Universität Stuttgart
Studiengang Vermessungswesen

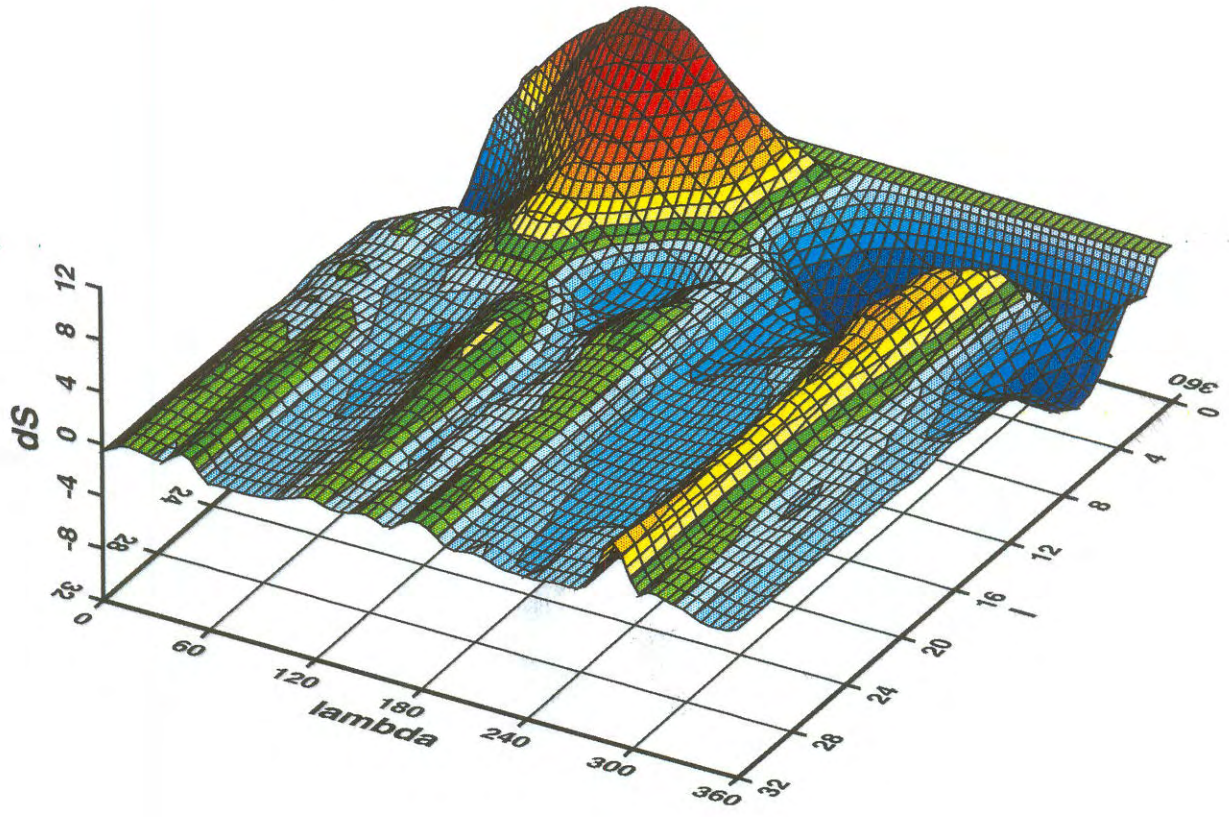
Diplomarbeit

Räumlich – Spektrale Lokalisierung von Kugelfunktionsentwicklungen des Geoids und der Topographie

von

Ulrich Meyer

Betreuer:
Prof. Dr. E.W. Grafarend
Geodätisches Institut, Universität Stuttgart
Dr. P. Schwintzer
GeoForschungsZentrum Potsdam (GFZ)
AB1 „Kinematik und Dynamik der Erde“



Potsdam, im März 1999

Inhaltsverzeichnis

Abstract, Zusammenfassung 2

1. Einleitung 3

2. Grundlagen der Transformation zur Lokalisierung von Daten auf der Kugel 4

2.1 Gefensterte Fourier – Transformation und Wavelet – Transformation 4

2.2 Transformation zur Lokalisierung von Kugelfunktionen 7

2.3 Wahl und Konstruktion des Fensters 9

2.4 Definition Statistischer Größen 13

2.5 Numerisches Demonstrationsbeispiel 14

2.6 Rechenprogramme 16

3. Anwendung der Lokalisierungs – Transformation 21

3.1 Geoid und Topographie: Ausgangsmodelle und statistische Eigenschaften 21

3.2 Geophys. Bedeutung großräumiger Geoidstrukturen und spektrale Zuordnung 27

3.3 Lokalisierungen von Geoid und Topographie über Erdoberfläche und Spektrum 28
3.3.1 Geoidundulationen 28
3.3.2 Topographie 29
3.3.3 Korrelation und Admittanz 30

3.4 Detaillierte Untersuchungen prägnanter Geoidstrukturen 31
3.4.1 Geoid – Tief südlich Indiens 31
3.4.2 Geoid – Hoch über den Anden 39

Literaturliste 48

Anhang

A1 Normierung 49
A2 Wigner – 3lm – Symbole 52
A3 Rotation des Originalfeldes 53

B Quellcode: LOCAL 55
STATIS 61
SMITTE 63
ROT 65

C Schaubilder zu 3.3 69

Abstract:

A common way to represent global geometrical or geophysical data such as i.e. the topography or the gravity of the earth is to develop it into spherical harmonics. By doing this we get the spectral content of the data.

But since spherical harmonic functions are not spatially compact they are only of limited use for regional analysis. Therefore a technique has been developed by M. Simons at al. (1997) to estimate the frequency content of a signal as a function of position which they called „Spatio-Spectral Localization on a Sphere".

This localization method is represented here and a FORTRAN77 programme is submitted.

The method is illustrated by a synthetic example and then applied to the spherical harmonic expansions of the geoid and the topography. On the basis of two selected areas of the world (North Indian Sea, Andes) spectral and spatial localizations of the geoid and the topography and the localized correlation and admittance between both fields are shown.

The geoid low of the North Indian Sea is characterized by long wavelength signal and supposed to be of deep mantle origin where the high above the Andes is extended in the spectral domain over a broad band to higher degree coefficiants, reflecting crustal isostatic compensation

Zusammenfassung:

Eine gebräuchliche Methode globale geometrische oder geophysikalische Daten wie zum Beispiel die Topographie oder das Geoid darzustellen, ist deren Entwicklung in Kugelflächenfunktionen. Auf diese Weise erhalten wir das Spektrum der Daten.

Da aber Kugelflächenfunktionen nicht lokalisieren, sind sie nur von beschränktem Nutzen für regionale Analysen. Um dem abzuhelfen, hat M. Simons (1997) eine Technik zur Abschätzung des Frequenzanteils eines Signals als Funktion der Position entwickelt, die er „Räumlich – Spektrale Lokalisierung von Kugelfunktionen" genannt hat.

Diese Lokalisierungs – Transformation wird hier beschrieben und ein FORTRAN77 – Programm beigefügt.

Die Transformation wird durch ein numerisches Beispiel veranschaulicht und dann auf Kugelfunktionsentwicklungen des Geoides und der Topographie angewandt. An Hand zweier ausgewählter Beispiele (Nördlicher Indischer Ozean, Anden) werden spektrale und räumliche Lokalisierungen des Geoides und der Topographie durchgeführt und die Admittanz und Korrelation zwischen den beiden lokalisierten Feldern berechnet.

Das Geoid – Tief südlich Indiens wird durch langwellige Frequenzen charakterisiert und sein Ursprung im unteren Mantel vermutet, während das Hoch über den Anden ein breites Spektrum abdeckt bis hin zu Koeffizienten höherer Ordnung und damit isostatische Kompensationsprozessse der Kruste wiederspiegelt.

Keywords: geoid, gravity, spherical harmonics, localization techniques, wavelets

1. Einleitung

Betrachtet man globale geometrische oder geophysikalische Daten wie z.B. solche vom Typ Topographie oder Geoid, so hat man die Möglichkeit, diese Daten entweder räumlich oder in Kugelflächenfunktionen entwickelt spektral darzustellen. Eine rein räumliche Darstellung bietet maximale räumliche Auflösung ohne spektrale Auflösung, eine rein spektrale Darstellung dementsprechend maximale spektrale Auflösung ohne räumliche Auflösung.

Will man nun regional begrenzte Gebiete untersuchen, ist eine spektrale Darstellung in Kugelflächenfunktionen nur begrenzt aussagekräftig. Vielmehr ist man nur am Frequenzanteil des betrachteten Gebietes interessiert. Es gilt also eine Fenstertechnik für Kugelflächenfunktionen analog zu der eindimensionalen gefensterten Fourier-Transformation oder der Wavelet-Transformation zu entwickeln.

Ein solches Verfahren haben **M. Simons et al. (1997)** unter dem Namen „**Spatio-Spectral Localization on a Sphere**" veröffentlicht. Dieses Verfahren stellt im Gegensatz zur Wavelet-Transformation, die von einer räumlichen Darstellung ausgeht, eine Fensterung der spektralen Darstellung in Kugelflächenfunktionen dar.

Meine Aufgabe war es, im Rahmen dieser Diplomarbeit die Lokalisierungs – Transformation zu erläutern und ein Programm zur Berechnung der lokalisierten Koeffizienten aus den Koeffizienten der Originalfelder zu entwickeln.Die Funktionsweise der Transformation sollte ich an synthetischen Testdaten darstellen und sie dann exemplarisch auf zwei ausgewählte Regionen der Erde anwenden. Ich habe dazu das Geoid-Tief südlich Indiens als Beispiel für eine Struktur, die sich im langwelligen Bereich abbildet, und das Hoch über den Anden als Beispiel für eine durch Topographie bedingte Struktur im kürzerwelligen Bereich gewählt.

Mit Hilfe dieser Lokalisierungstechnik erhält man an jedem beliebigen Ort einen kompletten Satz lokalisierter Koeffizienten, der isoliert dargestellt und analysiert werden kann. Werden Lokalisierungen für größere Gebiete oder den ganzen Globus durchgeführt, läßt sich zeigen, an welchen Stellen welche Wellenlängen mit besonders großem oder unterdurchschnittlichem Gewicht in das Originalfeld eingehen.

Auf die Kugelflächenfunktionsentwicklungen des Geoids und der Topographie angewendet läßt sich zum Beispiel die Korrelation und der Regressionkoeffizient zwischen Topographie und Geoidundulationen für Orte mit ausgeprägter Topographie (z.B. Anden oder Himalaya) für Wellenlängen kleiner als ca. 3000 km deutlich zeigen und durch isostatischen Massenausgleich in der oberen Lithosphäre erklären.

Auf der anderen Seite wird erkennbar, welche Geoidundulationen nicht mehr durch Topographie zu erklären sind, wie z.B. im langwelligen Bereich die Depressionen über Südindien und der Hudson Bay. Die Frequenzanteile dieser Strukturen können verglichen werden um sie z.B. auf dynamische Prozesse im Erdmantel zu untersuchen.

Gerade auch im Bezug auf neue Satellitenmissionen wie z.B. der Champ-Mission, die verfeinerte Schwerefeldmodelle liefern werden, steht mit dieser Lokalisierungstransformation also ein weiteres aussagekräftiges Analyseinstrument zur Verfügung.

2. Grundlagen der Transformation zur Lokalisierung von Kugelfunktionen

2.1 Gefensterte Fourier - Transformation und Wavelet - Transformation

Um den vorgestellten Lokalisierungs-Algorithmus richtig verstehen und einordnen zu können, ist es hilfreich, ihn im Zusammenhang mit der **gefensterten Fourier-Transformation** und der **Wavelet-Transformation** zu sehen. Dazu wird hier eine kurze Einführung in diese Transformationen gegeben, die sich an A.K. Louis et al. (1994) orientiert.

Ausgangspunkt ist die eindimensionale **kontinuierliche Fourier-Transformation**

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt$$

mit ihrer inversen kontinuierlichen Transformation $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega$; $e^{-i\omega t}$ wird dabei als **Basisfunktion** der Fourier-Transformation bezeichnet. Diese Transformation ermöglicht den Übergang zwischen der Darstellung eines Signals im Zeitbereich f(t) und der entsprechenden Darstellung im Frequenzbereich F(ω).

Die Darstellung im Zeitbereich hat eine maximale Zeitauflösung, dafür keine Frequenzauflösung, während die Darstellung im Frequenzbereich dementsprechend eine maximale Frequenzauflösung und keine Zeitauflösung hat. Um den Anteil einer ausgewählten Frequenz ω_0 zu einem ausgewählten Zeitpunkt t_0, d.h. eine Lokalisierung von f(t) bzw. F(ω) um ω_0, t_0 sichtbar zu machen, wird die **gefensterte Fourier - Transformation**

$$F_w(\omega_0, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot g_{\omega_0, t_0}(t) dt$$

eingeführt, insbesondere mit der lokalisierenden Basisfunktion $g_{\omega_0, t_0}(t) = w(t - t_0) \cdot e^{-i\omega_0 t}$ und dem Fenster $w(t - t_0)$.

Allerdings ist eine gleichzeitige optimale Lokalisierung sowohl im Zeit- als auch im Frequenzbereich wegen Heisenbergs Unschärferelation nicht möglich. Eine optimale Lokalisierung in ω_0 ergäbe sich für $g_{\omega_0, t_0}(t) = e^{-i\omega_0 t}$ (siehe Fourier-Transformation), eine optimale Lokalisierung in t_0 für $g_{\omega_0, t_0}(t) = \delta_{t t_0}$ (Dirac-Impuls). Eine gleichzeitige optimale Lokalisierung in t_0 und ω_0, d.h. mit minimaler Unschärfe, ergibt sich für

$$g_{\omega_0, t_0}(t) = \pi^{-\frac{1}{4}} \cdot e^{-i\omega_0 t} \cdot e^{-\frac{1}{2}(t - t_0)^2}$$

A.K. Louis et al. (1994, S. 30).

Gehen wir von einem allgemeinen Fenster $w(t-t_0) = e^{-\frac{1}{2}a(t-t_0)^2}$ mit Fensterlänge a aus, so ergibt sich für kleine a ein zeitlich breites Fenster, dies bedeutet gute Frequenzauflösung bei schlechter Zeitauflösung; für große a ergibt sich ein zeitlich schmales Fenster, d.h. schlechte Frequenzauflösung bei guter Zeitauflösung. Ein optimales Fenster für gleichzeitige optimale Lokalisierung in ω_0 und t_0 ergäbe sich für a = 1 und den zusätzlichen Faktor $\pi^{-1/4}$

$$w(t-t_0) = \pi^{-\frac{1}{4}} \cdot e^{\frac{1}{2}(t-t_0)^2}.$$

Eine um ω_0, t_0 lokalisierte Darstellung des Signals wird erzeugt durch eine geeignete Fensterwahl, wenn je nach Bedarf eine stärker um ω_0 oder stärker um t_0 lokalisierte Version vorgegeben wird.

Die Praxis hat jedoch gezeigt, daß oft eine frequenzabhängige Zeit- bzw. Frequenzauflösung gebraucht wird. Eine solche Auflösung bietet die **Wavelet-Transformation**, bei der an die Stelle der lokalisierten Basisfunktion $w(t-t_0)\cdot e^{-i\omega_0 t}$ das Wavelet $\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$ der Breite a zur Zeit b tritt.

$$F_\psi(a,b) = \frac{1}{\sqrt{c_\psi}} \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt$$

Hierbei führt die Variation von b zu einer Verschiebung von ψ entlang der Zeitachse und die Variation von a zu einer Stauchung von ψ, wobei die Frequenzen $\omega = 2\pi / a$ herausgefiltert werden. Der Faktor c_ψ dient der Sicherstellung der Invertierbarkeit und ist hier nicht weiter von Interesse.

Die Darstellung der Frequenzanteile von f(t) findet in der Frequenz-Zeit-Ebene statt, wobei ein kleines a einer hohen Frequenz bei guter Zeit- und schlechter Frequenzauflösung entspricht, während ein großes a einer niedrigen Frequenz bei schlechter Zeit- und guter Frequenzauflösung entspricht. Hohe Frequenzen werden besser in der Zeit, niedrige Frequenzen besser in der Frequenz aufgelöst, die Auflösung ist also wie gefordert frequenzabhängig.

Je nach Anwendung kann ein geeignetes Wavelet ψ gewählt werden, es muß nur die Bedingung erfüllen, daß es Wellencharakter hat, d.h. der Mittelwert von ψ muß verschwinden

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)dt = 0.$$

Diese Bedingung gilt auch für die im Folgenden vorgestellte Lokalisierungs-Transformation von Kugelflächenfunktionen, bei der an die Stelle des Wavelets wieder, entsprechend der gefensterten Fourier-Transformation, die lokalisierte Basisfunktion, nun für Kugelflächenfunktionen, tritt.

$$\overline{X}_{lm}(\lambda,\vartheta) = W(\lambda,\vartheta)\overline{Y}_{lm}(\lambda,\vartheta)$$

$\overline{X}_{lm}(\lambda,\vartheta)$ ist hierbei die lokalisierende Basisfunktion, $W(\lambda,\vartheta)$ das Fenster (Kugelkappe) und $\overline{Y}_{lm}(\lambda,\vartheta)$ eine vollständig normierte komplexe Kugelflächenfunktionen (Basisfunktion).

Da die Bedingung des verschwindenden Mittelwertes auch für die Lokalisierungs-Transformation von Kugelflächenfunktionen gilt, möchte ich am einfacher zu überblickenden Beispiel eines Wavelets kurz untersuchen, was im Falle eines nicht verschwindenden Mittelwertes passiert.

Sei $\int_{-\infty}^{\infty}\psi(t)dt = c \neq 0$. Wählt wir $\psi_1(t) = \psi(t) - c$, so gilt $\int_{-\infty}^{\infty}\psi_1(t)dt = 0$. Eingesetzt in die Wavelet-Transformation $\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\psi(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty}f(t)\big(\psi_1(t)+c\big)dt = \int_{-\infty}^{\infty}f(t)\psi_1(t)dt + \int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cdot c dt$ ergibt sich, daß ein nicht verschwindender Mittelwert von ψ zu einem schwer einzuschätzenden Fehler $\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cdot c dt$, abhängig von f(t) und dem Mittelwert c, führt.

2.2 Transformation zur Lokalisierung von Kugelfunktionen

Ziel ist es, die Frequenzanteile einer Kugelflächenfunktionsentwicklung, z.B. der Geoidundulationen oder der Topographie, an einer Stelle (λ,ϑ) zu erhalten. Dies geschieht durch die Faltung der Kugelflächenfunktionsentwicklung der zu untersuchenden Funktion mit der Kugelflächenfunktionsentwicklung eines frequenzabhängigen Fensters an der Stelle (λ,ϑ), M. Simons et al. (1997).

Ich verwende im Folgenden entsprechend dem Originalartikel von M. Simons et al. (1997) durchgängig die Poldistanz ϑ anstelle der gebräuchlicheren Breite ϕ. Die Umrechnung ist jedoch leicht möglich. Es gilt $\phi = 90^o - \vartheta$ und $\cos\phi = \sin\vartheta$. Eine Umstellung von ϑ auf ϕ muß auch in den Integralgrenzen berücksichtigt werden.

Gegeben sei ein in skalare Kugelflächenfunktionen entwickeltes Feld

$$A(\lambda,\vartheta) = \sum_{l_1=0}^{\infty}\sum_{m_1=-l_1}^{l_1}\overline{a}_{l_1m_1}\overline{Y}_{l_1m_1}(\lambda,\vartheta) \qquad 0 \le \vartheta \le \pi;\ 0 \le \lambda \le 2\pi$$

wobei $\overline{Y}_{l_1m_1}(\lambda,\vartheta)$ die vollständig auf 1 über der Kugel normierten komplexen Kugelflächenfunkionen sind, die im Anhang A1 im Detail erläutert werden. $\overline{a}_{l_1m_1}$ sind die entsprechend normierten komplexen Kugelflächenfunktionsentwicklungskoeffizienten

$$\overline{a}_{l_1 m_1} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} A(\lambda,\vartheta)\overline{Y}^*_{l_1 m_1}(\lambda,\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\lambda ,$$

wobei $\overline{Y}^*_{l_1 m_1}(\lambda,\vartheta) = (-1)^{m_1}\overline{Y}_{l_1 -m_1}(\lambda,\vartheta)$ die konjugiert Komplexe zu $\overline{Y}_{l_1 m_1}(\lambda,\vartheta)$ ist.

