det H}{\det G} \\ h &= -\frac{1}{2} \operatorname{tr} K \end{aligned}$$

A.8 Berechnung des Metrik- und Deformationstensors

Die Urbildmannigfaltigkeit sei parametrisiert in

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(U, V) = X(U, V)\mathbf{E}_1 + Y(U, V)\mathbf{E}_2 + Z(U, V)\mathbf{E}_3,$$

so daß der Metriktensor G_{KL} sich wie folgt berechnen läßt.

$$\begin{aligned} G_{KL} &= \begin{bmatrix} G_{UU} & G_{UV} \\ G_{VU} & G_{VV} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial X}{\partial U}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial U}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial U}\right)^2 & \frac{\partial X}{\partial U} \frac{\partial X}{\partial V} + \frac{\partial Y}{\partial U} \frac{\partial Y}{\partial V} + \frac{\partial Z}{\partial U} \frac{\partial Z}{\partial V} \\ \frac{\partial X}{\partial U} \frac{\partial X}{\partial V} + \frac{\partial Y}{\partial U} \frac{\partial Y}{\partial V} + \frac{\partial Z}{\partial U} \frac{\partial Z}{\partial V} & \left(\frac{\partial X}{\partial V}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial V}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial V}\right)^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (84)$$

Die Bildmannigfaltigkeit sei parametrisiert in

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v) = \mathbf{x}(u, v)\mathbf{e}_1 + y(u, v)\mathbf{e}_2 + z(u, v)\mathbf{e}_3.$$

Der Metriktensor g_{kl} wird analog der Gleichung (84) berechnet.

Der GREEN-Deformationstensor c_{KL} in Urbildkoordinaten ergibt sich aus

$$c_{KL} = g_{kl} \frac{\partial u^k}{\partial U^K} \frac{\partial u^l}{\partial U^L} = \frac{\partial x^i}{\partial U^K} \frac{\partial x^i}{\partial U^L} \quad (85)$$

$$\frac{\partial x^i}{\partial U^K} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial U^1} & \frac{\partial x}{\partial U^2} \\ \frac{\partial y}{\partial U^1} & \frac{\partial y}{\partial U^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u^1} \frac{\partial u^1}{\partial U^1} + \frac{\partial x}{\partial u^2} \frac{\partial u^2}{\partial U^1} & \frac{\partial x}{\partial u^1} \frac{\partial u^1}{\partial U^2} + \frac{\partial x}{\partial u^2} \frac{\partial u^2}{\partial U^2} \\ \frac{\partial y}{\partial u^1} \frac{\partial u^1}{\partial U^1} + \frac{\partial y}{\partial u^2} \frac{\partial u^2}{\partial U^1} & \frac{\partial y}{\partial u^1} \frac{\partial u^1}{\partial U^2} + \frac{\partial y}{\partial u^2} \frac{\partial u^2}{\partial U^2} \end{bmatrix} \quad (86)$$

$$c_{KL} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial x}{\partial U^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial U^1}\right)^2 & \frac{\partial x}{\partial U^1} \frac{\partial x}{\partial U^2} + \frac{\partial y}{\partial U^1} \frac{\partial y}{\partial U^2} \\ \frac{\partial x}{\partial U^1} \frac{\partial x}{\partial U^2} + \frac{\partial y}{\partial U^1} \frac{\partial y}{\partial U^2} & \left(\frac{\partial x}{\partial U^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial U^2}\right)^2 \end{bmatrix} \quad (87)$$

Analog berechnet sich der CAUCHY-Deformationstensor C_{kl} in Bildkoordinaten

$$\begin{aligned} C_{kl} &= G_{KL} \frac{\partial U^K}{\partial u^k} \frac{\partial U^L}{\partial u^l} = \frac{\partial X^i}{\partial u^k} \frac{\partial X^i}{\partial u^l} \\ &= \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial X}{\partial u^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial u^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial u^1}\right)^2 & \frac{\partial X}{\partial u^1} \frac{\partial X}{\partial u^2} + \frac{\partial Y}{\partial u^1} \frac{\partial Y}{\partial u^2} + \frac{\partial Z}{\partial u^1} \frac{\partial Z}{\partial u^2} \\ \frac{\partial X}{\partial u^1} \frac{\partial X}{\partial u^2} + \frac{\partial Y}{\partial u^1} \frac{\partial Y}{\partial u^2} + \frac{\partial Z}{\partial u^1} \frac{\partial Z}{\partial u^2} & \left(\frac{\partial X}{\partial u^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial u^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial u^2}\right)^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A.9 Christoffelsymbole

Die Christoffelsymbole 2.Art lassen sich mit

$$\Gamma_{\alpha}^{\beta}{}_{\gamma} = \frac{1}{2} g^{\beta\delta} (g_{\gamma\delta,\alpha} + g_{\delta\alpha,\gamma} - g_{\alpha\gamma,\delta}) \quad (88)$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2$ berechnen. Die g_{kl} entsprechen den Elementen des Metriktensors; g^{kl} ist die inverse Matrix von g_{kl} .