Die Fensterfunktion für Kugelflächenfunktionen basiert auf dem Ansatz

$$W(\lambda,\vartheta) = \sum_{l_2=0}^{\infty}\sum_{m_2=-l_2}^{l_2}\overline{w}_{l_2 m_2}\overline{Y}_{l_2 m_2}(\lambda,\vartheta).$$

Die lokalisierte Version Ψ von A ergibt sich aus dem Produkt von A und W

$$\Psi(\lambda,\vartheta) = W(\lambda,\vartheta)A(\lambda,\vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\overline{\psi}_{lm}\overline{Y}_{lm}(\lambda,\vartheta).$$

Die lokalisierten Koeffizienten $\overline{\psi}_{lm}$ lassen sich darstellen als

$$\begin{aligned}
\overline{\psi}_{lm} &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\Psi(\lambda,\vartheta)\overline{Y}^*_{lm}(\lambda,\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\lambda \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} W(\lambda,\vartheta)A(\lambda,\vartheta)\overline{Y}^*_{lm}(\lambda,\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\lambda \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sum_{l_2=0}^{\infty}\sum_{m_2=-l_2}^{l_2}\overline{w}_{l_2 m_2}\overline{Y}_{l_2 m_2}(\lambda,\vartheta)\sum_{l_1=0}^{\infty}\sum_{m_1=-l_1}^{l_1}\overline{a}_{l_1 m_1}\overline{Y}_{l_1 m_1}(\lambda,\vartheta)\overline{Y}^*_{lm}(\lambda,\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\lambda \\
&= \sum_{l_1=0}^{\infty}\sum_{m_1=-l_1}^{l_1}\sum_{l_2=0}^{\infty}\sum_{m_2=-l_2}^{l_2}\overline{a}_{l_1 m_1}\overline{w}_{l_2 m_2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\overline{Y}_{l_1 m_1}(\lambda,\vartheta)\overline{Y}_{l_2 m_2}(\lambda,\vartheta)\overline{Y}^*_{lm}(\lambda,\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\lambda
\end{aligned}$$

$$\overline{\psi}_{lm} = (-1)^m\sum_{l_1=0}^{\infty}\sum_{m_1=-l_1}^{l_1}\sum_{l_2=0}^{\infty}\sum_{m_2=-l_2}^{l_2}\overline{a}_{l_1 m_1}\overline{w}_{l_2 m_2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\overline{Y}_{l_1 m_1}(\lambda,\vartheta)\overline{Y}_{l_2 m_2}(\lambda,\vartheta)\overline{Y}_{l-m}(\lambda,\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\lambda .$$

In D.A. Varshalovich et al. (1988, S. 148) werden die Darstellungen

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\overline{Y}_{l_1 m_1}(\lambda,\vartheta)\overline{Y}_{l_2 m_2}(\lambda,\vartheta)\overline{Y}_{lm}(\lambda,\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\lambda = \xi_{l_1 l_2 l}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l \\ m_1 & m_2 & m\end{pmatrix}$$

$$\xi_{l_1 l_2 l} = \sqrt{\frac{(2l_1+1)(2l_2+l)(2l+1)}{4\pi}}$$

mit den Wigner-3lm-Symbolen $\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l \\ m_1 & m_2 & m\end{pmatrix}$ eingeführt. Eine Definition der Wigner-3lm-Symbole wird im Anhang A2 gegeben. Damit sie ungleich 0 werden, muß die Dreiecksungleichung $|l_1 - l_2| \le l \le l_1 + l_2$ erfüllt sein. Ferner muß gelten $m_1 + m_2 + m = 0$

und $l_1 + l_2 + l$ gerade. Die Bedingungen $|m_1| \le l_1$; $|m_2| \le l_2$; $|m| \le l$ sind entsprechend der Definition der komplexen Kugelfunktionen erfüllt.

Damit ist die Lokalisierungs-Transformation definiert. Um sie in ein Programm umzusetzen, muß nur noch ein Fenster $W(\lambda, \vartheta)$ gewählt werden (siehe Kapitel 2.3).

Die Tatsache, daß in der Praxis nur mit endlichen Reihen gerechnet werden kann, bringt eine bedeutsame Einschränkung mit sich:

Sei L_{obs} der maximale Entwicklungsgrad des Originalfeldes ($l_1 = 0,...,L_{obs}$), L_{win} der maximale Entwicklungsgrad des Fensters ($l_2 = 0,...,L_{win}$) und l_{max} der des lokalisierten Feldes. Für $l_1 > l_2$ folgt aus der Dreiecksungleichung $l_1 - l_2 \le l \Rightarrow l_1 \le l + l_2 \le L_{obs} \Rightarrow l_{max} + L_{win} = L_{obs}$, oder mit $L_{nyq} = l_{max}$:

$$L_{nyq} = L_{obs} - L_{win} .$$

Es gibt also eine Obergrenze L_{nyq} für den Entwicklungsgrad des lokalisierten Feldes. Für endliches L_{obs} gilt, je größer L_{win}, d.h. je höher die räumliche Auflösung des Fensters, desto geringer die spektrale Auflösung des lokalisierten Feldes. Wenn L_{obs} für ein globales Geoidmodell recht niedrig liegt (z.B. $L_{obs} = 72$), bedeutet dies eine ernsthafte Einschränkung, die bei der Wahl des Fensters unbedingt zu beachten ist.

2.3 Wahl und Konstruktion des Fensters

Um mit einem kleinen L_{win} auszukommen, gilt es, ein möglichst einfaches Fenster zu wählen. Ich habe mich entsprechend M. Simons für eine runde Kugelkappe mit Mittelpunkt am Pol und der Höhe eins entschieden. Durch diese Wahl des Mittelpunktes ist das Fenster unabhängig von λ, d.h. in der Kugelflächenfunktionsentwicklung verschwinden alle Terme mit Ordnung $m_2 \neq 0$. Für $m_2 = 0$ wird $e^{im_2\lambda} = 1$, d.h. es werden nur reale Koeffizienten für die Fensterentwicklung benötigt. Andererseits sollen nicht nur die Pole lokalisiert werden, es ist daher nötig, das Koordinatensystem des zu lokalisierenden Feldes so zu rotieren, daß sich die interessierende Stelle am Pol befindet. Details zur Rotation sind im Anhang A3 gegeben.

Die Größe des Fensters soll der zu lokalisierenden Wellenlänge entsprechen, d.h. mit l variieren. Das Fenster wird folgendermaßen definiert

$$W(\vartheta, \lambda) = \begin{cases} 1 & , 0 \le \vartheta \le \vartheta_c \\ 0 & , \vartheta > \vartheta_c \end{cases} \quad ; 0 \le \vartheta \le \pi ,$$

$\vartheta_c = \dfrac{\pi}{\sqrt{l_s(l_s+1)}}$ ist dabei die Größe des Fensters, $l_s = \dfrac{l}{f_s}$ der dem Maßstab entsprechende Grad, l ist der Grad der zu lokalisierenden Koeffizienten und f_s der Maßstabsfaktor der

Lokalisierung. Die dem Grad l entsprechende Wellenlänge auf der Kugel ist definiert als $\lambda = \frac{2\pi R}{\sqrt{l(l+1)}}$, d.h. es liegen f_s Wellen der Länge λ innerhalb des Fensters mit der Größe ϑ_c.

Nachfolgend wird das Fenster in Kugelflächenfunktionen entwickelt

$$W_l(\lambda,\vartheta) = \sum_{l_2=0}^{l_{2\max}} \overline{w}_{l_2 0}(\lambda,\vartheta)\overline{Y}_{l_2 0}(\lambda,\vartheta),$$

der Grad der Entwicklung $l_{2_{\max}}$ variiert dabei zwischen 0 und L_{win} und wird jeweils bis zum zu l_s nächstgrößeren oder gleichen Grad geführt. Dies entspricht einer Beschränkung auf die Koeffizienten des ersten Maximums des Spektrums des Fensters:

$$l_{2_{\max}} = int\left(l_s + 0.99999\right).$$

Für $l = L_{nyq}$ ergibt sich

$$L_{win} = int\left(l_{s_{\max}} + 0.99999\right) = int\left(\frac{l_{\max}}{f_s} + 0.99999\right) = int\left(\frac{L_{nyq}}{f_s} + 0.99999\right) \approx \frac{L_{nyq}}{f_s}.$$

Mit $L_{nyq} = L_{obs} - L_{win}$ folgt

$$L_{nyq} \approx L_{obs} - \frac{L_{nyq}}{f_s} \quad \Rightarrow \quad L_{obs} \approx L_{nyq} + \frac{L_{nyq}}{f_s} = L_{nyq} \cdot \frac{f_s + 1}{f}, \text{ d.h.}$$

$$L_{nyq} = int\left(\frac{f_s}{f_s + 1} \cdot L_{obs}\right).$$

Aus der zu Anfang aufgezeigten Analogie zu Wavelets folgt weiterhin, daß der Mittelwert der lokalisierten Kugelflächenfunktion den Wert Null erhalten muß.

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} W(\lambda,\vartheta)\overline{Y}_{lm}(\lambda,\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\lambda = 0$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sum_{l_2=0}^{l_{2\max}} \overline{w}_{l_2 0}\overline{Y}_{l_2 0}(\lambda,\vartheta)\overline{Y}_{lm}(\lambda,\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\lambda = 0$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \overline{Y}_{l_2 0}(\lambda,\vartheta)\overline{Y}_{lm}(\lambda,\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta d\lambda = \delta_{l_2 l}\delta_{0m}$$

Um $w_{l_2 0}$ zum verschwinden zu bringen, wird die Entwicklung bei $l_{2_{\max}} < l$ abgebrochen, d.h. für $l = L_{nyq}$ muß $L_{win} \le L_{nyq} - 1$ gewählt werden.

Die Wahl des Maßstabsfaktors hängt vom gewünschten Ergebnis und den vorliegenden Daten ab. Je näher f_s zu 1 gewählt wird, desto besser wird die räumliche Auflösung der Lokalisation, desto schlechter aber die spektrale Auflösung. Je größer f_s gewählt wird, desto schlechter wird die räumliche und desto besser die spektrale Auflösung, außerdem wird die Lokalisierung stabiler gegen fehlerbehaftete Daten. $f_s = 2$ hat sich als günstiger Kompromiß bewährt.

Für die hier gewählte Form des Fensters ist die Entwicklung in Kugelflächenfunktionen analytisch möglich:

$$\overline{w}'_{l_2 0} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} W(\vartheta,l)\overline{Y}^*_{l_2 0}(\lambda,\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\lambda$$

$$\overline{Y}^*_{l_2 0}(\lambda,\vartheta) = (-1)^0\,\overline{Y}_{l_2 -0}(\lambda,\vartheta) = \overline{Y}_{l_2 0}(\lambda,\vartheta)$$

$$\overline{Y}_{l_2 0}(\lambda,\vartheta) = (-1)^0\sqrt{\frac{(2l_2+1)}{4\pi}\frac{(l_2-0)!}{(l_2+0)!}}P_{l_2 0}(\cos\vartheta)e^{i\cdot 0\cdot\lambda} = \sqrt{\frac{2l_2+1}{4\pi}}P_{l_2}(\cos\vartheta)$$

$$\overline{w}'_{l_2 0} = \sqrt{\frac{2l_2+1}{4\pi}}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} W(\vartheta,l)P_{l_2}(\cos\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\lambda$$

$$= \sqrt{(2l_2+1)\pi}\int_0^{\pi} W(\vartheta,l)P_{l_2}(\cos\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\lambda$$

$$= \sqrt{(2l_2+1)\pi}\int_0^{\vartheta_c} P_{l_2}(\cos\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta$$

$$\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} P_l(\cos\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta = \left[\frac{P_{l-1}(\cos\vartheta) - P_{l+1}(\cos\vartheta)}{2l+1}\right]_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}$$

$$l_2 > 0:\quad \overline{w}'_{l_2 0} = \frac{\sqrt{(2l_2+1)\pi}}{2l_2+1}\left[P_{l_2-1}(\cos\vartheta) - P_{l_2+1}(\cos\vartheta)\right]_0^{\vartheta_c}$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2l_2+1}}\left(P_{l_2-1}(\cos\vartheta_c) - P_{l_2+1}(\cos\vartheta_c)\right)$$

$$l_2 = 0:\quad \overline{w}'_{00} = \sqrt{\pi}\int_0^{\vartheta_c}\sin\vartheta\, d\vartheta = \sqrt{\pi}(1-\cos\vartheta_c)$$

Um Konsistenz für $\vartheta_c = 0^o,\ldots,180^o$ zu wahren, muß das in Kugelflächenfunktionen entwickelte Fenster eine mittlere Amplitude von eins haben:

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} W(\vartheta,l)\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\lambda = 1$$

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} W(\vartheta,l)\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\lambda = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sum_{l_2=0}^{l_{2\max}} \overline{w}'_{l_20}\,\overline{Y}_{l_20}(\lambda,\vartheta)\sin\vartheta\,d\vartheta$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{l_2=0}^{l_{2\max}} \overline{w}'_{l_20}\int_0^{\pi}\sqrt{\frac{2l_2+1}{4\pi}}P_l(\cos\vartheta)\sin\vartheta\,d\vartheta$$

Da Kugelflächenfunktionen harmonisch sind, geht nur der Koeffizient nullten Grades in den Mittelwert ein, für alle anderen Koeffizienten verschwindet das Integral

$$= \frac{1}{2\sqrt{4\pi}}\overline{w}'_{00}\int_0^{\pi} P_o(\cos\vartheta)\sin\vartheta\,d\vartheta = \frac{\overline{w}'_{00}}{\sqrt{4\pi}}$$

$$\Rightarrow\ \overline{w}_{00} = \sqrt{4\pi} = \frac{2}{1-\cos\vartheta_c}\overline{w}'_{00}\,.$$

Alle Koeffizienten werden entsprechend skaliert, nämlich

$$\overline{w}_{l_20} = \frac{2}{1-\cos\vartheta_c}\overline{w}'_{l_20} = \frac{2}{1-\cos\vartheta_c}\sqrt{\frac{\pi}{2l_2+1}}\left(P_{l_2-1}(\cos\vartheta_c) - P_{l_2+1}(\cos\vartheta_c)\right).$$

In den folgenden Abbildungen sind die Koeffizienten der Kugelflächenfunktionsentwicklungen dreier Fenster und Schnitte durch diese Fenster entlang eines Breitenkreises dargestellt. Die Koeffizienten, die in der Entwicklung berücksichtigt werden, sind als Sterne dargestellt, alle weiteren als Punkte.

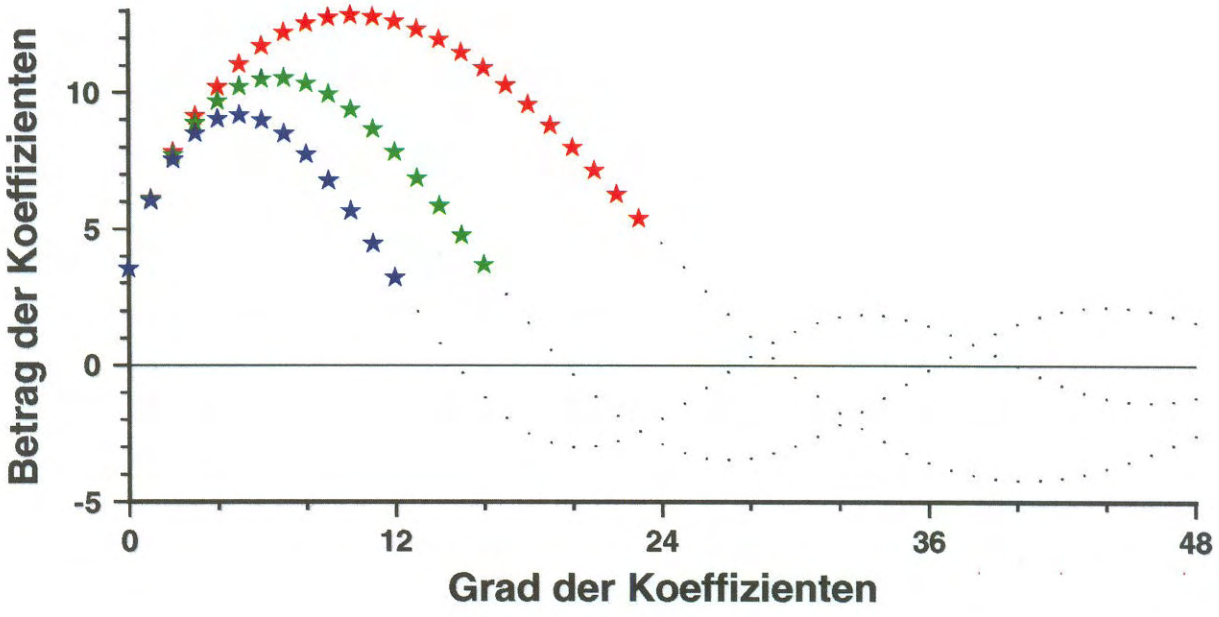


Abb. 2.3.1: Fensterkoeffizienten (rot: l = 24, f_s = 1; grün: l = 32, f_s = 2; blau: l = 36, f_s = 3)

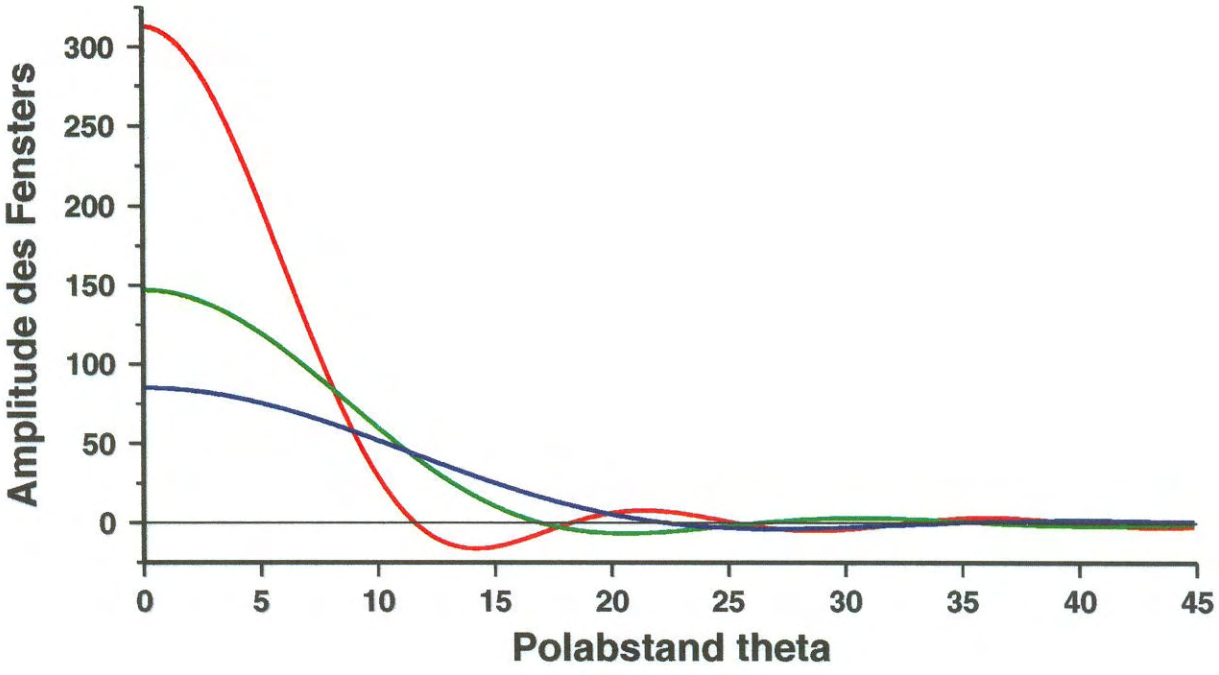


Abb. 2.3.2: Amplituden dreier Fenster (rot: $l = 24$, $f_s = 1$; grün: $l = 32$, $f_s = 2$; blau: $l = 36$, $f_s = 3$) entlang eines Breitenkreises

Für die drei Fenster und ihre Koeffizienten gilt die nachfolgende Tabelle:

rot:	grün:	blau:
$L_{obs} = 48$	$L_{obs} = 48$	$L_{obs} = 48$
$f_s = 1$	$f_s = 2$	$f_s = 3$
$l = L_{nyq} = 24$	$l = L_{nyq} = 32$	$l = L_{nyq} = 36$
$l_s = L_{win} = 24 - 1$	$l_s = L_{win} = 16$	$l_s = L_{win} = 12$
$\vartheta_c = 7.7^o$	$\vartheta_c = 10.9^o$	$\vartheta_c = 14.4^o$
$\lambda = 7.4^o \cdot \frac{\pi}{180^o} 2R$	$\lambda = 5.5^o \cdot \frac{\pi}{180^o} 2R$	$\lambda = 4.9^o \cdot \frac{\pi}{180^o} 2R$

Aus der Bedingung $m_1 + m_2 - m = 0$ folgt $m_1 = m$ und für die Lokalisierungs-Transformation:

$$\psi_{lm} = (-1)^m \sum_{l_1} \sum_{l_2} \overline{a}_{l_1 m} \overline{w}_{l_2 0} \xi_{l_1 l_2 l} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l \\ m & 0 & -m \end{pmatrix}$$

Dabei läuft l von 0 bis L_{nyq} und m von 0 bis l. Die Koeffizienten mit negativem m ergeben sich aus denen mit positivem m (unter Ausnutzung der Symmetrieeigenschaft der Wigner-3lm-Symbole) durch Multiplikation des Realteils mit $(-1)^m$ und des Imaginärteils mit $-(-1)^m$. l_1 läuft von $\max\left(m, \left|l - l_{2_{max}}\right|\right)$ bis $\min\left(L_{obs}, l + l_{2_{max}}\right)$, wobei $m \le l_1 \le L_{obs}$ leicht ersichtlich ist, während

sich $\left|l-l_{2_{\max}}\right| \le l_1 \le l+l_{2_{\max}}$ aus der Dreiecksungleichung ergibt. l_2 schließlich läuft von $|l-l_1|$ bis $\min\left(l_{2_{\max}}, l+l_1\right)$. Dabei gilt $l_2 \le l_{2_{\max}}$ wie bei der Konstruktion des Fensters begründet, $|l-l_1| \le l_2 \le l+l_1$ folgt aus der Dreiecksungleichung.

2.4 Definition statistischer Größen

Zur Auswertung der lokalisierten Daten werden die folgenden statistischen Werte gebildet.

Bezüglich eines einzelnen Feldes Ψ werden berechnet:

Varianzen $\sigma_{\Psi_l}^2 = 4\pi \sum_{m=0}^{l} \left(\bar{c}_{\Psi_{lm}}^2 + \bar{s}_{\Psi_{lm}}^2\right)$

RMS-Amplituden der lokalisierten Koeffizienten $S_l(\lambda,\vartheta) = \sqrt{\frac{\sigma_{\Psi_l}^2(\lambda,\vartheta)}{2l+1}}$

Mittlere RMS-Amplitude der lokalisierten Koeffizienten $\bar{S}_l = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} S_l(\lambda,\vartheta) \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\lambda$

Entsprechend werden die RMS-Amplituden $\hat{S}_l(\lambda,\vartheta)$ des Originalfeldes aus den Varianzen des Originalfeldes berechnet.