A.10 Isometrische Parameter

Ein Parameternetz (u, v) heißt *isometrisch*, wenn es folgende Eigenschaften besitzt [Gra3]:

- Die Parameterlinien stehen orthogonal aufeinander, d.h. $g_{12} = g_{uv} = 0$.
- Das Linienelement $ds^2 = g_{kl} du^k du^l$ liegt in der Form

$$ds^2 = h(p, q) \{dp^2 + dq^2\}$$

vor.

Ein Parameternetz (u, v) heißt *isotherm*, wenn es isometrisierbar ist. Folgende Voraussetzungen müssen erfüllt sein :

- Die Parameterlinien stehen orthogonal aufeinander, d.h. $g_{12} = g_{uv} = 0$.
- Das Linienelement $ds^2 = g_{kl} du^k dv^l$ liegt in der Form

$$ds^2 = h(u, v) \{ f(u) du^2 + g(v) dv^2 \}$$

eines *LIOUVILLE-Linienelements* [Kli2], p.94 vor.

Die beiden Gleichungen der Bogenelemente führen auf die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} dp^2 &= f(u) du^2 \\ dq^2 &= g(v) dv^2 \end{aligned}$$

so daß sich die isometrischen Parameter p und q wie folgt berechnen

$$p = \int_{u_0}^u \sqrt{f(u)} du \quad \text{und} \quad q = \int_{v_0}^v \sqrt{g(v)} dv .$$

B Zusammenstellung aller verwendeten Parametrisierungen

In diesem Kapitel werden alle in dieser Arbeit verwendeten Parametrisierungen des dreiachsigen Ellipsoids und deren differentialgeometrischen Eigenschaften zusammengestellt.

B.1 Ellipsoidnormale Koordinaten L und B

- Parameterdarstellung

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = W^{-1}(L, B) a \begin{bmatrix} \cos L \cos B \\ (1 - e_{12}^2) \sin L \cos B \\ (1 - e_{13}^2) \sin B \end{bmatrix}$$

$$W(L, B) := \left[1 - e_{13}^2 \sin^2 B - e_{12}^2 \cos^2 B \sin^2 L \right]^{\frac{1}{2}}$$

- Umkehrfunktion

$$\begin{aligned} L &= \arctan \left[\frac{1}{1 - e_{12}^2} \frac{y}{x} \right] && \text{für } x > 0 \\ &= \left(\arctan \left[\frac{1}{1 - e_{12}^2} \frac{y}{x} \right] \right) + \pi && \text{für } x < 0 \\ &= \operatorname{sgn} y \frac{\pi}{2} && \text{für } x = 0 \wedge y \neq 0 \\ &\text{nicht definiert} && \text{für } x = 0 \wedge y = 0 \\ B &= \arctan \left[\frac{1 - e_{12}^2}{1 - e_{13}^2} \frac{z}{\sqrt{(1 - e_{12}^2)^2 x^2 + y^2}} \right] && \text{für } x \neq 0 \vee y \neq 0 \\ &= \operatorname{sgn} z \frac{\pi}{2} && \text{für } (x = 0 \wedge y = 0) \wedge z \neq 0 \\ &\text{nicht definiert} && \text{für } x = 0 \wedge y = 0 \wedge z = 0 \end{aligned}$$

- Eigenschaften

Die Längengleichen L und $L + 180^\circ$ liegen auf einer Ebene, eine Breitengleiche B dagegen ist nicht in einer Ebene enthalten.

- Ableitungen von $W(L, B)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial L} &= W_L = \frac{1}{W} (-e_{12}^2 \cos^2 B \sin L \cos L) \\ \frac{\partial W}{\partial B} &= W_B = \frac{1}{W} \sin B \cos B (-e_{13}^2 + e_{12}^2 \sin^2 L) \\ \frac{\partial^2 W}{\partial L^2} &= W_{LL} = -\frac{1}{W^2} e_{12}^2 \cos^2 B (W(\cos^2 L - \sin^2 L) - W_L \sin L \cos L) \\ \frac{\partial^2 W}{\partial B^2} &= W_{BB} = \frac{1}{W^2} (-e_{13}^2 + e_{12}^2 \sin^2 L) (W(\cos^2 B - \sin^2 L) - W_B \sin B \cos B) \\ \frac{\partial^2 W}{\partial L \partial B} &= W_{LB} = \frac{1}{W^3} e_{12}^2 \sin B \cos B \sin L \cos L (W^2 + (1 - e_{13}^2)) \end{aligned}$$

• Gauß-Dreibein

$$\begin{aligned}
g_L &= \frac{a}{W^2} \begin{bmatrix} -\cos B(W \sin L + W_L \cos L) \\ (1 - e_{12}^2) \cos B(W \cos L - W_L \sin L) \\ -(1 - e_{13}^2)W_L \sin B \end{bmatrix} \\
&= \frac{a}{W^3} \begin{bmatrix} -\cos B \sin L(1 - e_{12}^2 \cos^2 B - e_{13}^2 \sin^2 B) \\ (1 - e_{12}^2) \cos B \cos L(1 - e_{13}^2 \sin^2 B) \\ (1 - e_{13}^2)e_{12}^2 \sin B \cos^2 B \sin L \cos L \end{bmatrix} \\
g_B &= \frac{a}{W^2} \begin{bmatrix} -\cos L(W \sin B + W_B \cos B) \\ -(1 - e_{12}^2) \sin L(W \sin B + W_B \cos B) \\ (1 - e_{13}^2)(W \cos B - W_B \sin B) \end{bmatrix} \\
&= \frac{a}{W^3} \begin{bmatrix} -(1 - e_{13}^2) \sin B \cos L \\ -(1 - e_{12}^2)(1 - e_{13}^2) \sin B \sin L \\ (1 - e_{13}^2) \cos B(1 - e_{12}^2 \sin^2 L) \end{bmatrix} \\
g_3 &= \begin{bmatrix} \cos B \cos L \\ \cos B \sin L \\ \sin B \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