Bezüglich zweier Felder Ψ und Γ (im Folgenden der Topographie und der Geoid-Undulationen) werden berechnet:

Kovarianzen $\sigma_{\Psi\Gamma_l} = 4\pi \sum_{m=0}^{l} \left(\bar{c}_{\Psi_{lm}} \bar{c}_{\Gamma_{lm}} + \bar{s}_{\Psi_{lm}} \bar{s}_{\Gamma_{lm}}\right)$

Korrelation zwischen den beiden Feldern $r_l(\lambda,\vartheta) = \frac{\sigma_{\Psi\Gamma_l}(\lambda,\vartheta)}{\sqrt{\sigma_{\Psi_l}^2(\lambda,\vartheta)\sigma_{\Gamma_l}^2(\lambda,\vartheta)}}$

Admittanz $F_l(\lambda,\vartheta) = \frac{\sigma_{\Psi\Gamma_l}(\lambda,\vartheta)}{\sigma_{\Psi_l}^2(\lambda,\vartheta)}$ so, daß $\gamma_{lm}(\lambda,\vartheta) = F_l(\lambda,\vartheta)\psi_{lm}(\lambda,\vartheta) + \text{noise}$ gilt.

Varianz der Admittanz $\sigma_{F_l}^2(\lambda,\vartheta) = \left(\frac{\sigma_{\Gamma_l}^2(\lambda,\vartheta)}{\sigma_{\Psi_l}^2(\lambda,\vartheta)}\right)\left(\frac{1-r_l^2(\lambda,\vartheta)}{2l}\right)$

2.5 Numerisches Demonstrationsbeispiel

Um die Funktionsweise der Lokalisierungs- Transformation zu veranschaulichen, wird diese auf ein synthetisches Testfeld angewendet. Als Testfeld wurde (entsprechend dem Artikel von M. Simons) eine Kugel mit einer Kugelkappe der Amplitude +1 an beiden Polen und einem Ring der Amplitude -1 um den Äquator verwendet. Die Kappe an den Polen reicht bis zur polnächsten Nullstelle von $P_{12,0}$ (Legendre-Polynom vom Grad 12 und der Ordnung 0), der Ring um den Äquator beidseitig bis zur äquatornächsten Nullstelle von $P_{12,0}$.

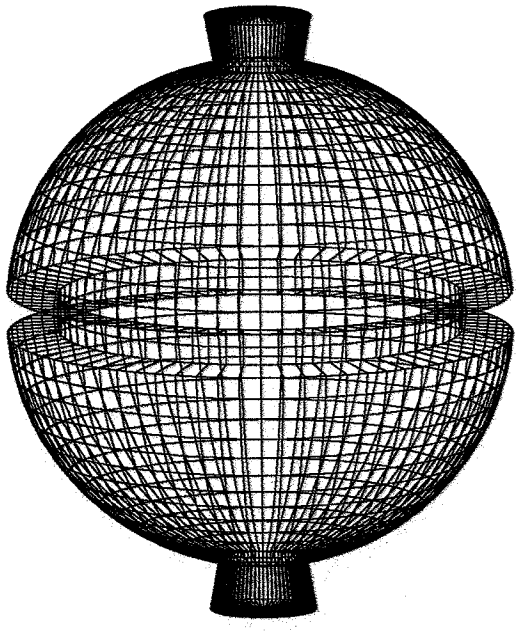


Abb. 2.5.1: Testfeld

Dieses Feld wurde bis zu Grad und Ordnung 48 in Kugelflächenfunktionen entwickelt und in 5°-Schritten entlang des Meridians lokalisiert (aufgrund der Rotationssymmetrie zur z-Achse ist es unabhängig von λ und daher genügt es, nur einen Längenkreis zu betrachten).

In den beiden folgenden Abbildungen sind die Ergebnisse der Lokalisierung zum einen für $f_s = 1$ und zum anderen für $f_s = 2$ dargestellt. Auf der z-Achse sind die RMS-Amplituden der lokalisierten Koeffizienten über alle Ordnungen (fortan mit S bezeichnet) aufgetragen.

Deutlich ist zu erkennen, daß die räumliche Auflösung für $f_s = 1$ besser ist, d.h. die Ausschläge sind enger auf den Raum um den Äquator und die beiden Pole begrenzt, während die spektrale Auflösung für $f_s = 2$ höher ist ($L_{nyq1} = 24$, $L_{nyq2} = 32$). Die Wellenlänge, die die Anomalie an Pol und Äquator am besten wiedergibt, ist die $l = 12$ entsprechende, dementsprechend ist bei $l = 12$ in beiden Fällen ein Maximum zu erkennen, jedoch deutlicher für $f_s = 2$. Außerdem wird für $f_s = 2$ ein zweites Maximum um $l = 26$ erreicht. Die scharfen Kanten der Polkappen und des Ringes (Sprung von 0 auf 1 bzw. -1) werden durch kurze Wellenlängen angenähert, dementsprechend sind für größere l die Kanten der Kappen und des Ringes erkennen, die für $f_s = 1$ ausgeprägter und räumlich schärfer lokalisiert sind.

Für die Lokalisierung der Topographie und des Geoids ist im folgenden jeweils ein Maßstabsfaktor von $f_s = 2$ als relativ günstigem Kompromiß zwischen räumlicher und spektraler Auflösung gewählt.

Abb.: 2.5.2 **Lokalisierung mit $f_s = 1$**

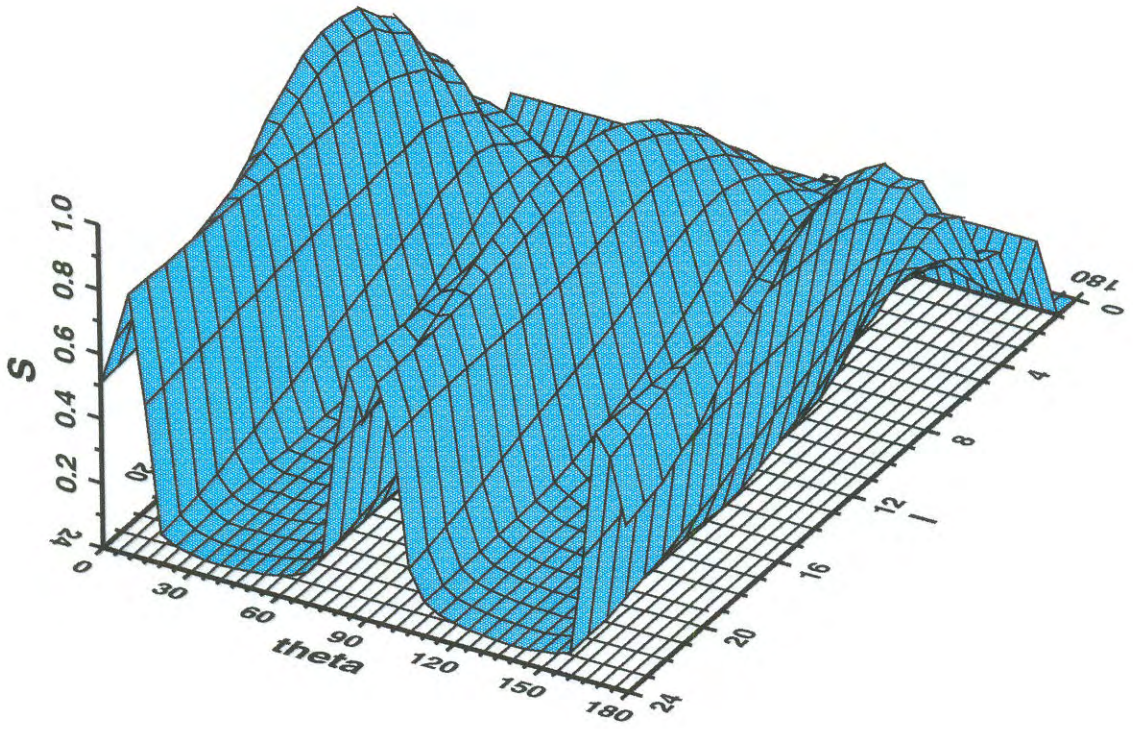
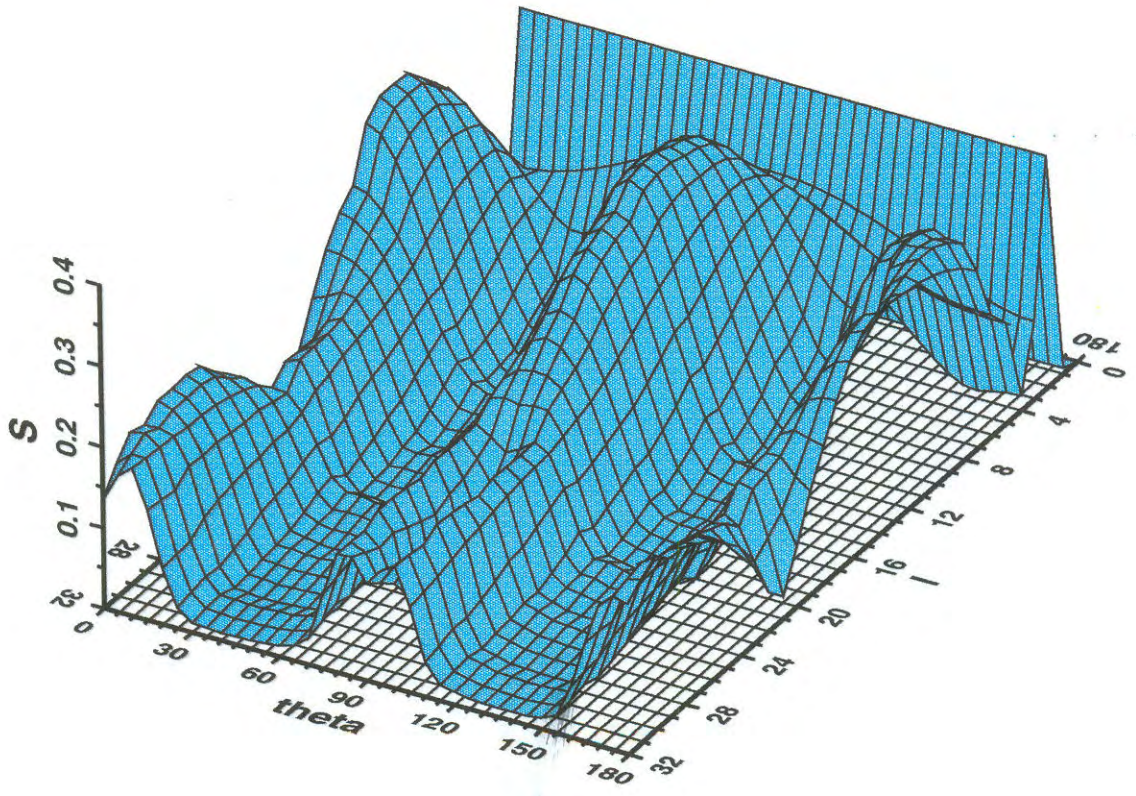


Abb.: 2.5.3 **Lokalisierung mit $f_s = 2$**



2.6 Rechenprogramme

Im Anhang B ist der FORTRAN77-Quellcode für vier Programme beigefügt.

Das Lokalisierungsprogramm **LOCAL**:
Dieses Programm liest die Koeffizienten des Originalfeldes aus einem File, das folgendermaßen aufgebaut ist

```
DSIDP GRIM4C4       GRCOEF
EARTH   72  72 -1  398600.4400D+09  0.637813600D+07  1984.0
GRCOEF   0   0 0.000000000D+00 0.000000000D+00 0.5703D-09 0.0000D+00 10
GRCOEF   1   0 0.000000000D+00 0.000000000D+00 0.0000D+00 0.0000D+00 00
GRCOEF   2   0 -.000000185D-03 0.000000000D+00 0.6908D-10 0.0000D+00 10
...
GRCOEF  72   0 -.359629377D-08 0.000000000D+00 0.1769D-08 0.0000D+00 10
GRCOEF   1   1 0.000000000D+00 0.000000000D+00 0.0000D+00 0.0000D+00 00
GRCOEF   2   1 0.000000000D+00 0.000000000D+00 0.0000D+00 0.0000D+00 00
...
GRCOEF  72   1 0.936129888D-09 -.175301190D-08 0.1774D-08 0.1750D-08 11
GRCOEF   2   2 0.243926936D-05 -.140003168D-05 0.8641D-10 0.8348D-10 11
...
GRCOEF  72  72 0.284308459D-08 0.997387248D-10 0.1338D-08 0.1340D-08 11
```

Die ersten beiden Zeilen sind Kommentarzeilen, dann folgen die Datenzeilen. In jeder Datenzeile werden die ersten 17 Zeichen übersprungen und dann der c_{lm}-Koeffizient und der s_{lm}-Koeffizient, voneinander durch ein Leerzeichen getrennt, mit jeweils 9 Nachkommastellen eingelesen. Der Rest der Zeile wird ignoriert. Dies ist das Format, in dem mir die Original GRIM4C4- und OSU90-Daten vorlagen. Das Programm kann jedoch leicht geändert werden, beliebige andere Formate einzulesen.

Außerdem wird zur Rechenzeitverkürzung ein File FAK mit den Fakultäten bis 145! benötigt:

```
.10000000000000000000000000000000E+01
.10000000000000000000000000000000E+01
.20000000000000000000000000000000E+01
.60000000000000000000000000000000E+01
...
.80479260574719919448490292577980 59+252
```

Drei Parameter müssen im Quellcode gesetzt werden:
Der Name des Koeffizienten-Eingabefiles in INAME, der Entwicklungsgrad, bis zu dem die Koeffizienten in dem Eingabefile vorliegen, in LDATA (im Beispiel LDATA = 72) und die Obergrenze LMAX für den Entwicklungsgrad der zu lokalisierenden Koeffizienten L_{obs}, die von der compilerspezifischen Genauigkeit der Double-Precision-Variablen abhängt (voreingestellt ist LMAX = 60).

Alle weiteren Eingaben geschehen über das Eingabefile INPUT_LOK:

L_{obs}
48

f_s
2.0

Maßstabsfaktor
6378136.0

λ_{min}
0.0

λ_{max}
360.0

$d\lambda$
5.0

ϑ_{min}
0.0

ϑ_{max}
180.0

$d\vartheta$
5.0

Ausgabedatei der lokalisierten Koeffizienten
LOK_G

λ_{min}, λ_{max}, ϑ_{min} und ϑ_{max} begrenzen das Gebiet, in dem mit der Rasterweite $d\lambda, d\vartheta$ Lokalisierungen durchgeführt werden (im Beispiel die ganze Erde mit Rasterweite 5°). Für jeden Rasterpunkt innerhalb dieses Gebietes entsteht als Ausgabedatei ein File $\lambda_\vartheta_$Ausgabename (im Beispiel $\lambda_\vartheta_$LOK_G) mit jeweils einem vollen Satz lokalisierter Koeffizienten bis zu Grad und Ordnung $L_{nyq} = f_s / (f_s + 1) L_{obs}$ (im Beispiel $L_{nyq} = 32$):

```
 0  0  .000000000E+00  .000000000E+00
 1  0  .000000000E+00  .000000000E+00
 1  1  .000000000E+00  .000000000E+00
 2  0 -.191201703E+02  .000000000E+00
 2  1  .418195583E+00 -.513009410E-01
 2  2 -.922692796E+01  .175119072E+00
...
32 32 -.140997653E-02 -.292943328E-02
```

Das Lokalisierungsprogramm funktioniert an jedem Punkt des Globus (Eingabe der Rasterdaten als reelle Zahlen), allerdings ist die Namensgebung der Ausgabedateien nur für ganze λ, ϑ-Werte eindeutig.

Das Programm zur Berechnung der statistischen Werte **STATIS**:
Dieses Programm liest die Dateien mit den lokalisierten Koeffizienten von zwei Originalfeldern ein und berechnet daraus die RMS-Amplituden S_l für beide Felder sowie die Korrelation r_l, die Admittanz F_l und die Varianz der Admittanz σ_F^2 zwischen den beiden Feldern. Es wird gesteuert über die Eingabedatei INPUT_STAT:

L_{obs}
48

f_s
2.0

λ_{min}
0.0

λ_{max}
360.0

$d\lambda$
5.0

ϑ_{min}
0.0

ϑ_{max}
180.0

$d\vartheta$
5.0

Eingabedateien der lokalisierten Koeffizienten des 1. Feldes
LOK_T

Eingabedateien der lokalisierten Koeffizienten des 2. Feldes
LOK_G

Ausgabedatei der statistischen Werte
STAT_T_G

Im Ausgabefile stehen der Reihe nach die statistischen Werte für jeden Rasterpunkt innerhalb des gegebenen Gebietes:

```
  .0   .0
 0 .000000000E+00 .000000000E+00 NaN          NaN          NaN
 1 .201164695E+04 .000000000E+00 NaN           .000000000E+00 NaN
 2 .174717368E+04 .315919567E+02 -.267461637E+00 -.483617430E-02 .758902701E-04
...
32 .701918789E+03 .164013408E+01  .215611197E-02  .503806533E-05 .853105962E-07
  .0   5.0
 0 .000000000E+00 .000000000E+00 NaN          NaN          NaN
 1 .201164693E+04 .000000000E+00 NaN           .000000000E+00 NaN
 2 .173335005E+04 .315056037E+02 -.258138936E+00 -.469196804E-02 .770893258E-04
```

...
32 .807443734E+03 .179558745E+01 -.988034672E-01 -.219718426E-03 .765152755E-07
...
360.0 180.0
0 .000000000E+00 .000000000E+00 NaN NaN NaN
1 .201164694E+04 .000000000E+00 NaN .000000000E+00 NaN
2 .995465323E+03 .267763318E+02 -.451268062E+00 -.121383469E-01 .144044864E-03
...
32 .404693218E+03 .177418532E+01 -.452560006E+00 -.198403453E-02 .238801329E-06

Für $l = 0$ und $l = 1$ sind die Koeffizienten der Kugelflächenentwicklung der Geoid-Undulationen gleich Null und dementsprechend auch deren Lokalisierungen. Daher ist es nicht sinnvoll, für diese Grade Korrelationen und Admittanzen auszurechnen (Division by Zero).

Das Programm zur Berechnung der mittleren RMS-Amplituden **SMITTE**:
Dieses Programm berechnet die mittleren RMS-Amplituden $\overline{S}_l$ der lokalisierten Koeffizienten eines Feldes. Ich habe diese Rechnung von der Berechnung der anderen statistischen Werte getrennt, weil hierzu ein Raster an lokalisierten Koeffizienten über die ganze Erde vorliegen muß (im Gegensatz zu den anderen statistischen Werten, die auch für Ausschnitte berechnet werden können). Dieses Programm wird gesteuert über die Eingabedatei INPUT_SM:

L_{obs}
48

f_s
2.0

$d\lambda$
5

$d\vartheta$
5

Eingabedateien der lokalisierten Koeffizienten
LOK_G

Ausgabedatei der mittleren RMS-Amplituden
SM_G

Beachte, daß $d\lambda$ und $d\vartheta$ hier als ganze Zahlen eingegeben werden müssen, eine engere Rasterung führt bei dem verwendeten LMAX bzw. L_{obs} zu keiner neuen Information. In der Ausgabedatei stehen die $\overline{S}_l$ für alle l:

0 .000000000E+00
1 .000000000E+00
2 .290208653E+02
...
32 .143252556E+01

Das Rotationsprogramm **ROT:**
Es dient dazu, die bei der Lokalisation vorgenommene Drehung rückgängig zu machen und die lokalisierten Koeffizienten wieder in die Lage des Originalfeldes zu bringen. Dies war für die Berechnung der statistischen Werte nicht notwendig, ist aber nötig, soll die an einer Stelle lokalisierte Version des Originalfeldes graphisch dargestellt werden, um sie zum Beispiel mit diesem zu vergleichen. Auch dieses Programm wird über eine Eingabedatei INPUT_ROT gesteuert:

L_{obs}
48

f_s
2.0

λ
75.0

ϑ
85.0

Eingabedatei der lokalisierten Koeffizienten
075_085_LOK_G

Ausgabedatei der zurückrotierten lokalisierten Koeffizienten
075_085_ROT_G

Die Ausgabedatei hat das gleiche Format wie die Eingabedatei der lokaliserten Koeffizienten.

3. Anwendung der Lokalisierungs – Transformation

Nachdem nun die Lokalisierungs-Transformation erläutert und an einem synthetischen Beispiel veranschaulicht wurde, will ich sie auf ein Geoid-Modell (GRIM4C4) sowie ein Topographie-Modell (OSU90) anwenden, um den Zusammenhang zwischen Topographie und Geoidundulationen darzustellen. An Hand zweier herausragender Strukturen, zum einem dem Geoid-Tief südlich Indiens und zum anderen dem Hoch über den Anden, will ich diesen Zusammenhang genauer untersuchen und weitere Einflüsse auf die Geoidundulationen aufzeigen.