• I. Fundamentalform G_{KL}

$$\begin{aligned}
G_{LL} &= \frac{a^2 \cos^2 B}{W^6(L, B)} \cdot \{ (1 - e_{13}^2 \sin^2 B - e_{12}^2 \cos^2 B)^2 \sin^2 L \\
&\quad + (1 - e_{12}^2)^2 (1 - e_{13}^2 \sin^2 B)^2 \cos^2 L \\
&\quad + e_{12}^4 (1 - e_{13}^2)^2 \sin^2 L \cos^2 L \sin^2 B \cos^2 B \} \\
G_{LB} &= \frac{a^2 (1 - e_{13}^2) e_{12}^2 \sin L \cos L \sin B \cos B}{W^6(L, B)} \cdot \\
&\quad \{ (1 - e_{12}^2)(1 - e_{13}^2 \sin^2 B) + (1 - e_{13}^2)(1 - e_{12}^2 \sin^2 L \cos^2 B) \} \\
G_{BB} &= \frac{a^2 (1 - e_{13}^2)^2}{W^6(L, B)} \cdot \{ 1 - 2e_{12}^2 \sin^2 L + e_{12}^4 \sin^2 L (1 - \cos^2 L \cos^2 B) \} \\
D &= \sqrt{G_{LL} G_{BB} - G_{LB}^2} = \frac{a^2 (1 - e_{12}^2)(1 - e_{13}^2) \cos B}{W^4(L, B)}
\end{aligned}$$

• II. Fundamentalform H_{KL}

$$\begin{aligned}
H_{LL} &= -\frac{a}{W} (\cos^2 B (1 - e_{12}^2 \sin^2 L) + WW_{LL}) \\
H_{LB} &= \frac{a}{W} (e_{12}^2 \sin B \cos B \sin L \cos L - WW_{LB}) \\
H_{BB} &= -\frac{a}{W} (W^2 + WW_{BB})
\end{aligned}$$

B.2 Kugelreduzierte Koordinaten Λ und Φ

• Parameterdarstellung

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cos \Lambda \cos \Phi \\ b \sin \Lambda \cos \Phi \\ c \sin \Phi \end{bmatrix}$$

$$b := a \sqrt{1 - e_{12}^2} \quad c := a \sqrt{1 - e_{13}^2}$$

• Umkehrfunktion

$$\begin{aligned} \Lambda &= \arctan \left[\frac{a}{b} \frac{y}{x} \right] && \text{für } x > 0 \\ &= (\arctan \left[\frac{a}{b} \frac{y}{x} \right]) + \pi && \text{für } x < 0 \\ &= \operatorname{sgn} y \frac{\pi}{2} && \text{für } x = 0 \wedge y \neq 0 \\ &\text{nicht definiert} && \text{für } x = 0 \wedge y = 0 \\ \Phi &= \arctan \left[\frac{1}{c} \frac{z}{\sqrt{(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2}} \right] && \text{für } x \neq 0 \vee y \neq 0 \\ &= \operatorname{sgn} z \frac{\pi}{2} && \text{für } (x = 0 \wedge y = 0) \wedge z \neq 0 \\ &\text{nicht definiert} && \text{für } x = 0 \wedge y = 0 \wedge z = 0 \end{aligned}$$

• Eigenschaften

Die kugelreduzierten Koordinaten des dreiachsigen Ellipsoids haben genau das gleiche Konstruktionsprinzip wie die des Rotationsellipsoids [Gros] [Gra4] [Gra3]. Die Längengleichen $\Lambda = \text{const}$ liegen in Ebenen, die die z -Achse enthalten. Die Breitengleichen $\Phi = \text{const}$ spannen Ebenen auf, die die z -Achse rechtwinklig schneiden und somit parallel zur x, y -Ebene sind.

• Gauß-Dreibein

$$\mathbf{g}_\Lambda = \begin{bmatrix} -a \sin \Lambda \cos \Phi \\ b \cos \Lambda \cos \Phi \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{g}_\Phi = \begin{bmatrix} -a \cos \Lambda \sin \Phi \\ -b \sin \Lambda \sin \Phi \\ c \cos \Phi \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{g}_3 = \frac{1}{a^2 \sqrt{1 - e_{13}^2 (1 - e_{12}^2 \cos^2 \Lambda) \cos^2 \Phi - e_{12}^2 (\sin^2 \Lambda \sin^2 \Phi + \cos^2 \Lambda)}} \cdot \begin{bmatrix} b c \cos \Lambda \cos \Phi \\ a c \sin \Lambda \cos \Phi \\ a b \sin \Phi \end{bmatrix}$$