3.1 Geoid und Topographie: Ausgangsmodelle und statistische Eigenschaften

Als Geoid-Modell verwende ich das GRIM4C4-Modell, das gemeinsam vom GFZ Potsdam und dem GRGS Toulouse/Grasse entwickelt wurde (P. Schwintzer et al., 1997). Es wurde mit Hilfe von Ergebnisse aus Satellitenbahnverfolgung, Satellitenaltimetrie und Schweremessungen bestimmt und hat eine spektrale Auflösung bis Grad und Ordnung 72, was einer räumlichen Auflösung von ca. 550 km (volle Wellenlänge) entspricht. Für die Lokalisierung verwende ich die auf ein Niveauellipsoid bezogenen Geoidundulationen

$$N = S - S_0 = R \cdot T = R(U - V) \; .$$

S steht für die Geoidoberfläche, S_0 für die des Niveau-Ellipsoids. R = 6378136 m ist der Erdradius und T = U – V das Störpotential mit dem Gravitationpotential U und dem Normalpotential des Ellipsoids V.

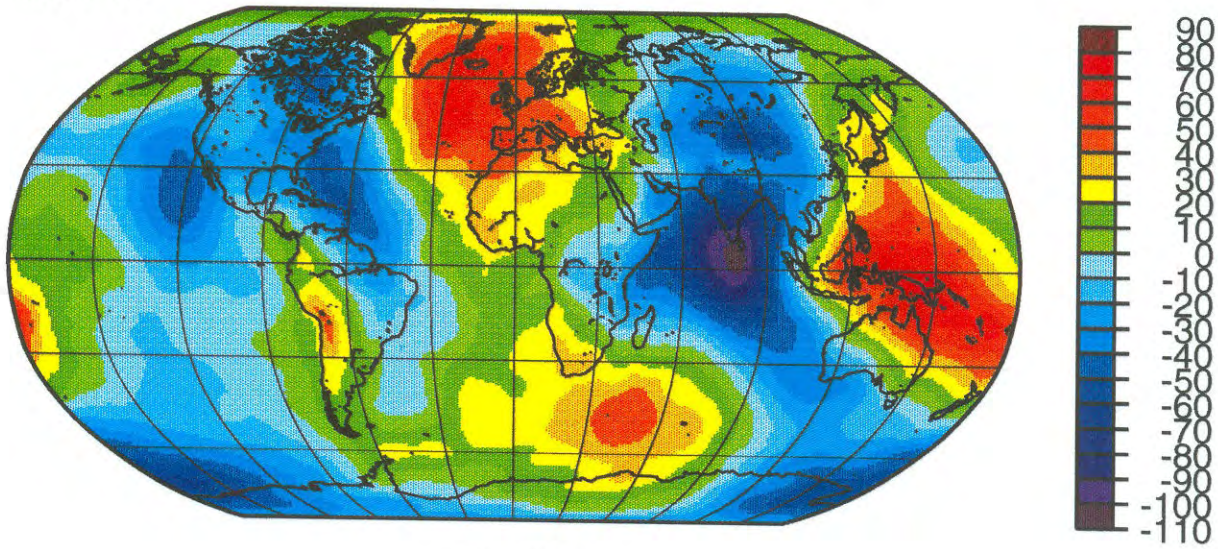
Die Geoidundulationen berrechnen sich, indem man von den sphärischen harmonischen Koeffizienten des Potentialmodells die, das vereinbarte Ellipsoidpotential beschreibenden, geraden zonalen Koeffizienten abzieht, hier

$$\Delta\bar{c}_{00} = 0.0$$
$$\Delta\bar{c}_{20} = \bar{c}_{20} + 0.4841653657 \cdot 10^{-3}$$
$$\Delta\bar{c}_{40} = \bar{c}_{40} - 0.7902985143 \cdot 10^{-6}$$
$$\Delta\bar{c}_{60} = \bar{c}_{60} + 0.1687229135 \cdot 10^{-8} \; ,$$

und die so erhaltenen Koeffizienten mit R multipliziert.

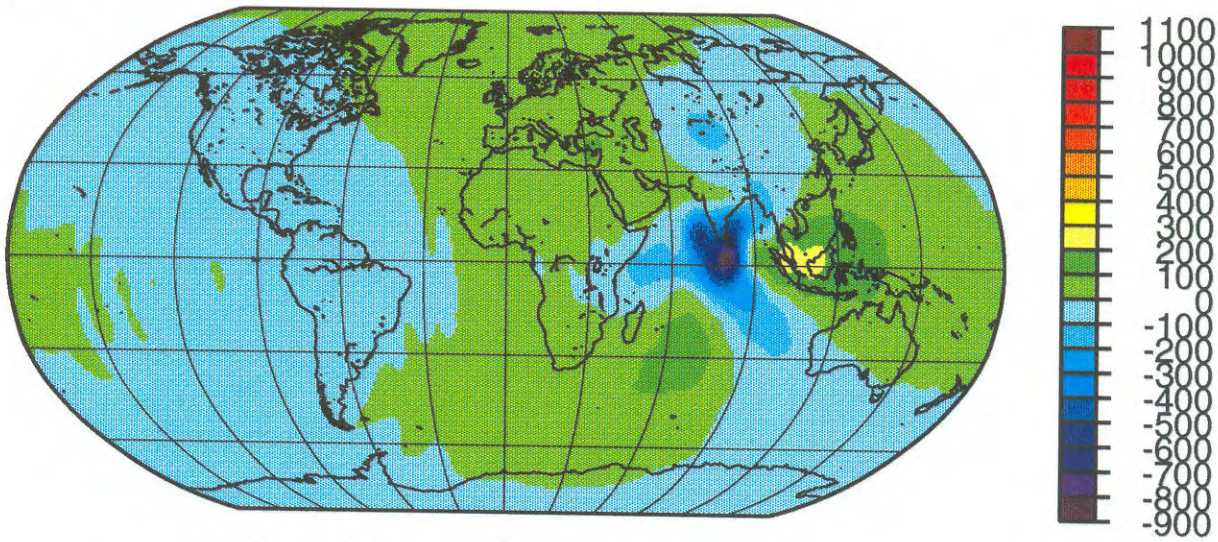
Abbildung 3.1.1 zeigt einen Plot der aus dem GRIM4C4 berechneten Geoidundulationen, die Entwicklung wurde bei $L_{obs} = 48$ abgebrochen. Deutlich sind Hochs über Neuguinea, über Island und dem Nordatlantischen Rücken, über dem Atlantisch-Indischen Rücken, über der Scotia-Platte vor Graham-Land und über den Anden (und etwas abgeschwächt auch über dem Himalaya) sichtbar. Tiefs sind südlich von Indien (unterbrochen vom Himalaya-Hoch bis nach Zentralasien reichend), über dem Indisch-Pazifischen Rücken, über der Hudson Bay, über dem Nordamerikanischen Becken und im Pazifik, vor der Küste Nordamerikas, zu erkennen.

Abb. 3.1.1:



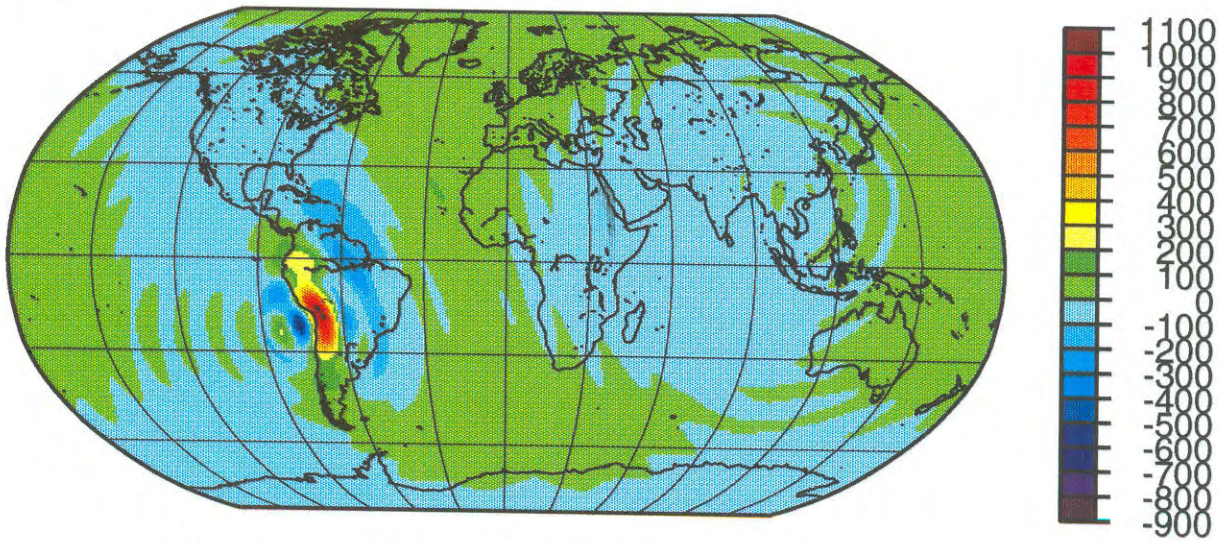
Geoid

Abb. 3.1.2:



Lokalisierung des Indien - Tiefs

Abb. 3.1.3:



Lokalisierung des Anden - Hochs

Abb. 3.1.2 zeigt eine Lokalisierung der Geoidundulationen an der Stelle $\lambda = 75^o, \vartheta = 85^o$ (Zentrum des Indien-Tiefs). Die Lokalisierung wurde mit einem Maßstabsfaktor $f_s = 2$ bis $L_{obs} = 48$ geführt und enthält demnach lokalisierte Koeffizienten bis $L_{nyq} = 32$. Die Fenstergröße variiert dabei zwischen $\vartheta_c = 127.3^o$ für $l = 2$ und $\vartheta_c = 10.9^o$ für $l = 32$. Zu sehen ist sehr deutlich das Indien-Tief und Ausläufer des Neuguinea-Hochs und des Hochs über dem Atlantisch-Indischen Rücken.

Abbildung 3.1.3 zeigt eine Lokalisierung ($L_{obs} = 48$, $f_s = 2$) an der Stelle $\lambda = 290^o, \vartheta = 110^o$ (Zentrum des Anden-Hochs). Deutlich ist das Hoch über dem Höhenzug der Anden und ein auf dem Geoid nicht sichtbares Tief über dem Atacamagraben vor der südamerikanischen Küste zu erkennen.

Die Einheit der Skalen ist jeweils Meter, allerdings darf der Wertebereich der Lokalisierungen nicht ohne weiteres mit dem des Originalfeldes verglichen werden, da er sich durch die Multiplikation mit den Fenstern verändert. Die Fenster unterscheiden sich durch die Skalierung je nach Ausdehnung recht stark in ihrer Amplitude (je kleiner der Radius für zunehmende l, desto größer die Amplitude).

Als Topographie-Modell verwende ich das OSU90-Modell (R.N. Rapp et al., 1990).

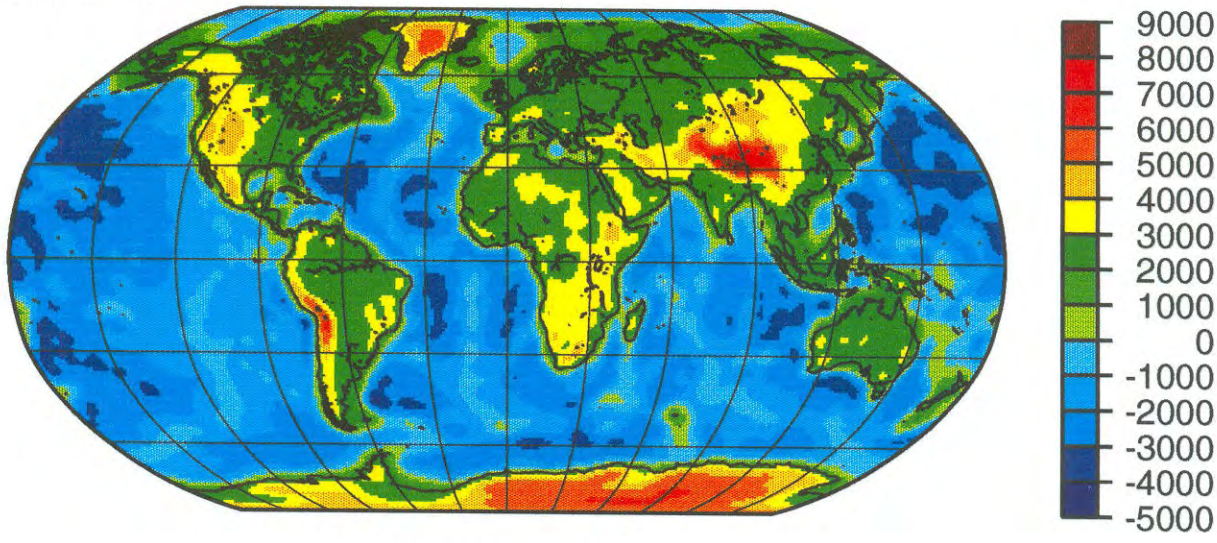
Abbildung 3.1.4 zeigt einen bis $L_{obs} = 48$ entwickelten Plot dieses Topographie-Modells. Deutlich sind die Kontinente und einzelne Gebirgszüge (Himalaya, Anden, Rocky Mountains, Hochland von Abbesinien, relativ klein die Alpen) zu erkennen. Außerdem erscheinen auch Grönland und die Antarktis als markante Hochs, die mächtige und relativ gleichförmige Eisdecke bildet sich offenbar deutlich ab. In den Ozeanen sind die ozeanischen Rücken (Mittelatlantischer Rücken, Süd- und Ostpazifischer Rücken, Zentraler und Östlicher Indischer Rücken) und einzelne Tiefseegräben (Philippinengraben, Kurilen- und Japangraben, Tongagraben, Antillengraben, Atacamagraben) zu erkennen.

Abbildung 3.1.5 zeigt eine Lokalisierung ($L_{obs} = 48$, $f_s = 2$) der Topographie an der Stelle $\lambda = 75^o, \vartheta = 85^o$ (Zentrum des Indien-Tiefs). Auch in der Lokalisierung ist dort keine ausgeprägte Topographie zu erkennen.

Abbildung 3.1.6 zeigt eine Lokalisierung ($L_{obs} = 48$, $f_s = 2$) an der Stelle $\lambda = 290^o, \vartheta = 110^o$ (Zentrum des Anden-Hochs). Deutlich zeichnen sich die Anden und der Atacamagraben ab. Die dadurch verursachte Schwingung setzt sich nach Westen in den Pazifik und nach Osten über den südamerikanischen Kontinent fort.

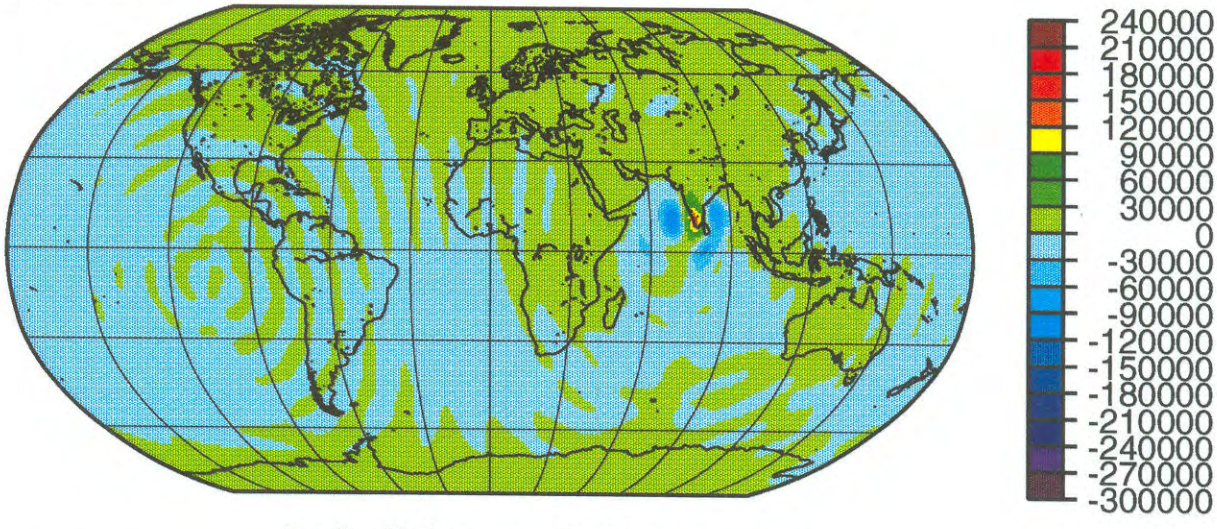
Die Einheit der Skalen ist Meter, die Wertebereiche der Lokalisierungen sind allerdings wieder nicht direkt mit dem des Originalfeldes vergleichbar.

Abb. 3.1.4:



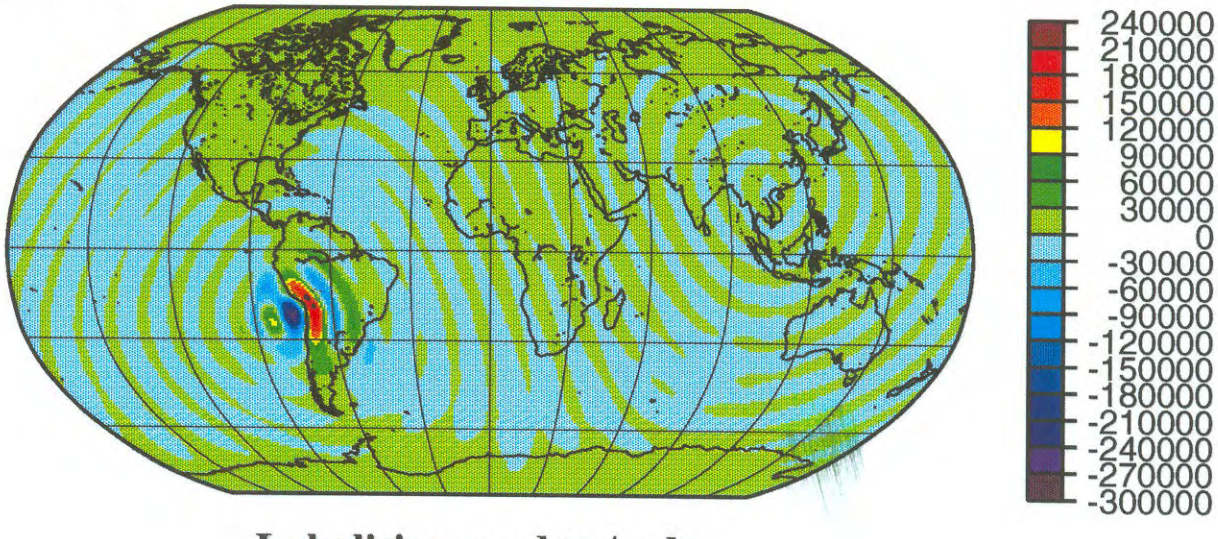
Topographie

Abb. 3.1.5:



Lokalisierung Indiens

Abb. 3.1.6:



Lokalisierung der Anden

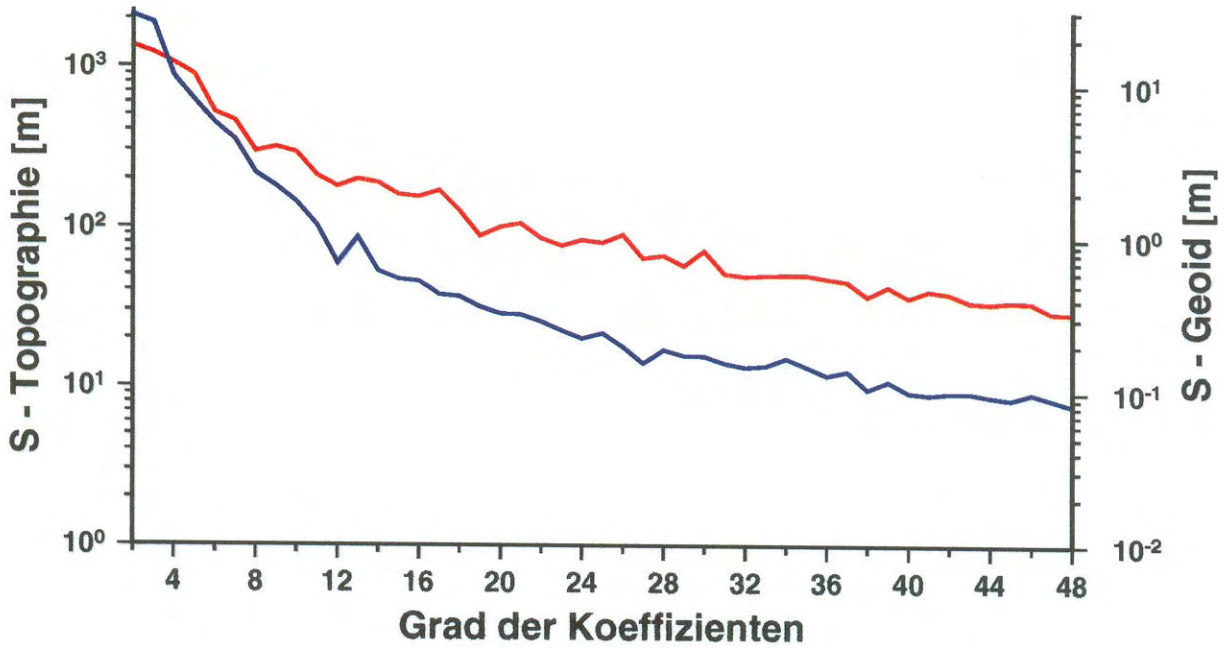


Abb. 3.1.7: RMS-Amplituden S der Koeffizienten der Topographie (rot) und der Geoidundulationen (blau), über dem Grad aufgetragen.

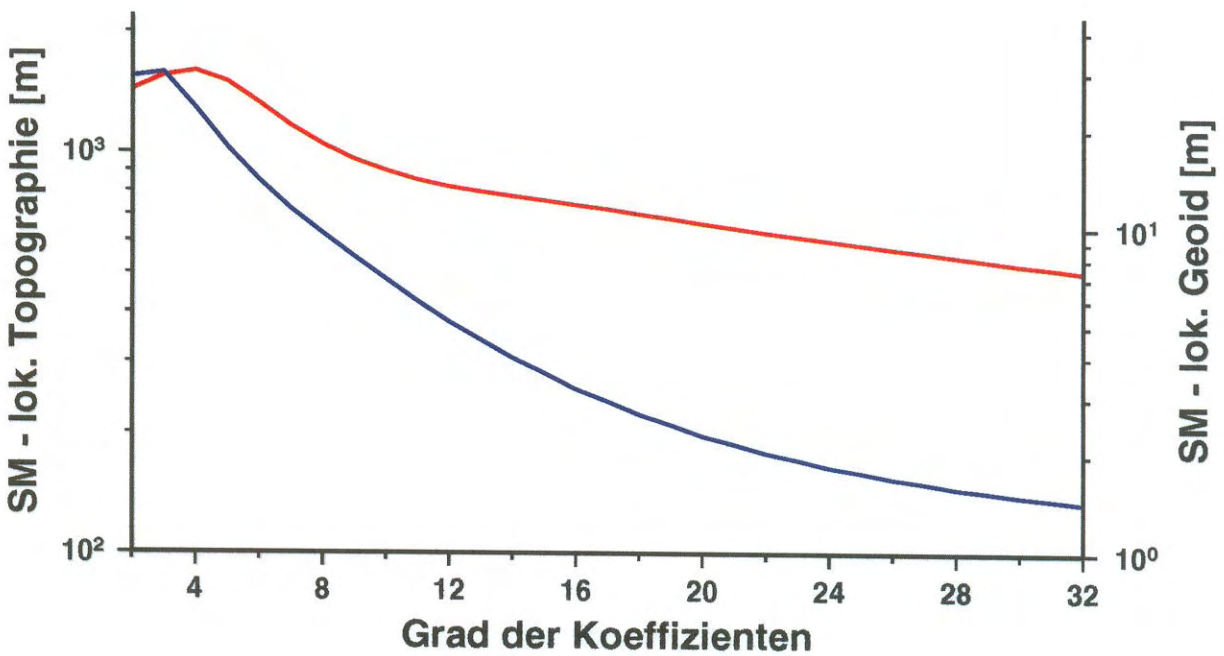


Abb. 3.1.8: Über der Kugeloberfläche gemittelte RMS-Amplituden der lokalisierten Koeffizienten in Abhängigkeit des Grades. Ich habe dazu Lokalisierungen der Topographie (rot) und der Geoidundulationen (blau) in einem 5°-Raster über den ganzen Globus verwendet.

Im Vergleich der beiden Schaubilder fällt auf, daß die gemittelten RMS-Amplituden der lokalisierten Felder sehr viel glatter verlaufen. Für niedrige Grade stimmen sie in der Größenordnung noch mit den Originalfeldern überein, für $l = 32$ sind die Amplituden der lokalisierten Koeffizienten jedoch um etwa den Faktor 10 größer als die der Originalfelder. Auch ist in den gemittelten Amplituden der lokalisierten Topographiekoeffizienten für $l = 4$ ein lokales Maximum ausgebildet, das für die Originaltopographie nicht auftaucht.

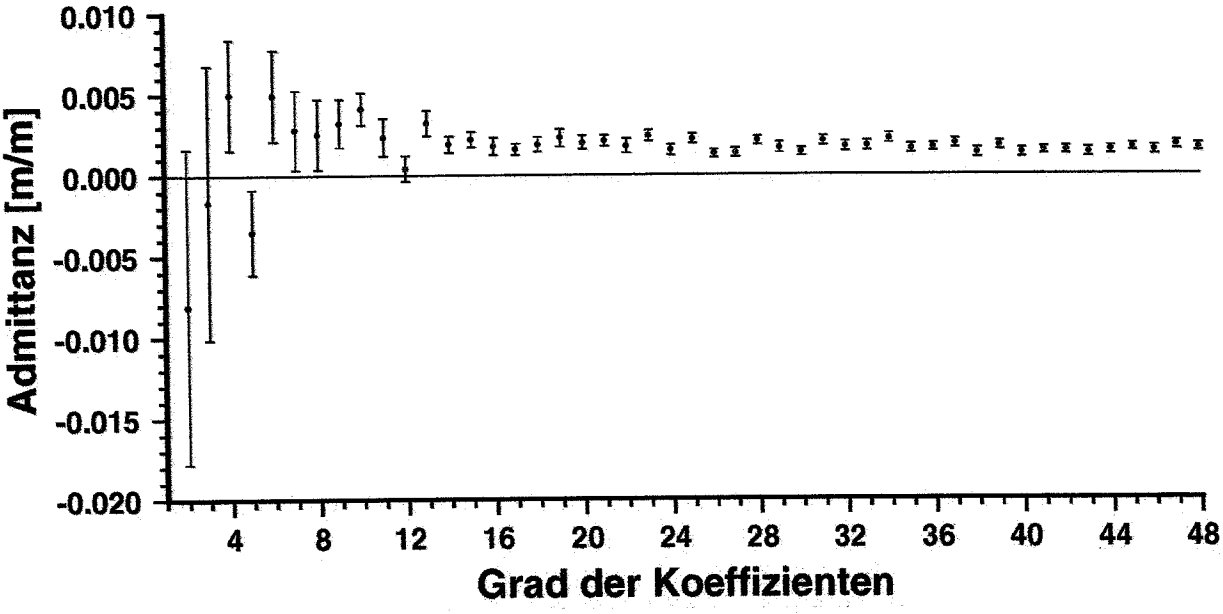


Abb. 3.1.9: Admittanzen des Originalgeoids bezüglich der Originaltopographie für jeden Grad mit 67%-Fehlergrenzen. Bei $l = 5$ und $l = 12$ sind zwei deutliche Minima ausgebildet. Etwa an diesen Stellen werden die Grenzen zwischen dem Einfluß von Dichtevariationen an der Kern-Mantel-Grenze und im unteren Erdmantel und dem Einfluß des oberen Mantels und der isostatisch kompensierten Lithosphäre auf die Geoidundulationen angenommen. Für größere l bleibt die Admittanz positiv und pendelt sich auf, durch Isostasie erklärbare, Werte um 0.002 [m/m] ein.

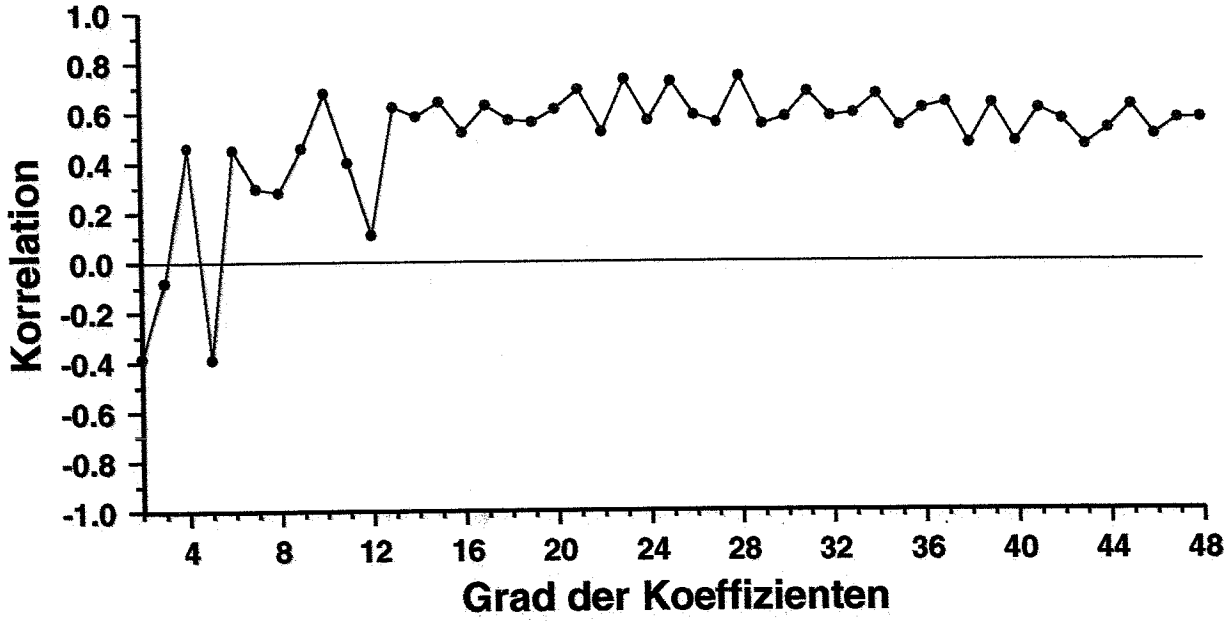


Abb. 3.1.10: Korrelationen zwischen den Originalfeldern der Topographie und des Geoids.

Auch in Abbildung 3.1.10 sind die deutlichen Minima für $l = 5$ und $l = 12$ zu erkennen. Für größere l liegen die Korrelationen etwa um den Wert 0.6. Der irreguläre Verlauf für die langwelligen Strukturen wird durch dynamische Vorgänge im Erdinnern aufgrund der Mantelkonvektion erzeugt, während für die höheren Grade isostatischer Massenausgleich in der Lithosphäre bestimmend ist.

3.2 Geophysikalische Bedeutung großräumiger Geoidstrukturen und spektrale Zuordnung

Die Form des Geoids wird durch eine Reihe von Einflußfaktoren bestimmt, die bis an die Kern-Mantel-Grenze reichen. Die verschiedenen Faktoren wirken sich in unterschiedlichen Maßstäben aus und lassen sich somit verschiedenen Wellenlängen in der Kugelflächenfunktionsentwicklung des Geoids zuordnen.

Im allgemeinen wird angenommen (A. Cazenave et al., 1986), daß die Koeffizienten der Grade 2 bis 9 dynamische Prozesse im unteren Mantel wiederspiegeln. Dabei beeinflussen thermische Dichteunregelmäßigkeiten konvektiven Ursprungs und die stoffliche Struktur des unteren Mantels die Koeffizienten der Grade 2 und 3, während sich Subduktionsprozesse und Hot Spots als Geoid-Hochs in den Graden 4 bis 9 abbilden. Diese langwelligen Einflüsse haben relativ große Amplituden von 50 bis 100 m.

Prozesse im oberen Mantel beeinflussen die Koeffizienten der Grade 10 bis 40 und haben typischerweise niedrigere Amplituden zwischen 10 und 20 m. Bis zum Grad 20 spiegeln sich Konvektionsvorgänge im oberen Mantel in den Koeffizienten wieder, wobei aufsteigende Materie geringerer Dichte eigentlich eine Depression im Geoid verursachen müßte, aber die Lithosphäre aufwölbt (dynamische Topographie) und so zu einem Geoid-Hoch führt. Entsprechend verursacht absteigende Materie höherer Dichte Senken in der Lithosphäre und somit Depressionen des Geoids.

Ab Grad 10 beginnt sich auch schon der Einfluß der Topographie bemerkbar zu machen, wobei größere Lithosphärendicke zu einem Geoid-Hoch führt, gleichzeitig aber nach dem Prinzip der Isostasie ein Massendefizit an der Grenze zum Oberen Mantel verursacht, welches das Geoid-Hoch abschwächt. Geringere Lithosphärendicken verursachen dementsprechend Geoid-Tiefs, ebenfalls abgeschwächt durch isostatisch bedingten Massenüberschuß an der Grenze zum oberen Mantel.

Ab $l \approx 25$ zeichnen sich Tiefseegräben ab und ab $l \approx 40$ beginnen Einflüsse wie die thermische Struktur der Lithosphäre, Eislasten, Sedimentauflast, Ozeane, Vulkanische Auflasten, ... eine Rolle zu spielen.

3.3 Lokalisierungen von Geoid und Topographie über Erdoberfläche und Spektrum

In einem 5° x 5° Raster habe ich nun Lokalisierungen ($L_{obs} = 48$, $f_s = 2$) der Topographie und der Geoidundulationen für die ganze Erde durchgeführt. Für jeden Ort des Rasters und jeden einzelnen Grad von $l = 2$ bis $l = 32$ werden die RMS-Amplituden S der lokalisierten Koeffizienten sowie deren globaler Mittelwert $\overline{S}$ gebildet und die Differenzen $\Delta S = S - \overline{S}$ [m] auf dem Globus dargestellt. Außerdem werden für alle Grade die Admittanzen [m / km] und die Korrelationen zwischen den lokalisierten Koeffizienten an allen Rasterpunkten berechnet und ebenfalls auf den Globus projeziert.

Die so entstandenen Bilder, die im Anhang C beigefügt sind, habe ich auf den folgenden Seiten verglichen und in ihren Grundaussagen zu analysieren versucht. Es ist zu beachten, daß durch die Differenzbildung in den RMS-Amplituden die Minima Gebiete mit besonders flachem Spektrum sind.

3.3.1 Geoidundulationen

Für die langwelligen Koeffizienten der Grade 2 und 3 ist nur ein dominantes Maximum zu erkennen, daß in seiner Position aber schon recht gut mit dem Indien-Tief des Geoids übereinstimmt. Bei $l = 4$ kommt ein schwächer ausgeprägtes Maximum über dem Nordatlantischen Rücken hinzu. Das Maximum südlich Indiens bleibt dominant bis $l \approx 8$ und weiter erkennbar bis $l \approx 12$. Dabei entspricht sein Zentrum nicht dem des Indien-Tiefs des Geoids, sondern liegt leicht südöstlich davon. Offenbar wirken hier das Indien-Tief sowie das Hoch des Geoids über Neuguinea zusammen, die wohl mit konvektiven Prozessen und Dichteunregelmäßigkeiten bis in den unteren Mantel sowie Subduktion im Bereich Indonesiens zusammenhängen.

Das Maximum im nördlichen Atlantik wandert mit zunehmendem l westwärts und beginnt sich bei $l = 8$ in ein Maximum über der Hudson Bay sowie eines in der Karibik zu trennen. Das Maximum über der Hudson Bay bleibt deutlich zu erkennen bis $l \approx 12$ und entspricht dem Tief des Geoids an der selben Stelle, das M. Simons (1997) mit noch andauernden postglazialen Ausgleichsprozessen sowie absinkender Strömung konvektiven Ursprunges im Erdmantel erklärt.

Das Maximum über der Karibik wandert mit zunehmendem l weiter südwärts, bis es die Anden erreicht und dort bis zu den kürzesten untersuchten Wellenlängen deutlich zu sehen bleibt. Im langwelligen Bereich bis $l \approx 10$ wird es wohl durch die Subduktionszone entlang der westlichen Küste Südamerikas verursacht, während es im kürzerwelligen Bereich stark mit der Topographie (Anden, Atacamagraben) korreliert.

Bei $l = 13$ beginnt sich ein Maximum im Südatlantik zu bilden und bleibt bis $l \approx 19$ zu erkennen, welches dem Geoid-Hoch an der selben Stelle entspricht und durch Subduktion im Bereich der Scotia-Platte begründet sein könnte. Außerdem beginnt sich ab $l = 14$ ein Maximum über dem Himalaya zu bilden, das bis $l = 32$ deutlich zu erkennen bleibt und durch die ausgeprägte Topographie verursacht wird.

Über dem Sundagraben vor Java bildet sich ab $l = 14$ ein Maximum aus und verlagert sich mit zunehmendem l immer weiter über die Bandasee, das in seinen Anfängen wahrscheinlich durch Subduktion der indisch-australischen Platte zu erklären ist. Ab $l = 16$ ist über dem Kongobecken in Zentralafrika ein Maximum zu erkennen, das sich bis $l = 32$ hält, und im Golf von Mexiko beginnt sich mit $l = 18$ ein Maximum zu bilden, das sich für kürzere Wellenlängen über das Hochland von Mexiko verlagert.

Insgesamt beginnen mit abnehmender Wellenlänge Gebirge eine immer stärkere Rolle zu spielen. So ist in Alaska für $l = 17$ bis $l = 23$ ein Maximum im Bereich der Alaska Range und der Küstengebirge zu erkennen. Ab $l \approx 17$ trennt sich ein Maximum über dem Hochland von Iran und dem Zagrosgebirge ab, das bis $l = 32$ immer deutlicher wird, und ab $l = 20$ ist über dem Atlasgebirge ein Maximum zu erkennen.

Die Ozeane erscheinen fast durchgehend als Gegenden niedriger RMS-Amplituden.

3.3.2 Topographie

Im langwelligen Bereich sind besonders die Landmassen der Kontinente abgebildet. So liegt für $l = 2$ ein Maximum über Asien als der größten zusammenhängenden Landmasse. Ab $l = 4$ beginnen sich die Antarktis und Amerika abzubilden und ab $l = 6$ kommen langsam auch Australien und Afrika hinzu. Für diese Wellenlängen ist über der Antarktis ein dominierendes Maximum, was wohl durch den sehr konformen mächtigen Eispanzer erklärt werden kann.

Ab $l = 9$ löst sich Afrika vom antarktischen Maximum und ein Maximum über Alaska und Kamtschatka bildet sich, das sich für $l = 13$ in ein Maximum über Nordamerika und eines über Grönland teilt. Schon ab $l = 10$ ist über dem Süden Südamerikas ein Maximum entstanden, während jenes über Australien Richtung Indonesien wandert. Ab $l = 16$ ist Neuseeland zu erkennen, während das Maximum über Feuerland immer weiter nachläßt.

Nun beginnen Gebirge und Tiefseegräben sich abzubilden. Ab $l \approx 17$ separiert sich ein Maximum über den Anden, das bis $l = 32$ immer deutlicher hervortritt. Ein ab $l \approx 16$ sichtbares Maximum über den Rocky Mountains wandert südwärts und bildet ein deutliches Maximum über Mexiko und Mittelamerika. Über dem Himalaya bildet sich ein Maximum, das sich bis $l = 32$ hält, jedoch aufgrund seiner größeren Ausdehnung nie so deutlich wie das über den Anden wird.

Das Maximum über Neuseeland wandert vor die Südspitze Australiens und über Tasmanien, während über den Philippinen und dem Philippinengraben immer deutlicher ein Maximum entsteht und ab $l \approx 30$ mit einem über Java und dem Sundagraben entstandenen verschmilzt.

Das Maximum über der Antarktis beschränkt sich auf die Küste und zieht mit zunehmendem l nach Graham Land und über das Südantillenbecken, wo es bis $l = 32$ sichtbar bleibt. Ab $l \approx 22$ entsteht ein sehr deutliches Maximum über Madagaskar, das bis $l = 32$ sichtbar bleibt. Vor der Küste Japans entsteht ab $l = 23$ ein Maximum, das langsam über Japan zieht, wo es für $l = 32$ zentral liegt.

Das Maximum über Ostgrönland wandert um $l = 26$ langsam ins Zentrum und weiter an die Südspitze Grönlands, während ein vor der Küste Spaniens entstandenes Maximum für höhere

l nach Spanien zieht und sich weiter über das ganze Mittelmeer ausdehnt. Die Ozeane bleiben wie zu erwarten sehr ruhig.

Nachdem die langen Wellenlängen die Kontinente abgebildet haben, stellen die kürzeren Wellenlängen immer mehr die Umrisse der Kontinente, dem Kontinentalaufschwung folgend, und einzelne Gebirge und Tiefseegräben dar.

3.3.3 Korrelation und Admittanz

Korrelation und Admittanz verhalten sich bis $l \approx 10$ sehr ähnlich. Für $l = 2$ sind sie durchgehend negativ, während sich für $l = 3$ ein erstes Maximum über dem Indien-Tief des Geoids bemerkbar macht. Für $l = 4$ und 5 bildet sich ein Maximum im Pazifik, die Polgebiete bleiben negativ. Um $l = 6$ und 7 ist südlich Südafrikas ein Minimum zu erkennen und für $l = 7$ bis $l = 10$ bildet sich über dem Westeuropäischen Becken ein Minimum. Im Pazifik, nahe der amerikanischen Küste, ist für $l = 7$ und 8 ein Maximum zu erkennen während sich für $l = 7$ bis $l = 10$ ein Maximum südöstlich Indiens, entsprechend dem Maximum der Geoid-Lokalisierung bildet. Ein bei $l = 8$ gebildetes Maximum in Nordamerika verlagert sich bis $l \approx 14$ vor die Westküste Nordamerikas und für $l = 9$ bis $l = 11$ entsteht ein Dipol im südlichen Pazifik. Das Minimum dieses Dipols ist erkennbar bis $l = 15$.

In der Admittanz des Geoids bezüglich der Topographie bildet sich für $l = 9$ bis $l = 14$ ein Maximum über dem nördlichen Südamerika und für $l = 13$ bis $l = 20$ entsteht ein deutlicher Dipol über Skandinavien (Minimum) und dem Ural (Maximum). Über Hawaii bildet sich für $l = 16$ bis $l = 25$ ein Maximum aus, das auch in der Lokalisierung der Geoidundulationen sowie für größere l in der Lokalisierung der Topographie zu erkennen ist. Über der Baffin Bay ist ab $l = 17$ bis $l = 32$ ein deutliches Minimum zu sehen. Für $l = 18$ bis $l = 23$ liegt nördlich des Himalayas ein Maximum, das dann bis $l \approx 26$ westwärts wandert und sich auflöst. Ab $l \approx 21$ entsteht aus dem Maximum des Dipols über dem Ural ein Maximum über dem Ararat und bewegt sich für größere l leicht südostwärts übers Iranische Hochland. In Zentralafrika nahe dem Kongobecken wird ab $l = 16$ ein Maximum immer stärker bis $l = 32$, während sich über dem Ahaggar-Gebirge in der Sahara ab $l = 25$ ein Maximum immer deutlicher ausprägt. Für den größten Teil des Globus liegen die Admittanzwerte für größere l zwischen 0 und +0.002, dauerhaft leicht negativ bleiben sie nur um den Nordpol.