• I. Fundamentalform G_{KL}

$$G_{\Lambda\Lambda} = a^2(1 - e_{12}^2 \cos^2 \Lambda) \cos^2 \Phi$$

$$G_{\Lambda\Phi} = a^2 e_{12}^2 \sin \Lambda \cos \Lambda \sin \Phi \cos \Phi$$

$$G_{\Phi\Phi} = a^2(1 - e_{13}^2 \cos^2 \Phi - e_{12}^2 \sin^2 \Lambda \sin^2 \Phi)$$

$$D = a^2 \cos \Phi \sqrt{1 - e_{13}^2(1 - e_{12}^2 \cos^2 \Lambda) \cos^2 \Phi - e_{12}^2(\sin^2 \Lambda \sin^2 \Phi + \cos^2 \Lambda)}$$

• II. Fundamentalform H_{KL}

$$H_{\Lambda\Lambda} = \frac{-abc \cos^2 \Phi}{a^2 \sqrt{1 - e_{13}^2(1 - e_{12}^2 \cos^2 \Lambda) \cos^2 \Phi - e_{12}^2(\sin^2 \Lambda \sin^2 \Phi + \cos^2 \Lambda)}}$$

$$H_{\Lambda\Phi} = 0$$

$$H_{\Phi\Phi} = \frac{-abc}{a^2 \sqrt{1 - e_{13}^2(1 - e_{12}^2 \cos^2 \Lambda) \cos^2 \Phi - e_{12}^2(\sin^2 \Lambda \sin^2 \Phi + \cos^2 \Lambda)}}$$

B.3 Ellipsoidzentrische Koordinaten λ und φ

• Parameterdarstellung

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = r(\lambda, \varphi) \begin{bmatrix} \cos \lambda \cos \varphi \\ \sin \lambda \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix}$$

$$r(\lambda, \varphi) = \frac{a \sqrt{1 - e_{12}^2} \sqrt{1 - e_{13}^2}}{\sqrt{1 - e_{13}^2 \cos^2 \varphi - e_{12}^2 \sin^2 \varphi - e_{12}^2 (1 - e_{13}^2) \cos^2 \lambda \cos^2 \varphi}}$$

• Umkehrfunktion

$$\begin{aligned} \lambda &= \arctan \left[\frac{y}{x} \right] && \text{für } x > 0 \\ &= \left(\arctan \left[\frac{y}{x} \right] \right) + \pi && \text{für } x < 0 \\ &= \operatorname{sgn} y \frac{\pi}{2} && \text{für } x = 0 \wedge y \neq 0 \\ &\text{nicht definiert} && \text{für } x = 0 \wedge y = 0 \\ \varphi &= \arctan \left[\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right] && \text{für } x \neq 0 \vee y \neq 0 \\ &= \operatorname{sgn} z \frac{\pi}{2} && \text{für } (x = 0 \wedge y = 0) \wedge z \neq 0 \\ &\text{nicht definiert} && \text{für } x = 0 \wedge y = 0 \wedge z = 0 \end{aligned}$$

• Eigenschaften

Nur die Längenzirkel liegen in Ebenen. Die Parameterlinien schneiden sich nicht (wie z.B. bei der Kugel und beim Rotationsellipsoid) unter rechten Winkeln.

• Ableitungen von $r(\lambda, \varphi)$

$$\begin{aligned} r_\lambda &= -r^3 \frac{e_{12}^2 \cos^2 \varphi \sin \lambda \cos \lambda}{a^2 (1 - e_{12}^2)} \\ r_\varphi &= -r^3 \sin \varphi \cos \varphi \frac{e_{13}^2 (1 - e_{12}^2 \cos^2 \lambda)}{a^2 (1 - e_{12}^2) (1 - e_{13}^2)} \\ r_{\lambda\lambda} &= -\frac{e_{12}^2 \cos^2 \varphi}{a^2 (1 - e_{12}^2)} r^2 \{3r_\lambda \sin \lambda \cos \lambda + r(\cos^2 \lambda - \sin^2 \lambda)\} \\ r_{\varphi\varphi} &= -\frac{e_{13}^2 (1 - e_{12}^2 \cos^2 \lambda)}{a^2 (1 - e_{12}^2) (1 - e_{13}^2)} r^2 \{3r_\varphi \sin \varphi \cos \varphi + r(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)\} \\ r_{\lambda\varphi} &= -\frac{e_{12}^2 \sin \lambda \cos \lambda}{a^2 (1 - e_{12}^2)} r^2 \cos \varphi \{3r_\varphi \cos \varphi - r \sin \varphi\} \end{aligned}$$

- Gauß-Dreibein

$$\mathbf{g}_\lambda = \begin{bmatrix} \cos \varphi (r_\lambda \cos \lambda - r \sin \lambda) \\ \cos \varphi (r_\lambda \sin \lambda + r \cos \lambda) \\ \sin \varphi r_\lambda \end{bmatrix} \quad \mathbf{g}_\varphi = \begin{bmatrix} \cos \lambda (r_\varphi \cos \varphi - r \sin \varphi) \\ \sin \lambda (r_\varphi \cos \varphi - r \sin \varphi) \\ (r_\varphi \sin \varphi + r \cos \varphi) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{g}_3 = \frac{r}{\sqrt{(r^2 \cos^2 \varphi + r_\lambda^2)(r^2 + r_\varphi^2)}} \begin{bmatrix} r \cos^2 \varphi \cos \lambda + r_\varphi \sin \varphi \cos \varphi \cos \lambda + r_\lambda \sin \lambda \\ r \cos^2 \varphi \sin \lambda + r_\varphi \sin \varphi \cos \varphi \sin \lambda - r_\lambda \cos \lambda \\ r \cos \varphi \sin \varphi - r_\varphi \cos^2 \varphi \end{bmatrix}$$