In der Korrelation zwischen Geoid und Topographie bildet sich der Dipol über Skandinavien und Zentralasien für $l = 13$ bis $l = 17$ noch ausgeprägter als für die Admittanz, wobei für $l = 18$ bis $l = 21$ das Minimum eher Richtung Nordpol wandert und für $l = 19$ bis $l = 32$ weiter bis über die Baffin Bay zieht. Für $l \geq 24$ bildet sich auch über dem Südpol ein Minimum. Für $l > 16$ liegt über den Aleuten und dem Aleutengraben ein Minimum und zwischen $l = 18$ und $l = 21$ über dem Starowai-Gebirge in Nordostasien. Über der Hudson Bay ist zwischen $l = 16$ und $l = 20$ ein Minimum zu erkennen und ab $l = 27$ bildet sich über dem Amazonas-Becken und ab $l = 25$ auch über Feuerland ein Minimum. Gebiete ausgesprochen guter Korrelation sind Gebirge wie der Himalaya und die Anden, für die die Korrelation ab $l = 18$ dauerhaft nahe 1 liegt. Allgemein wird die Korrelation immer besser je größer l wird.

3.4 Detaillierte Untersuchungen prägnanter Geoidstrukturen

An Hand zweier sich grundlegend verschieden verhaltender Strukturen will ich noch etwas genauer auf die unterschiedlichen Einflußfaktoren auf das Geoid und deren Ausprägung nach einer Lokalisierung eingehen. Ich habe dafür zum einen das Geoid-Tief südlich Indiens (lokalisiert an der Stelle $\lambda = 75^o, \vartheta = 85^o$) und zum anderen das Hoch über den Anden (lokalisiert an der Stelle $\lambda = 290^o, \vartheta = 110^o$) ausgewählt.

Schnitte entlang der Längen- und Breitenkreise durch diese Strukturen und Schaubilder zu den RMS-Amplituden, den Admittanzen und der Korrelation zwischen den lokalisierten Geoidundulationen und der lokalisierten Topographie an diesen Stellen sollen die grundlegenden Unterschiede verdeutlichen.

3.4.1 Geoid – Tief südlich Indiens

Das Indien-Tief des Geoids bildet sich in den langwelligen Bereichen von $l = 2$ bis $l \approx 12$ ab und hat damit vermutlich seine hauptsächlichen Quellen im tiefen Erdinnern, dem unteren Mantel bis hinunter zur Kern-Mantel-Grenze.

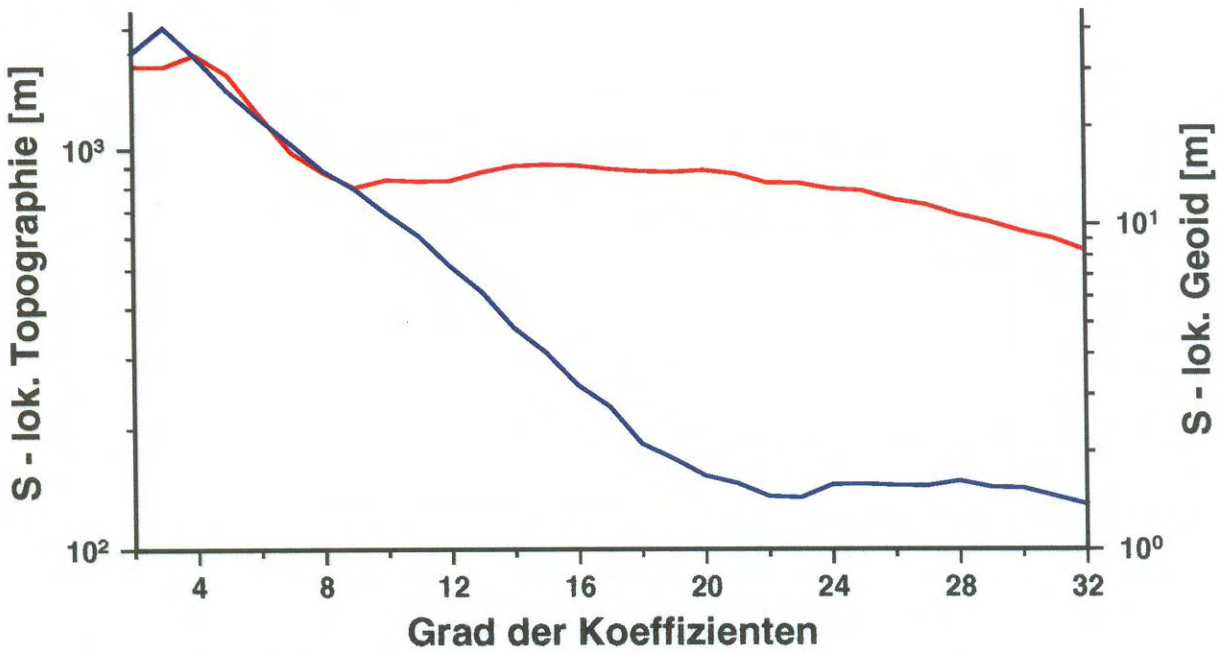


Abb. 3.4.1.1: RMS-Amplituden S der Lokalisierung ($L_{obs} = 48$, $f_s = 2$) der Topographie (rot) und der Geoidundulationen (blau) für alle Grade an der Stelle $\lambda = 75^o, \vartheta = 85^o$.

Im Vergleich dieses Schaubildes mit Abbildung 3.1.7, in der die gemittelten RMS-Amplituden der lokalisierten Felder dargestellt sind, fällt auf, daß die Amplituden der lokalisierten Geoidkoeffizienten bei $l = 3$ ein deutliches Maximum haben und bis $l = 16$ größer als die gemittelten Amplituden sind, zwischen $l = 16$ und $l = 27$ sind sie etwas niedriger und ab $l = 27$ in etwa gleich groß. Die Amplituden der lokalisierten Topographiekoeffizienten fallen im langwelligen Bereich etwas schneller ab als die gemittelten Amplituden und liegen ab $l = 12$ nur leicht über diesen. Dies ist ein Zeichen für relativ schwach ausgeprägte Topographie (die gemittelten Amplituden sind durch die großflächigen Ozeane ohne nennenswerte Topographie sehr niedrig).

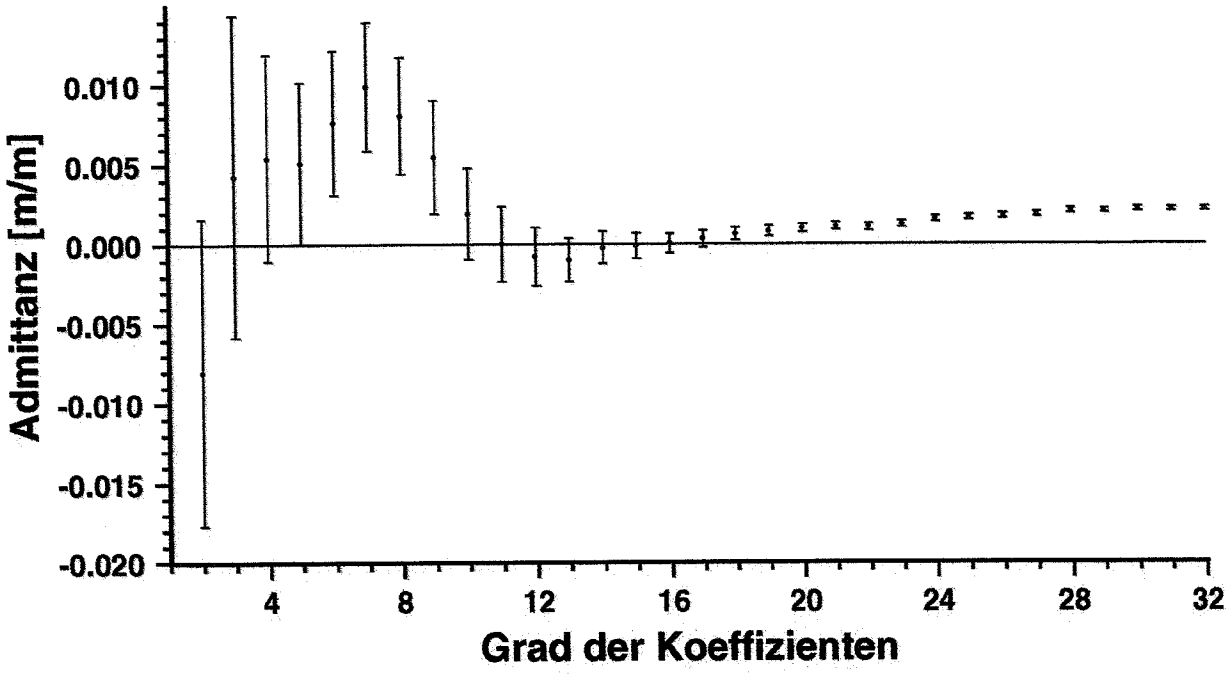


Abb. 3.4.1.2: Admittanzen der lokalisierten Geoidundulationen bezüglich der lokalisierten Topographie an der Stelle $\lambda = 75^o, \vartheta = 85^o$ mit 67%-Fehlergrenzen. Das lokale Minimum bei $l = 5$ fällt kaum noch auf, während das Minimum bei $l = 12$ breiter als für die Originalfelder (Abbildung 3.1.8) ist und negative Werte erreicht. Für $l = 3$ bis $l = 8$ liegen die Admittanzen höher als bei den Originalfeldern, für größere l liegen sie wie diese um +0.002. Die lang- und kurzwelligen Bereiche sind deutlich voneinander abgegrenzt.

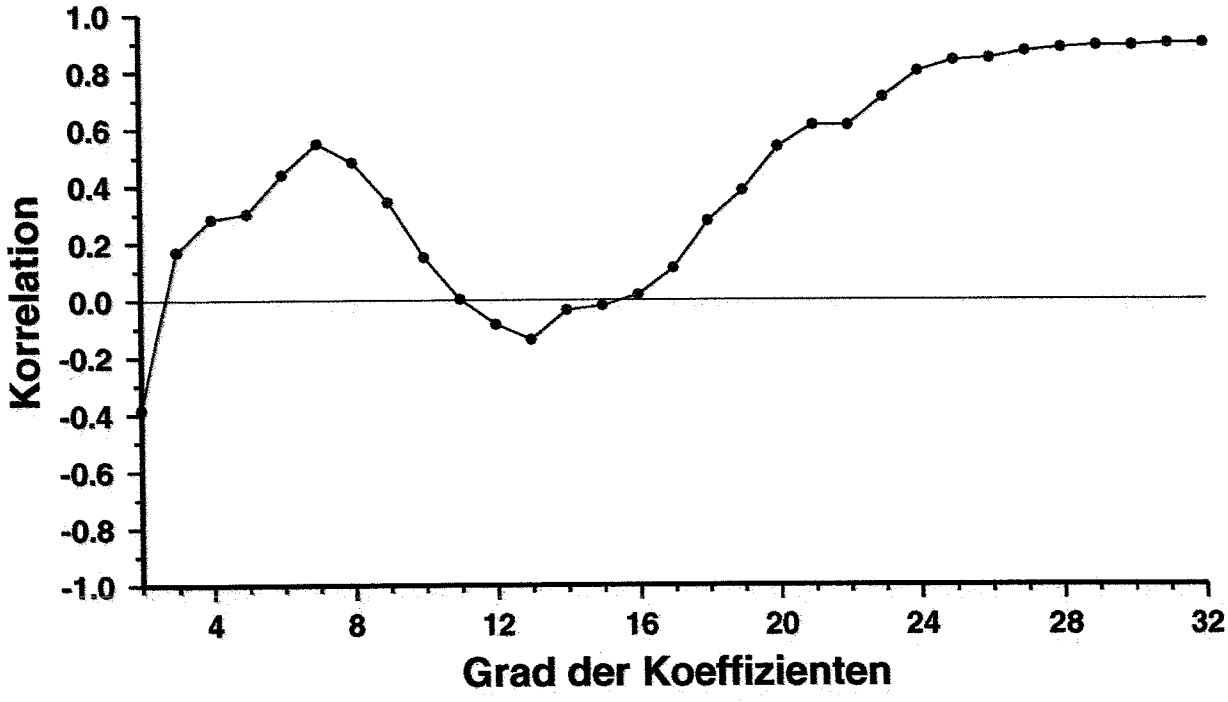


Abb. 3.4.1.3: Korrelation zwischen den lokalisierten Koeffizienten der Topographie und denen der Geoidundulationen für $\lambda = 75^o, \vartheta = 85^o$.

Wie bei den Admittanzen ist das Minimum bei $l = 5$ verschwunden, während das Minimum um $l = 12$ breiter ist und negative Werte erreicht. Im Bereich zwischen $l = 3$ und $l = 12$ wirken die Korrelationen weit weniger unruhig als bei den Originalfeldern (Abbildung 3.1.9). Für größere l streben sie deutlich gegen 1, während sie für die Originalfelder um 0.6 undulieren.

Die folgenden Abbildungen 3.4.1.4 bis 3.4.1.8 betrachten einen Schnitt durch das Indien-Tief entlang des Längenkreises $\lambda = 75^{o}$.

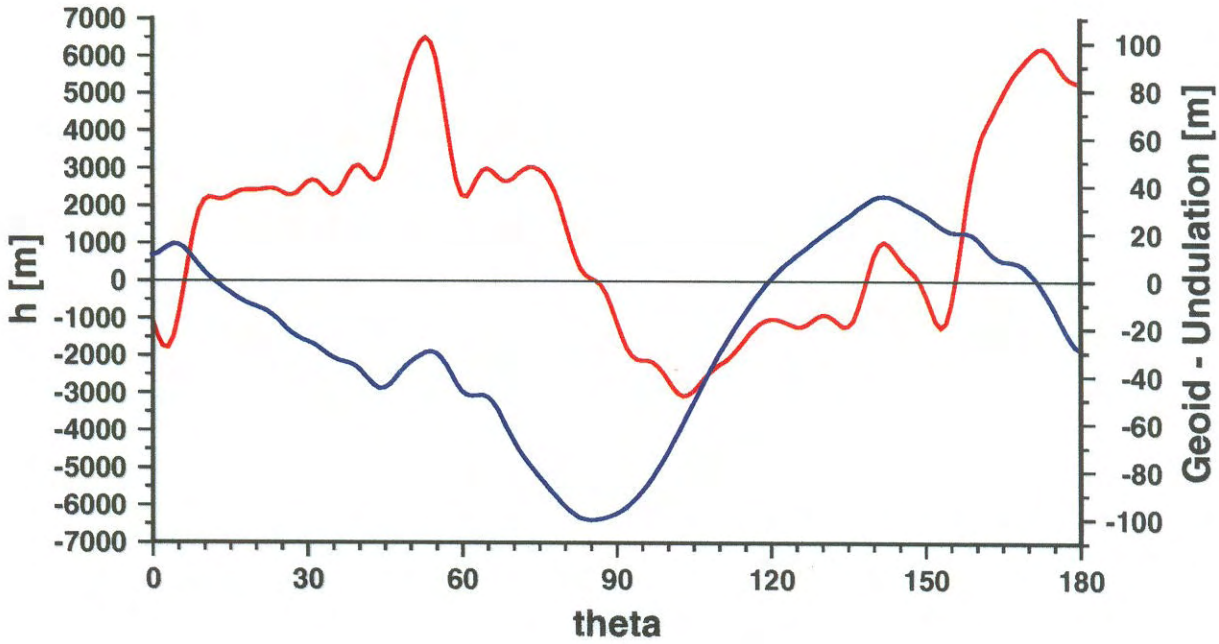
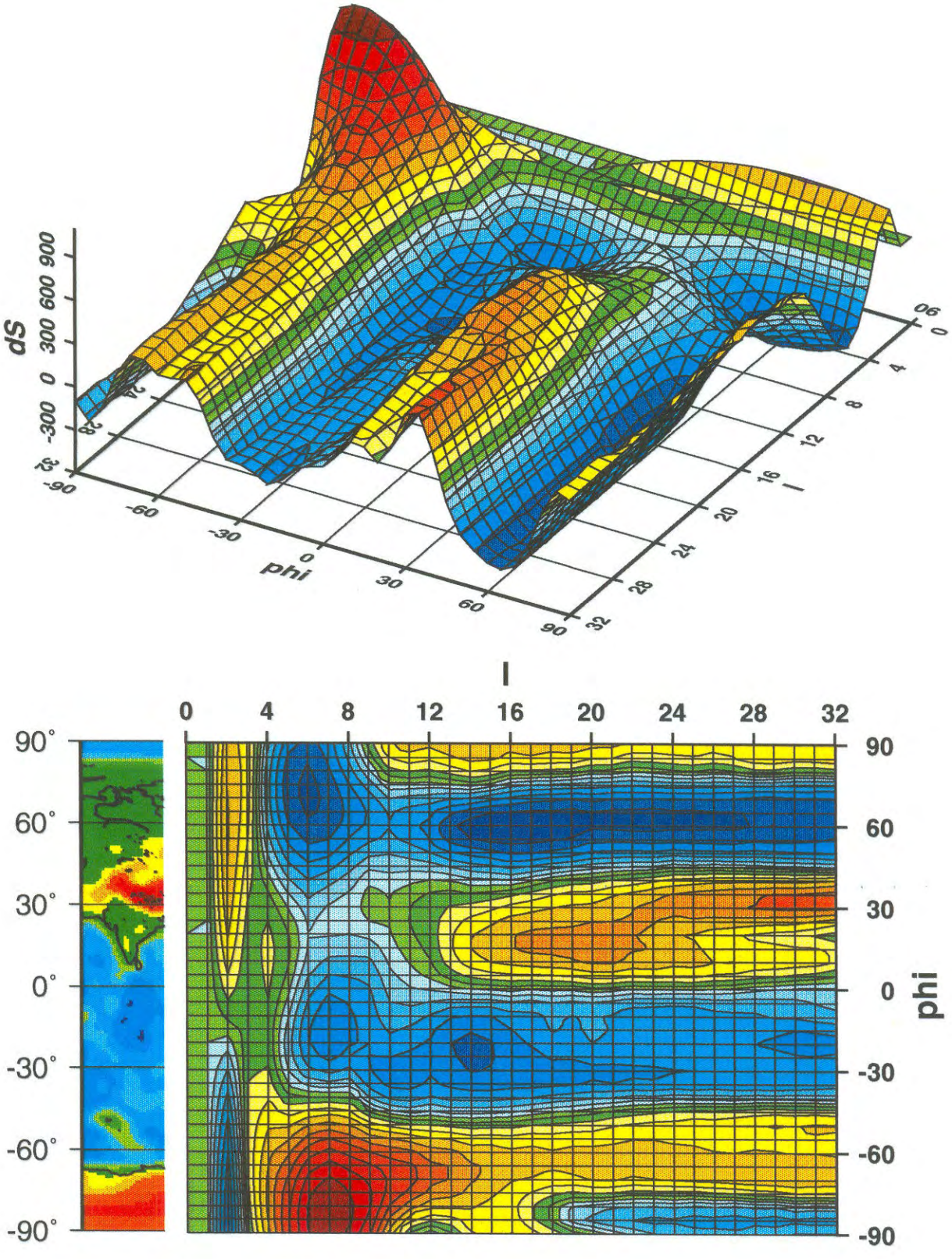


Abb. 3.4.1.4: Schnitte durch die Topographie (rot) und das Geoid (blau) entlang des Längenkreises $\lambda = 75^{o}$. Deutlich ist um $\vartheta = 85^{o}$ das breite Geoid-Tief südlich Indiens zu sehen, während die Topographie an dieser Stelle den Übergang von Indien in den Indischen Ozean wiedergibt. Sichtbar wird auch die große Ausdehnung des Tiefs von $\vartheta = 10^{o}$ bis $\vartheta = 120^{o}$, unterbrochen von einem Peak bei $\vartheta \approx 53^{o}$, verursacht durch das Himalayagebirge.

In den Abbildungen 3.4.1.5 und 3.1.4.6 sind entlang des Längenkreises $\lambda = 75^{o}$ die Differenzen zwischen den RMS-Amplituden der lokalisierten Topographie und ihren globalen Mitteln für die Grade $l = 0$ bis 32 dargestellt; einmal in Schrägsicht und einmal in Draufsicht, mit einem Ausschnitt aus der Originaltopographie, der die Zuordnung erleichtern soll.

In den langwelligen Bereichen ist für $l = 1$ bis $l = 3$ die Landmasse Asiens zwischen $\varphi = 0°$ und $\varphi = 90°$ zu erkennen, während ein Maximum für $l = 4$ bis $l = 10$ zwischen $\varphi = -50°$ und $\varphi = -90°$ durch die Antarktis hervorgerufen wird. Für größere l erkennt man zwischen $\varphi = 80°$ und $\varphi = 90°$ einen Grat, der den Kontinentalaufschwung aus dem Nordpolarmeer nach Asien markiert. Zwischen $\varphi = 10°$ und $\varphi = 0°$ fällt Indien in den Indischen Ozean ab und zwischen $\varphi = -60°$ und $\varphi = -70°$ hebt sich die Antarktis wieder aus dem Indischen Ozean. Zwischen $\varphi = 25°$ und $\varphi = 40°$ ist der Himalaya als deutliches Maximum und um $\varphi = -50°$ die Kerguelen im Indischen Ozean zu erkennen. Sibirien, der Indische Ozean und der Eispanzer der Antarktis sind als relativ topographiearme Gegenden durch Senken gekennzeichnet.