- I. Fundamentalform G_{KL}

$$\begin{aligned} G_{\lambda\lambda} &= r^2 \cos^2 \varphi + r_\lambda^2 \\ G_{\lambda\varphi} &= r_\lambda r_\varphi \\ G_{\varphi\varphi} &= r^2 + r_\varphi^2 \\ D &= r^2 (\cos^2 (r^2 + r_\varphi^2) + r_\lambda^2) \end{aligned}$$

- II. Fundamentalform H_{KL}

$$\begin{aligned} H_{\lambda\lambda} &= \frac{r \cos \varphi}{\sqrt{(r^2 \cos^2 \varphi + r_\lambda^2)(r^2 + r_\varphi^2)}} (rr_{\lambda\lambda} - 2r_\lambda^2 - r^2 \cos^2 \varphi - rr_\varphi \sin \varphi \cos \varphi) \\ H_{\lambda\varphi} &= \frac{r \cos \varphi}{\sqrt{(r^2 \cos^2 \varphi + r_\lambda^2)(r^2 + r_\varphi^2)}} (rr_{\lambda\varphi} - 2r_\lambda r_\varphi + rr_\lambda \tan \varphi) \\ H_{\varphi\varphi} &= \frac{r \cos \varphi}{\sqrt{(r^2 \cos^2 \varphi + r_\lambda^2)(r^2 + r_\varphi^2)}} (rr_{\varphi\varphi} - 2r_\varphi^2 - r^2) \end{aligned}$$

B.4 Elliptische Flächenkoordinaten μ und ν

- Parameterdarstellung

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \sqrt{\frac{(a^2-\lambda)(a^2-\mu)(a^2-\nu)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}} \\ b \sqrt{\frac{(b^2-\lambda)(b^2-\mu)(b^2-\nu)}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)}} \\ c \sqrt{\frac{(c^2-\lambda)(c^2-\mu)(c^2-\nu)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}} \end{bmatrix}$$

λ, μ und ν heißen elliptische Raumkoordinaten. Für $\lambda = 0$ befindet man sich direkt auf der Ellipsoidoberfläche, welche dann in elliptischen Flächenkoordinaten (μ, ν) parametrisiert ist.

- Eigenschaften

Die zueinander orthogonalen μ - und ν -Parameterlinien entsprechen den Krümmungslinien des dreiachsigen Ellipsoids.

- Gauß-Dreibein

$$\mathbf{g}_\mu = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \frac{-a}{\sqrt{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}} \sqrt{\frac{a^2-\nu}{a^2-\mu}} \\ \frac{1}{2} \frac{-b}{\sqrt{(b^2-a^2)(b^2-c^2)}} \sqrt{\frac{b^2-\nu}{b^2-\mu}} \\ \frac{1}{2} \frac{-c}{\sqrt{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}} \sqrt{\frac{c^2-\nu}{c^2-\mu}} \end{bmatrix} \quad \mathbf{g}_\nu = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \frac{-a}{\sqrt{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}} \sqrt{\frac{a^2-\mu}{a^2-\nu}} \\ \frac{1}{2} \frac{-b}{\sqrt{(b^2-a^2)(b^2-c^2)}} \sqrt{\frac{b^2-\mu}{b^2-\nu}} \\ \frac{1}{2} \frac{-c}{\sqrt{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}} \sqrt{\frac{c^2-\mu}{c^2-\nu}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{g}_3 = \frac{1}{\mu\nu} \begin{bmatrix} b^2 c^2 a \sqrt{\frac{(a^2-\mu)(a^2-\nu)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}} \\ a^2 c^2 b \sqrt{\frac{(b^2-\mu)(b^2-\nu)}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)}} \\ a^2 b^2 c \sqrt{\frac{(c^2-\mu)(c^2-\nu)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}} \end{bmatrix}$$

- I. Fundamentalform G_{KL}

$$\begin{aligned} G_{\mu\mu} &= \frac{\mu(\mu-\nu)}{4(a^2-\mu)(b^2-\mu)(c^2-\mu)} \\ G_{\mu\nu} &= 0 \\ G_{\nu\nu} &= \frac{\nu(\nu-\mu)}{4(a^2-\nu)(b^2-\nu)(c^2-\nu)} \\ D &= \frac{\mu-\nu}{4} \sqrt{\frac{-\mu\nu}{(a^2-\mu)(b^2-\mu)(c^2-\mu)(a^2-\nu)(b^2-\nu)(c^2-\nu)}} \end{aligned}$$

- II. Fundamentalform H_{KL}

$$\begin{aligned} H_{\mu\mu} &= \frac{a^2 b^2 c^2}{\mu\nu} \frac{(\nu-\mu)}{4(a^2-\mu)(b^2-\mu)(c^2-\mu)} \\ H_{\mu\nu} &= 0 \\ H_{\nu\nu} &= \frac{a^2 b^2 c^2}{\mu\nu} \frac{(\mu-\nu)}{4(a^2-\nu)(b^2-\nu)(c^2-\nu)} \end{aligned}$$