Abb. 3.4.1.5 und 3.1.4.6: Lok. der Topographie entlang des Längenkreises $\lambda = 75^o$

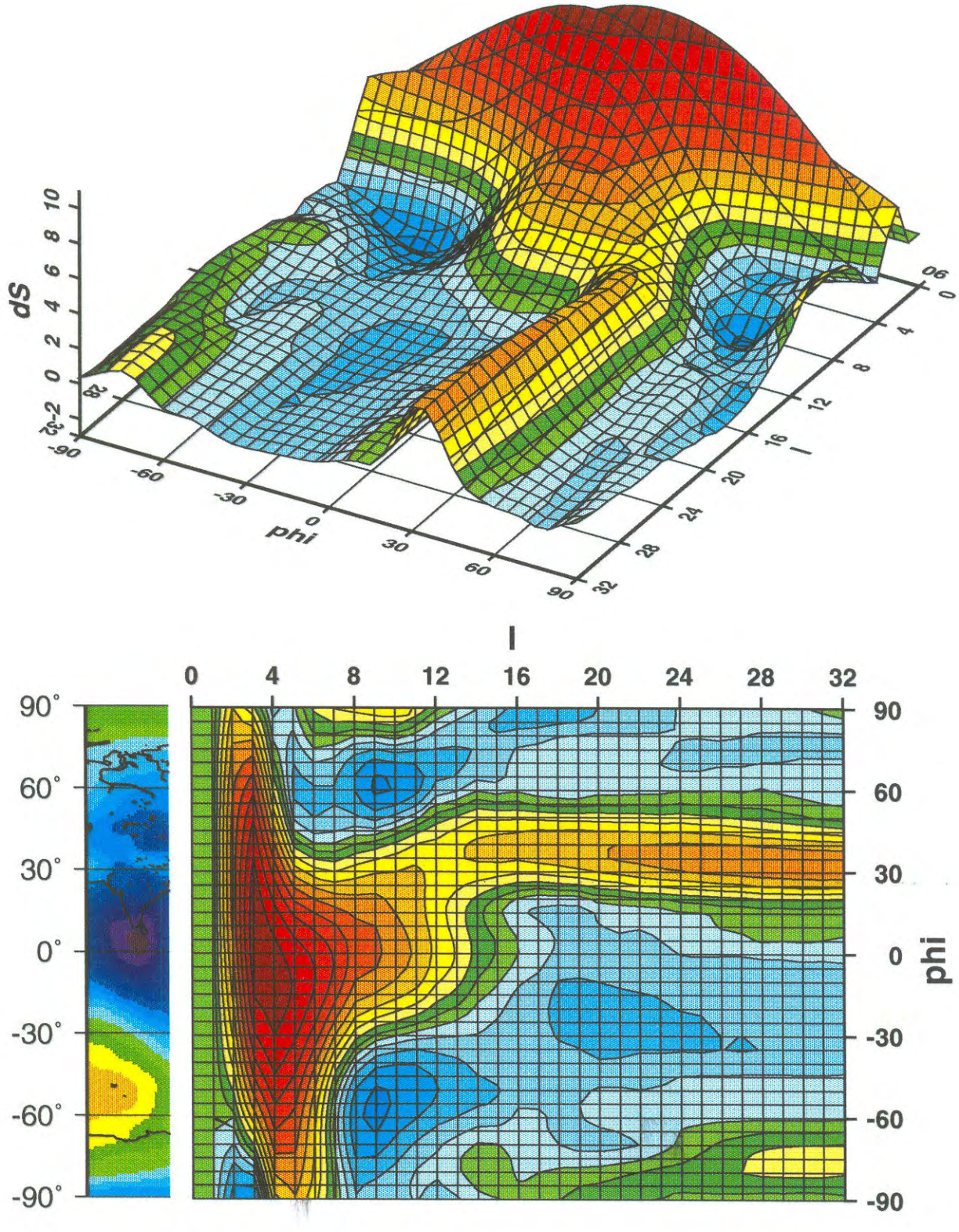


x-Achse: Entwicklungsgrad der lokalisierten Koeffizienten l

y-Achse: Breite φ entlang des Längenkreises $\lambda = 75^o$

z-Achse: RMS-Amplitude $\Delta S_l(75^o, \vartheta) = S_l(75^o, \vartheta) - \overline{S}_l$

Abb. 3.4.1.7 und 3.4.1.8: Lok. der Geoidundulationen entlang des Längenkreises $\lambda = 75^o$



x-Achse: Entwicklungsgrad der lokalisierten Koeffizienten l

y-Achse: Breite φ entlang des Längenkreises $\lambda = 75^o$

z-Achse: RMS-Amplitude $\Delta S_l(75^o, \vartheta) = S_l(75^o, \vartheta) - \overline{S}_l$

Die Abbildungen 3.4.1.7 und 3.1.4.8 zeigen vergleichend dazu den entsprechenden Schnitt durch die Lokalisierungen der Geoidundulationen. Alles dominierend liegt im langwelligen Bereich bis $l \approx 12$ das Indien-Tief über nahezu der gesamten Halbkugel. Ab $l = 13$ beginnt sich zwischen $\varphi = 25°$ und $\varphi = 45°$ der Himalaya abzuzeichnen. Im kurzwelligen Bereich kommt zwischen $\varphi = -60°$ und $\varphi = -90°$ der Einfluß der Antarktis dazu. Der Indische Ozean und Sibirien sind auch hier für größere l sehr ruhige Gebiete.

Die Abbildungen 3.4.1.9 bis 3.4.1.13 schneiden das Indien-Tief entlang des Breitenkreises $\vartheta = 85°$.

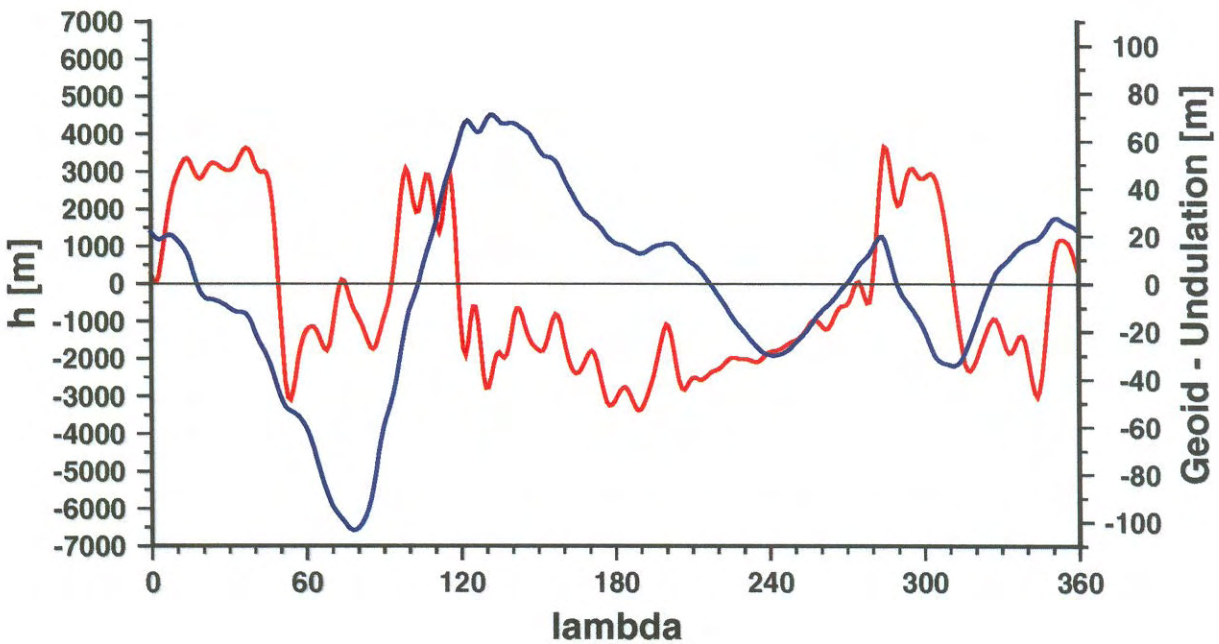
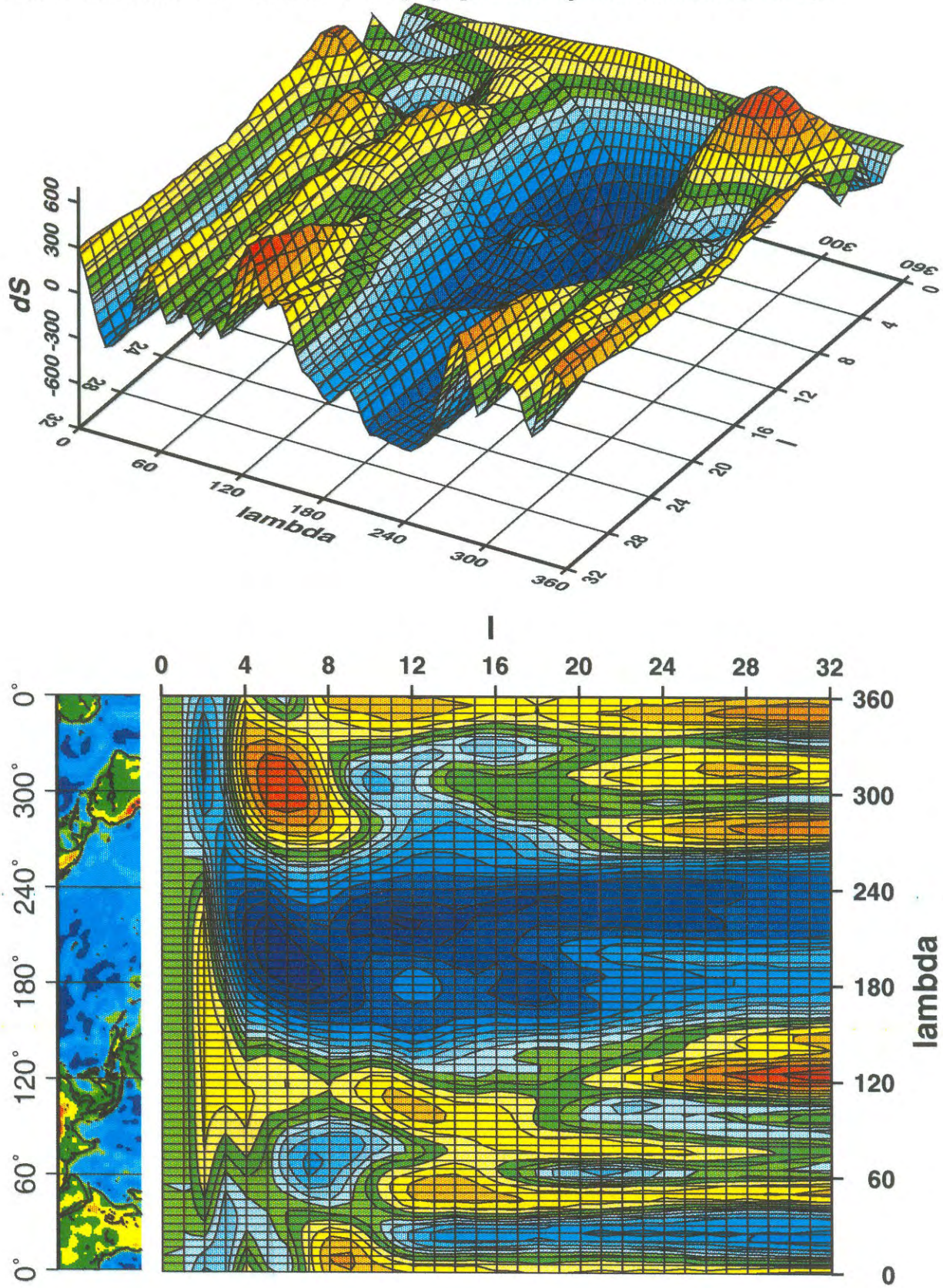


Abb. 3.4.1.9: Schnitte durch die Topographie (rot) und das Geoid (blau), diesmal entlang des Breitenkreises $\vartheta = 85°$. Deutlich zu erkennen ist wieder das Indien-Tief zwischen $\lambda = 20°$ und $\lambda = 100°$, mit Minimum zwischen $\lambda = 70°$ und $\lambda = 80°$. Direkt benachbart schließt sich das Hoch über Neuguinea an, das von $\lambda = 100°$ bis $\lambda = 220°$ reicht, mit einer etwas breiteren Spitze zwischen $\lambda = 120°$ und $\lambda = 145°$. In diesem Bereich zeigt sich kaum Übereinstimmung mit der Topographie. Erst im Bereich der Anden um $\lambda = 280°$ decken sich Topographie und Geoidundulationen wieder. Auch im Bereich Polynesiens um $\lambda = 200°$ kann man den Einfluß der Topographie erkennen.

Abb. 3.4.1.10 und 3.4.1.11: Lok. der Topographie entlang des Breitenkreises $\vartheta = 85^o$

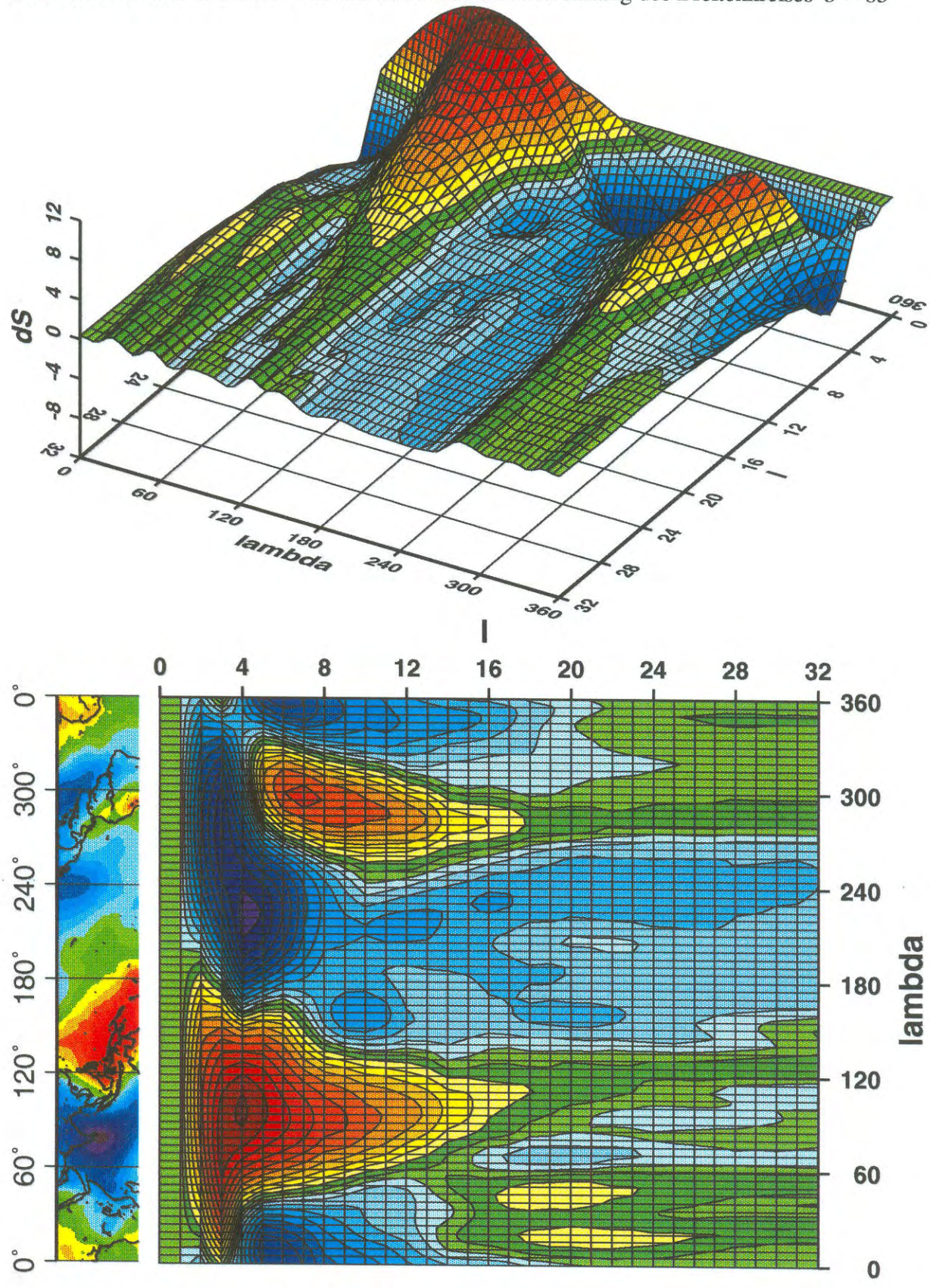


x-Achse: Entwicklungsgrad der lokalisierten Koeffizienten l

y-Achse: Länge λ entlang des Breitenkreises $\vartheta = 85^o$

z-Achse: RMS-Amplitude $\Delta S_l(\lambda, 85^o) = S_l(\lambda, 85^o) - \overline{S}_l$

Abb. 3.4.1.12 und 3.4.1.13: Lok. der Geoidundulationen entlang des Breitenkreises $\vartheta = 85^o$



x-Achse: Entwicklungsgrad der lokalisierten Koeffizienten l

y-Achse: Länge λ entlang des Breitenkreises $\vartheta = 85^o$

z-Achse: RMS-Amplitude $\Delta S_l(\lambda, 85^o) = S_l(\lambda, 85^o) - \overline{S}_l$

Die Abbildungen 3.4.1.10 und 3.4.1.11 zeigen die Lokalisierungen der Topographie entlang des Breitenkreises $\vartheta = 85^{\circ}$. Im langwelligen Bereich zwischen $l = 4$ und $l = 8$ ist Südamerika zu erkennen, auch Afrika zeichnet sich zwischen $l = 7$ und $l = 10$ ab, das Zentrum des Maximums ist allerdings leicht Richtung Atlantik verschoben. Für $l = 9$ bis $l = 14$ wird Indonesien zwischen $\lambda = 80^{\circ}$ und $\lambda = 120^{\circ}$ sichtbar. Im kürzerwelligen Bereich ist um $\lambda = 125^{\circ}$ der Philippinengraben und um $\lambda = 145^{\circ}$ den Marianengraben zu erkennen. An den Rändern Afrikas und Südamerikas sind deutlich die Kontinentalaufschwünge zu sehen während sich das Amazonasbecken und Zentralafrika eher ruhig darstellen. Auch der Pazifik ist als breite Senke über fast alle Wellenlängen zu erkennen.

Im Vergleich dazu in den Abbildungen 3.4.1.12 und 3.4.1.13 der Schnitt durch die Lokalisierungen der Geoidundulationen. Im langwelligen Bereich dominiert das Maximum zwischen dem Indien-Tief und dem Neuguinea-Hoch des Geoides, deutlich zu erkennen zwischen $l = 2$ und $l \approx 15$. Im Bereich der Subduktionszone vor der Westküste Südamerikas ist ein weiteres Maximum für $l = 5$ bis $l \approx 16$ ausgeprägt. Auch die Kontinentalaufschwünge vor den Küsten Afrikas sind im mittel- bis kurzwelligen Bereich zu erkennen sowie der Philippinengraben um $\lambda = 130^{\circ}$ und der Mittelatlantische Rücken um $\lambda = 350^{\circ}$. An der Westküste Südamerikas um $\lambda = 280^{\circ}$ bis $\lambda = 295^{\circ}$ markiert ein Grat die Ausläufer der Anden. Der Pazifik ist wieder als ruhige Senke sichtbar.

3.4.2 Geoid – Hoch über den Anden

Das Hoch über den Anden bildet sich in zwei Bereichen ab. Zum einen im mittelwelligen Bereich von $l \approx 8$ bis $l \approx 17$, was wohl auf den Einfluß der Subduktionszone unter der Westküste Südamerikas zurückzuführen ist und im kurzwelligen Bereich, was den Einfluß der Topographie wiederspiegelt.

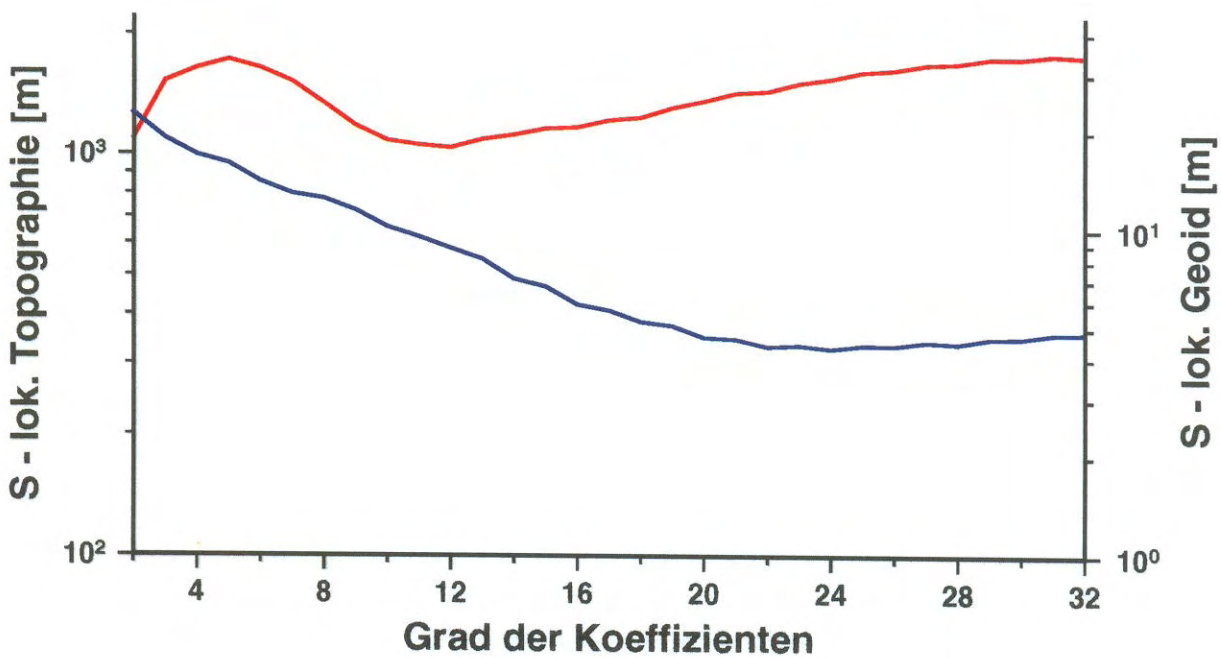


Abb. 3.4.2.1: RMS-Amplituden der lokalisierten ($L_{obs} = 48$, $f_s = 2$) Koeffizienten der Topographie und der Geoidundulationen für alle Grade an der Stelle $\lambda = 290^{\circ}, \vartheta = 110^{\circ}$.