- Krümmungsmatrix K_{KL}

$$\begin{aligned} K_{\mu\mu} &= \frac{a^2 b^2 c^2}{\mu^2 \nu} \\ K_{\mu\nu} &= 0 \\ K_{\nu\mu} &= 0 \\ K_{\nu\nu} &= \frac{a^2 b^2 c^2}{\mu \nu^2} \end{aligned}$$

- Christoffelsymbole

$$\begin{aligned} \Gamma_1^1{}^1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{2\mu - \nu}{\mu(\mu - \nu)} + \frac{1}{a^2 - \mu} + \frac{1}{b^2 - \mu} + \frac{1}{c^2 - \mu} \right) \\ \Gamma_1^1{}^2 &= \Gamma_2^1{}^1 = -\frac{1}{2(\mu - \nu)} \\ \Gamma_2^1{}^2 &= \frac{(a^2 - \mu)(b^2 - \mu)(c^2 - \mu)}{(a^2 - \nu)(b^2 - \nu)(c^2 - \nu)} \frac{-\nu}{\mu(\nu - \mu)} \\ \Gamma_1^2{}^1 &= \frac{(a^2 - \nu)(b^2 - \nu)(c^2 - \nu)}{(a^2 - \mu)(b^2 - \mu)(c^2 - \mu)} \frac{-\mu}{\nu(\mu - \nu)} \\ \Gamma_1^2{}^2 &= \Gamma_2^2{}^1 = -\frac{1}{2(\nu - \mu)} \\ \Gamma_2^2{}^2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{2\nu - \mu}{\nu(\nu - \mu)} + \frac{1}{a^2 - \nu} + \frac{1}{b^2 - \nu} + \frac{1}{c^2 - \nu} \right) \end{aligned}$$

B.5 Elliptisch-trigonometrische Koordinaten ϕ und ψ

- Parameterdarstellung

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cos \psi \sqrt{\cos^2 \phi + \frac{e_{12}^2}{e_{13}^2} \sin^2 \phi} \\ b \sin \psi \cos \phi \\ c \sin \phi \sqrt{1 - \frac{e_{12}^2}{e_{13}^2} \cos^2 \psi} \end{bmatrix}$$

- Zusammenhang zwischen elliptischen und elliptisch-trigonometrischen Koordinaten

$$\begin{aligned} \mu &= c^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi \\ \nu &= a^2 \sin^2 \psi + b^2 \cos^2 \psi \end{aligned}$$

- Eigenschaften

Die elliptisch-trigonometrischen Koordinaten werden durch eine Umskalierung der sehr unhandlichen, nur im 1. Quadranten eindeutigen elliptischen Koordinaten generiert; sie stellen somit ebenfalls ein orthogonales Parametersystem dar.

- Gauß-Dreibein

$$g_{\psi} = \begin{bmatrix} -a \sin \psi \sqrt{\cos^2 \phi + \frac{e_{12}^2}{e_{13}^2} \sin^2 \phi} \\ b \cos \psi \cos \phi \\ c \sin \phi \frac{\frac{e_{12}^2}{e_{13}^2} \cos \psi \sin \psi}{\sqrt{1 - \frac{e_{12}^2}{e_{13}^2} \cos^2 \psi}} \end{bmatrix}$$

$$g_{\phi} = \begin{bmatrix} a \cos \psi \sin \phi \cos \phi \frac{\frac{e_{12}^2}{e_{13}^2} - 1}{\sqrt{\cos^2 \phi + \frac{e_{12}^2}{e_{13}^2} \sin^2 \phi}} \\ -b \sin \psi \sin \phi \\ c \cos \phi \sqrt{1 - \frac{e_{12}^2}{e_{13}^2} \cos^2 \psi} \end{bmatrix}$$

$$g_3 = \frac{1}{a^2 \sqrt{(1 - e_{12}^2 \cos^2 \psi)(1 - e_{12}^2 \sin^2 \phi - e_{13}^2 \cos^2 \phi)}} \begin{bmatrix} bc \cos \psi \sqrt{\cos^2 \phi + \frac{e_{12}^2}{e_{13}^2} \sin^2 \phi} \\ ac \sin \psi \cos \phi \\ ab \sin \phi \sqrt{1 - \frac{e_{12}^2}{e_{13}^2} \cos^2 \psi} \end{bmatrix}$$

- I. Fundamentalform G_{KL}

$$G_{\psi\psi} = a^2 \left\{ e_{12}^2 \frac{e_{12}^2}{e_{13}^2} \sin^2 \phi (\cos^2 \phi - \sin^2 \psi) + \frac{e_{12}^2}{e_{13}^2} (\sin^2 \phi - \cos^2 \psi) + e_{12}^2 \cos^2 \phi (\cos^2 \psi - 2 \sin^2 \phi) - e_{13}^2 \cos^4 \phi + \cos^2 \phi \right\}$$

$$G_{\psi\phi} = 0$$

$$G_{\phi\phi} = a^2 \left\{ e_{12}^2 (1 + \frac{e_{12}^2}{e_{13}^2} \cos^4 \psi \cos^2 \phi) + \frac{e_{12}^2}{e_{13}^2} (\sin^2 \phi - \cos^2 \psi) + e_{13}^2 \sin^2 \psi \cos^2 \psi \sin^2 \phi + \cos^2 \phi \right\}$$

• II. Fundamentalform H_{KL}

$$\begin{aligned}
 H_{\psi\psi} &= \frac{abc}{a^2 \sqrt{(1 - e_{12}^2 \cos^2 \psi)(1 - e_{12}^2 \sin^2 \phi - e_{13}^2 \cos^2 \phi)}} \frac{-\cos^2 \phi + \frac{e_{12}^2}{e_{13}^2} (\cos^2 \psi - \sin^2 \phi)}{\sqrt{1 - \frac{e_{12}^2}{e_{13}^2} \cos^2 \psi}} \\
 H_{\psi\phi} &= 0 \\
 H_{\phi\phi} &= \frac{abc}{a^2 \sqrt{(1 - e_{12}^2 \cos^2 \psi)(1 - e_{12}^2 \sin^2 \phi - e_{13}^2 \cos^2 \phi)}} \frac{-\cos^2 \phi + \frac{e_{12}^2}{e_{13}^2} (\cos^2 \psi - \sin^2 \phi)}{\sqrt{\cos^2 \phi + \frac{e_{12}^2}{e_{13}^2} \sin^2 \phi}}
 \end{aligned}$$

B.6 Isometrische Parameter P und Q

In Kapitel 5.2 wurden bereits Differentialgleichungen für isometrische Koordinaten mit Hilfe von Laplace-Beltrami-DGn entwickelt. Eine weitere Möglichkeit wäre, nach Anhang A.10 vorzugehen.

Das Bogenelement in elliptischen Flächenkoordinaten ergibt sich zu

$$ds^2 = h(\mu, \nu) \{f(\mu) d\mu^2 + g(\nu) d\nu^2\},$$

welches in isometrischen Koordinaten folgende Form hat

$$ds^2 = h(P, Q) \{dP^2 + dQ^2\}.$$

Für die isometrischen Koordinaten (P, Q) gilt somit

$$P = P(\mu) = \int_{\mu_0}^{\mu} \sqrt{f(\mu)} d\mu \qquad Q = Q(\nu) = \int_{\nu_0}^{\nu} \sqrt{g(\nu)} d\nu$$

mit $f(\mu) = \frac{-\mu}{4(a^2 - \mu)(b^2 - \mu)(c^2 - \mu)}$, $g(\nu) = \frac{\nu}{4(a^2 - \nu)(b^2 - \nu)(c^2 - \nu)}$ und $h(\mu, \nu) = (\nu - \mu)$.

Es müssen also die Integrale

$$\begin{aligned} P(\mu) &= \int_{\mu_0}^{\mu} \sqrt{\frac{-\mu}{4(a^2 - \mu)(b^2 - \mu)(c^2 - \mu)}} d\mu \\ Q(\nu) &= \int_{\nu_0}^{\nu} \sqrt{\frac{\nu}{4(a^2 - \nu)(b^2 - \nu)(c^2 - \nu)}} d\nu \end{aligned} \quad (89)$$

gelöst werden. Nach [Bron] (p.375) läßt sich $\frac{1}{\sqrt{f(x)}}$ mit $f(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 + a_5x^4 \dots$ in eine Potenzreihe entwickeln.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{f(x)}} &= \frac{1}{\sqrt{a_1}} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{a_2}{a_1} x + \left(\frac{3}{8} \frac{a_2^2}{a_1^2} - \frac{1}{2} \frac{a_3}{a_1} \right) x^2 + \left(\frac{3}{4} \frac{a_2 a_3}{a_1^2} - \frac{1}{2} \frac{a_4}{a_1} - \frac{5}{16} \frac{a_2^3}{a_1^3} \right) x^3 + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{3}{4} \frac{a_2 a_4}{a_1^2} + \frac{3}{8} \frac{a_3^2}{a_1^2} - \frac{1}{2} \frac{a_5}{a_1} - \frac{15}{16} \frac{a_2^2 a_3}{a_1^3} + \frac{35}{128} \frac{a_2^4}{a_1^4} \right) x^4 + \dots \right) \end{aligned}$$

Die Integrale (89) lassen sich somit gliedweise integrieren, und es ergibt sich für $P(\mu)$ und $Q(\nu)$:

$$\begin{aligned}
 P &= -\frac{\sqrt{\mu}}{abc} [A\mu + B\mu^2 + C\mu^3 + D\mu^4 + E\mu^5] \\
 Q &= -\frac{\sqrt{\nu}}{abc} [A\nu + B\nu^2 + C\nu^3 + D\nu^4 + E\nu^5]
 \end{aligned}
 \tag{90}$$

mit

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{3}{2} \\
 B &= \frac{5}{4} \frac{(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)}{a^2b^2c^2} \\
 C &= \frac{7}{2} \left(\frac{3}{8} \frac{(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)^2}{a^4b^4c^4} - \frac{1}{2} \frac{(a^2 + b^2 + c^2)}{a^2b^2c^2} \right) \\
 D &= \frac{9}{2} \left(-\frac{3}{4} \frac{(a^2 + b^2 + c^2)(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)}{a^4b^4c^4} + \frac{1}{2} \frac{1}{a^2b^2c^2} + \frac{5}{16} \frac{(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)^3}{a^6b^6c^6} \right) \\
 E &= \frac{11}{2} \left(\frac{3}{4} \frac{(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)}{a^4b^4c^4} + \frac{3}{8} \frac{(a^2 + b^2 + c^2)}{a^4b^4c^4} - \frac{15}{16} \frac{(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)^2(a^2 + b^2 + c^2)}{a^6b^6c^6} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{35}{128} \frac{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}{a^8b^8c^8} \right)
 \end{aligned}$$

mit a, b, c : Ellipsoidhalbachsen

Literatur

- [Bur1] Burša M.
Tidal origin of tri-axiality of synchronously orbiting satellites. Bull. Astron. Inst. Czechoslovakia 40(1989), 105-108, Praha, June 1988.
- [Bur2] Burša M.
The Phobos gravitational field modeled on the basis of its topography. Earth, Moon, and Planets 45: 219-235, 1989.
- [Bron] Bronstein I.N., Semendjajew K.A.
Taschenbuch der Mathematik . Harri Deutsch Verlag, Thun, Frankfurt/Main, 22.Auflage, 1985.
- [Eits] Eitschberger B.
Ein Geodätisches Weltdatum aus terrestrischen und Satellitendaten. DGK, Reihe C, Heft Nr. 245, München 1978.
- [Gra1] Grafarend E.W.
Skript zur Vorlesung Kartenprojektionen. Universität Stuttgart 1986.
- [Gra2] Grafarend E.W.
Skript zur Vorlesung Grundzüge der Geodäsie II. Universität Stuttgart 1988.
- [Gra3] Grafarend E.W.
Skript zur Vorlesung Differentialgeometrie. Universität Stuttgart 1988.
- [GrLo] Grafarend E.W., Lohse P.
The minimal distance mapping of the topographic surface onto the (reference) ellipsoid of revolution. Eingereicht bei manuscripta geodaetica. Stuttgart 1990.
- [Gra4] Grafarend E.W., Kleusberg A., Schaffrin B.
Skript zur Vorlesung Landesvermessung. Universität Stuttgart 1988.
- [Gros] Großmann W.
Geodätische Rechnungen und Abbildungen in der Landesvermessung. Konrad Wittwer Verlag, Stuttgart 1976.
- [Hake] Hake G.
Kartographie I, Sammlung Göschen. Walter de Gruyter Verlag, Berlin, New York 1982.
- [Heck] Heck B.
Rechenverfahren und Auswertemodelle der Landesvermessung - Klassische und moderne Methoden. Herbert Wichmann Verlag, Karlsruhe 1987.
- [Joos] Joos G.
Pseudokonische und Pseudoazimutale Abbildungen. Selbständige Arbeit am Geodätischen Institut der Universität Stuttgart 1989.
- [Kli1] Klingenberg W.
Riemannian Geometry. Walter de Gruyter Verlag, Berlin, New York 1982.
- [Kli2] Klingenberg W.
Eine Vorlesung über Differentialgeometrie. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972.

- [Lee] Lee L.P.
Some conformal projections based on elliptic functions. The Geographical Review, Volume LV, New York 1965.
- [Merk] Merkel H.
Grundzüge der Kartenprojektionslehre Teil I. Die theoretischen Grundlagen. Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, München 1956.
- [Slh1] Schliephake G.
Berechnungen auf dem dreiachsigen Erdellipsoid nach Krassowskij. Vermessungstechnik, 4.Jg., Heft 1, VEB Verlag Technik, Berlin 1956.
- [Slh2] Schliephake G.
Geodätische Rechnungen auf dem dreiachsigen Erdellipsoid nach Krassowskij. Dissertation an der technischen Hochschule Dresden, 1955.
- [Sml1] Schmehl H.
Untersuchungen über ein allgemeines Erdellipsoid. Veröffentlichung des Preussischen Geodätischen Institutes, Neue Folge Nr. 98, Potsdam 1927.
- [Sml2] Schmehl H.
Geschlossene geodätische Linien auf dem Ellipsoid. Zeitschrift für Vermessungswesen, Band LIX, Heft 1, Januar, Potsdam 1930.
- [Snyd] Snyder J.P.
Conformal Mapping of the Triaxial Ellipsoid. U.S.Geological Survey, Survey Review Vol. 28, 217, July 1985.
- [Stru] Strubecker K.
Differentialgeometrie II, Theorie der Flächenmetrik. Sammlung Göschen, Band 1179/1179a Walter de Gruyter Verlag, Berlin 1958.
- [Vie1] Viesel H.
Über einfach geschlossene geodätische Linien auf dem Ellipsoid. Archiv der Mathematik, Vol.22, Birkhäuser Verlag, Basel, Stuttgart 1971.
- [Weig] Weightman J.A.
A projection for a triaxial ellipsoid: The generalised stereographic projection, Empire Survey Review, No.120, April 1961.
- [Wu] Wu S.C.
A method of defining topographic datums of planetary bodies. Annales de Géophysique, tome 37, numéro 1, Flagstaff, Arizona 1981.

Dank

An dieser Stelle möchte ich mich ganz herzlich bei E.W. Grafarend und J. Engels für die Betreuung dieser Diplomarbeit bedanken.