Im Vergleich von Abbildung 3.4.2.1 mit Abbildung 3.1.7, in der die gemittelten RMS-Amplituden der lokalisierten Felder dargestellt sind, fällt sofort auf, daß die Amplituden der lokalisierten Koeffizienten für größere l nicht stetig fallen sondern wieder ansteigen und bei $l = 32$ mehr als das Dreifache der entsprechenden mittleren Amplituden erreichen. Dies spiegelt deutlich die ausgeprägte Topographie der Anden und ihren großen Einfluß auf die Geoidundulationen wieder.

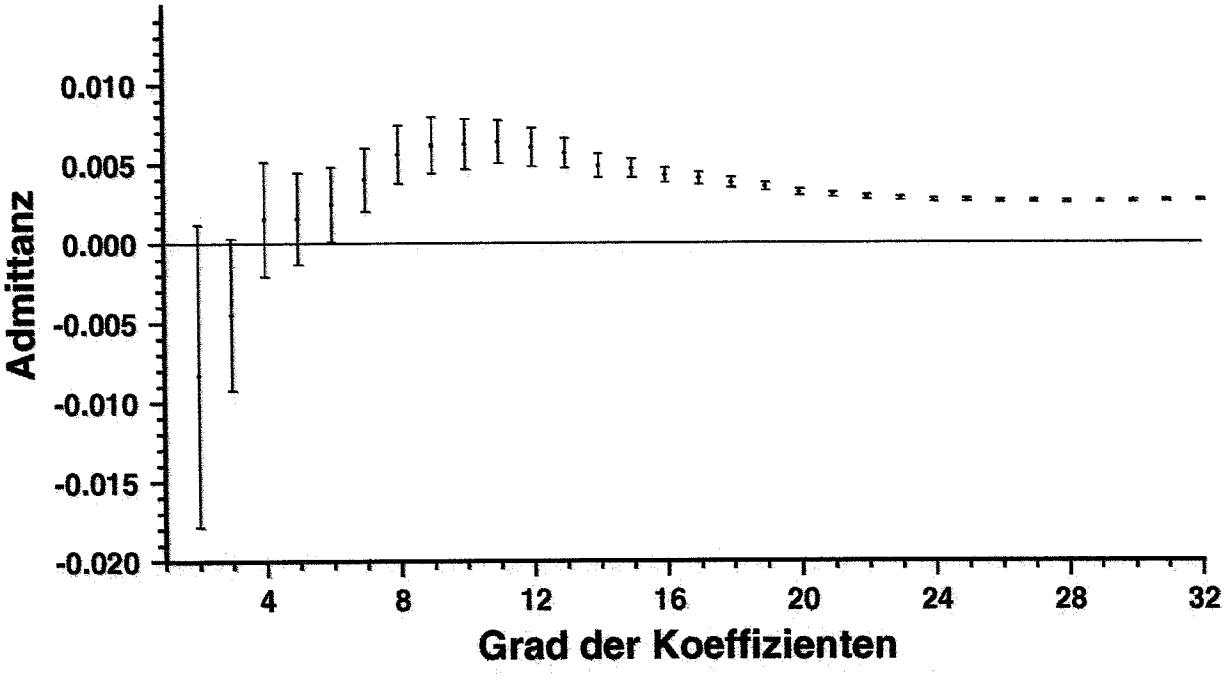


Abb. 3.4.2.2: Admittanzen der lokalisierten Geoidundulationen bezüglich der lokalisierten Topographie für $\lambda = 290^\circ, \vartheta = 110^\circ$ mit 67%-Fehlergrenzen.

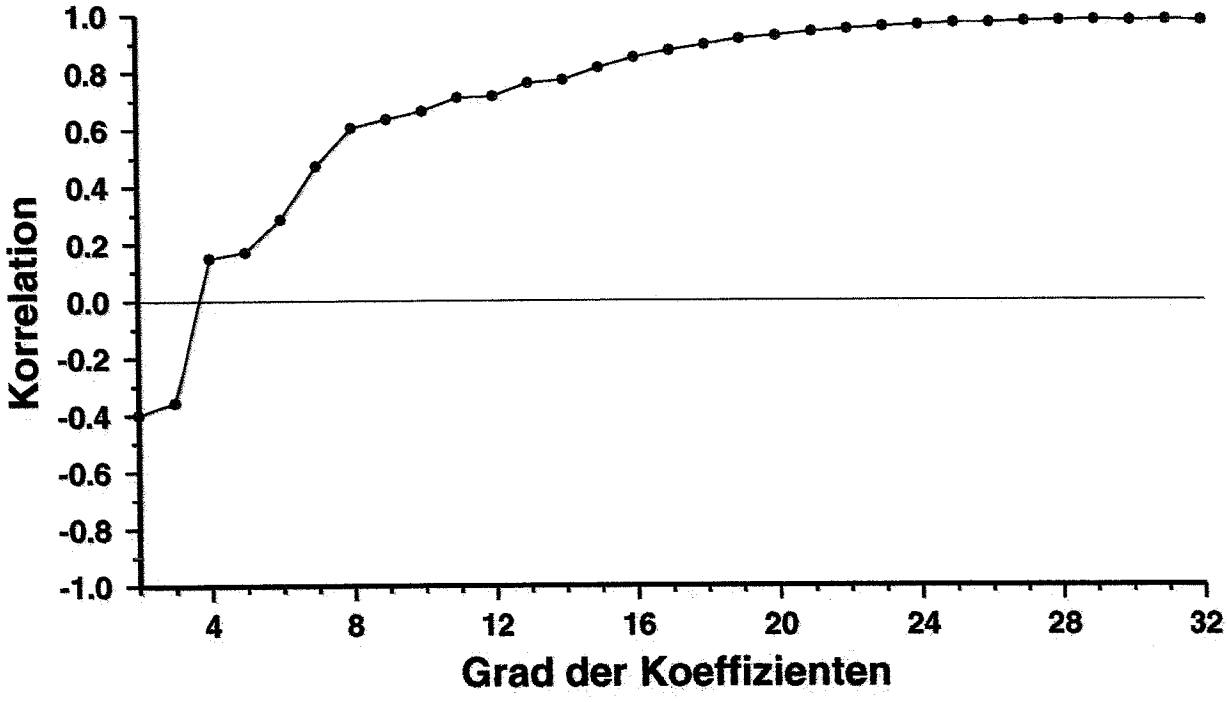


Abb.3.4.2.3: Korrelationen zwischen den Koeffizienten der lokalisierten Topographie und denen der Geoidundulationen für $\lambda = 290^\circ, \vartheta = 110^\circ$.

Das für die Originalfelder (Abbildung 3.1.8) auftretende lokale Minimum bei $l = 5$ ist in Abbildung 3.4.2.2 nahezu verschwunden und das Minimum bei $l = 12$ hat sich sogar in ein Maximum verwandelt. Für größere l fallen die Admittanzen langsam aber stetig ab, sind für $l = 32$ mit Werten um +0.003 aber noch etwas größer als bei den Originalfeldern.

In Abbildung 3.4.2.3 sind die beiden Minima bei $l = 5$ und $l = 12$ vollständig verschwunden. Vielmehr steigen die Korrelationen ab $l = 2$ stetig an und erreichen schnell Werte nahe 1, während sie für die Originalfelder (Graphik 3.1.9) bei 0.6 liegen. Die Korrelation zwischen Geoid und Topographie ist an dieser Stelle also für fast alle Wellenlängen außerordentlich gut.

Die folgenden Abbildungen 6.4 bis 6.8 betrachten einen Schnitt durch das Anden-Hoch entlang des Längenkreises $\lambda = 290^o$.

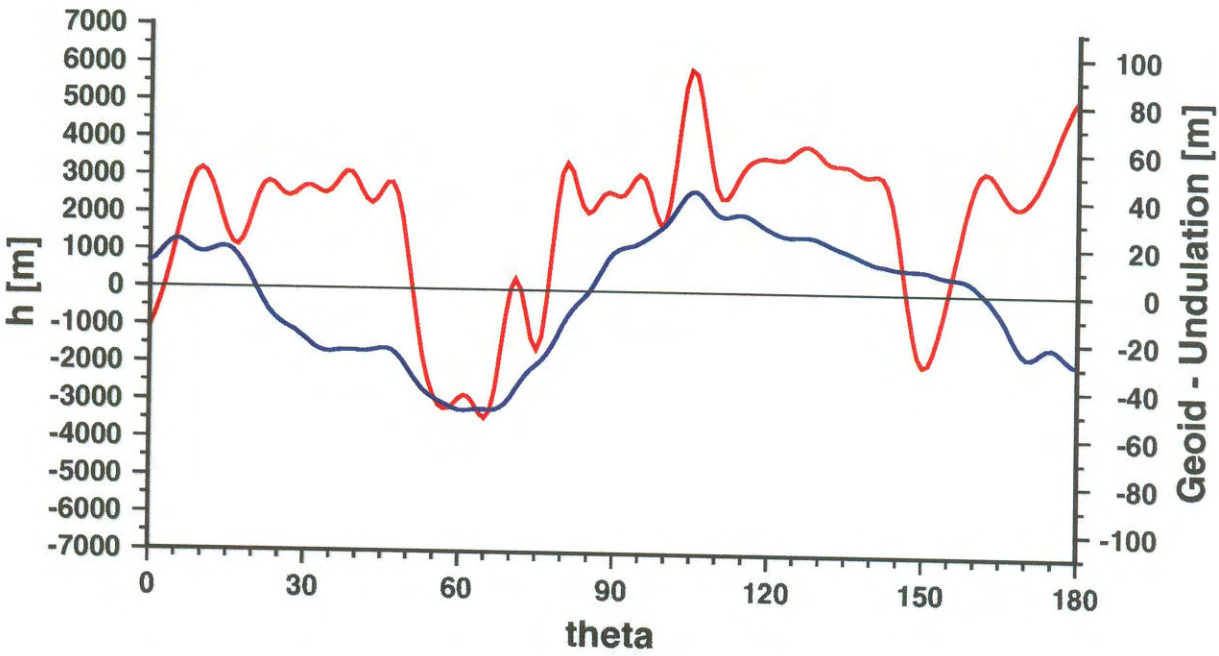
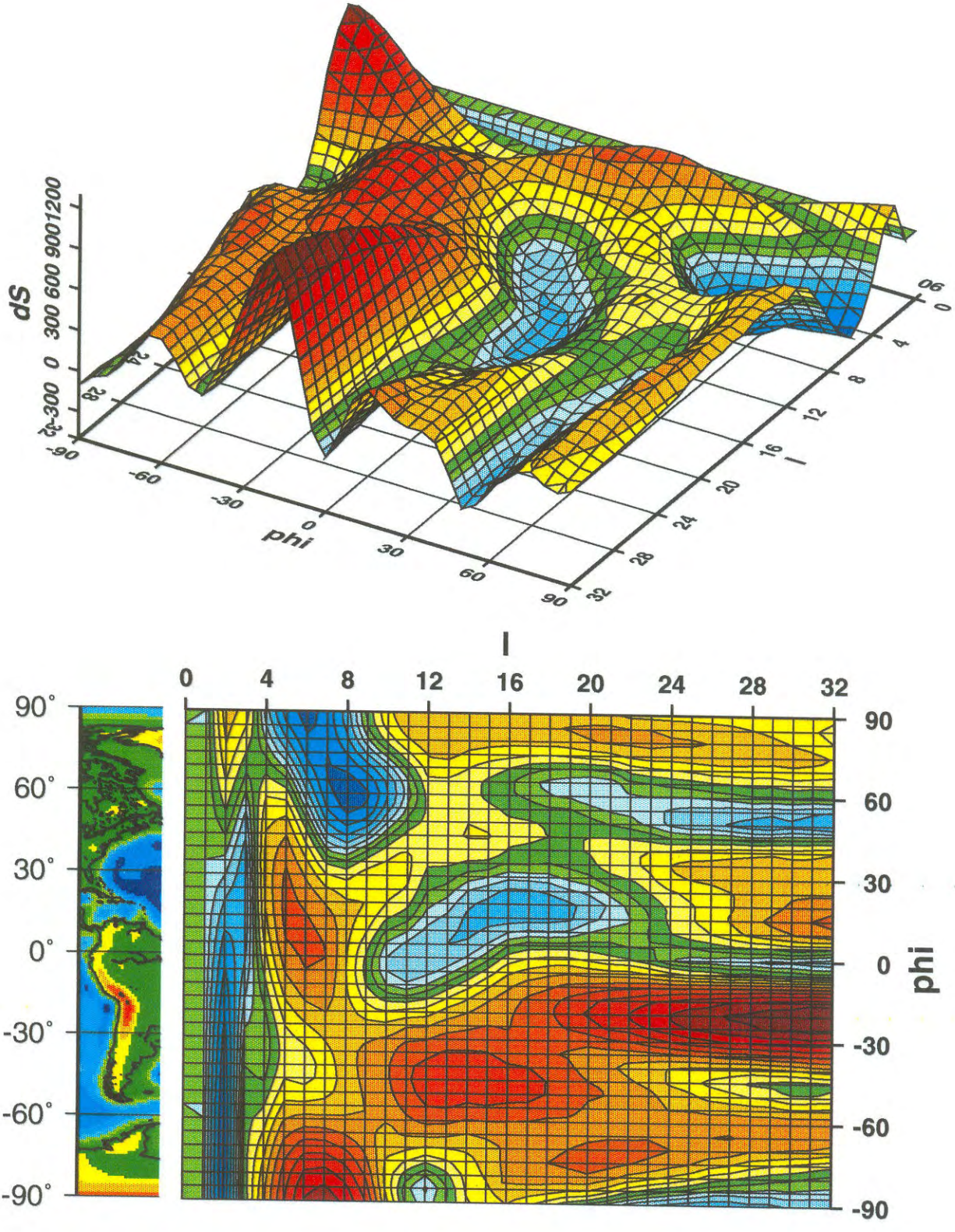


Abb. 3.4.2.4: Schnitte durch die Topographie (rot) und das Geoid (blau) entlang des Längenkreises $\lambda = 290^o$. Deutlich ist um $\vartheta = 105^o$ in der Topographie ein starker Peak für die zentralen Anden zu sehen, der sich auch auf das Geoid auswirkt, das dort ebenfalls ein Hoch besitzt.

In den Abbildungen 3.4.2.5 und 3.4.2.6 sind entlang des Längenkreises $\lambda = 290^o$ die Differenzen zwischen den RMS-Amplituden der lokalisierten Topographie und ihren globalen Mitteln für die Grade $l = 0$ bis $l = 32$ dargestellt; einmal in Schrägsicht und einmal in Draufsicht mit einem Ausschnitt aus der Original-Topographie, der die Zuordnung erleichtern soll.

Im langwelligen Bereich zwischen $l = 4$ und $l = 10$ ist die Antarktis als Maximum zu erkennen und ein weiteres Maximum für $l = 4$ bis $l = 8$ liegt zwischen Südamerika und dem Nordamerikanischen Becken, das wohl von beiden Strukturen gemeinsam verursacht wird. Im mittelwelligen Bereich zwischen $l = 10$ und $l = 20$ liegt ein Maximum über Feuerland und im kurzwelligen Bereich ist sehr dominant ein Maximum über den zentralen Anden zwischen $\varphi = -10^o$

Abb. 3.4.2.5 und 3.4.2.6: Lok. der Topographie entlang des Längenkreises $\lambda = 290^o$

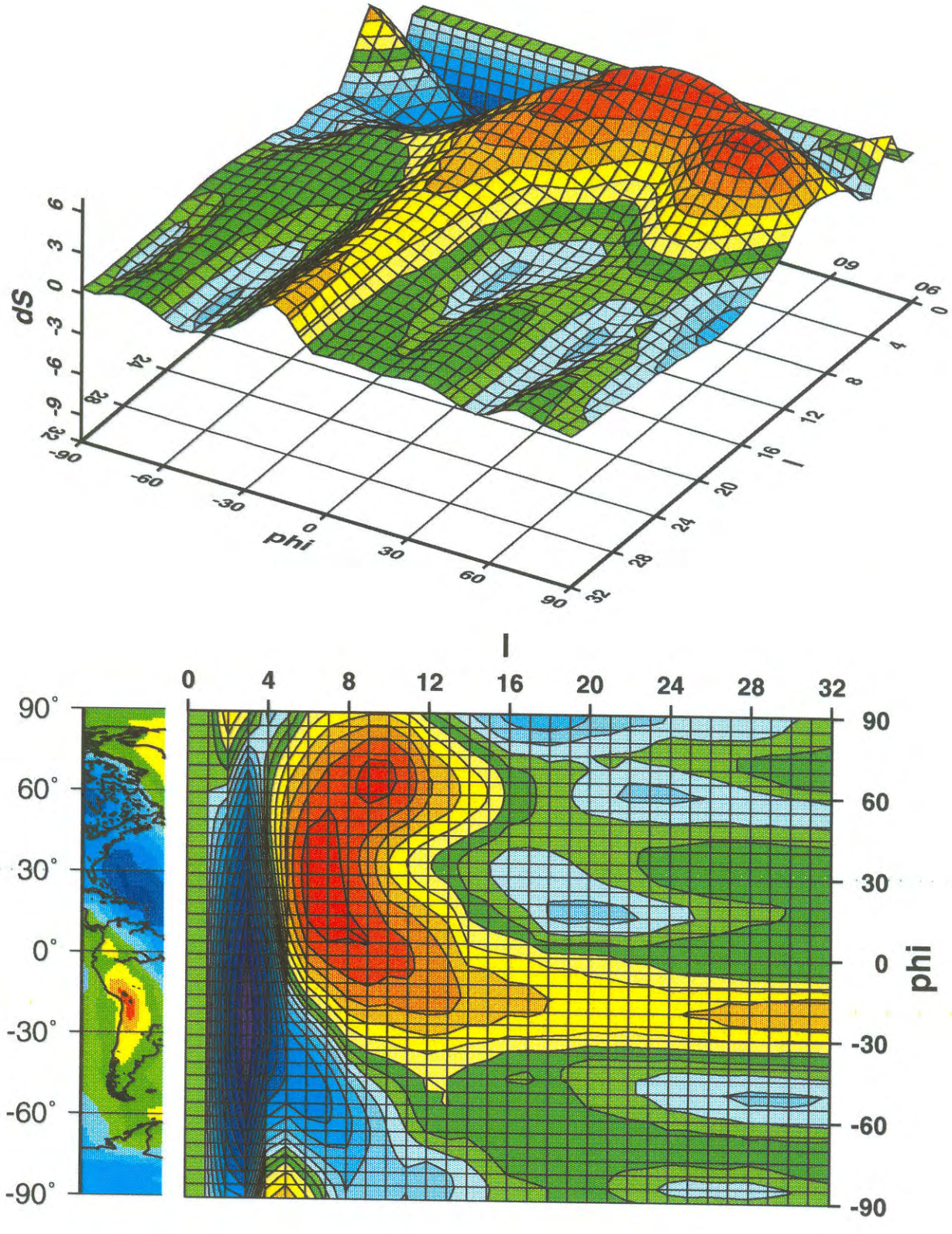


x-Achse: Entwicklungsgrad der lokalisierten Koeffizienten l

y-Achse: Breite φ entlang des Längenkreises $\lambda = 290^o$

z-Achse: RMS-Amplitude $\Delta S_l(290^o, \vartheta) = S_l(290^o, \vartheta) - \overline{S}_l$

Abb. 3.4.2.7 und 3.4.2.8: Lok. der Geoidundulationen entlang des Längenkreises $\lambda = 290^o$



x-Achse: Entwicklungsgrad der lokalisierten Koeffizienten l

y-Achse: Breite φ entlang des Längenkreises $\lambda = 290^o$

z-Achse: RMS-Amplitude $\Delta S_l(290^o, \vartheta) = S_l(290^o, \vartheta) - \overline{S}_l$

und $\varphi = -35°$ zu erkennen. Weitere Maxima liegen über den Antillen um $\varphi = 15°$ und etwas schwächer über Baffin Land um $\varphi = 75°$. Auch im Bereich der Drake Street zwischen Feuerland und Graham Land ist ein Maximum zu erkennen. Als besonders ruhige Zone fällt der Osten Nordamerikas zwischen $\varphi = 45°$ und $\varphi = 60°$ auf.

Die Abbildungen 3.4.2.7 und 3.4.2.8 zeigen vergleichend dazu den entsprechenden Schnitt durch die Lokalisierungen der Geoidundulationen. Der Bereich bis $l = 4$ ist sehr ruhig während sich für $l = 5$ bis $l = 9$ ein Maximum im Nordamerikanischen Becken formt. Zwischen $l = 8$ und $l = 11$ ist ein weiteres Maximum zwischen $\varphi = 55°$ und $\varphi = 75°$ zu erkennen, das eventuell ein Ausläufer des Geoid-Tiefs über der Hudson Bay sein könnte. Im kurzwelligen Bereich ist ab $l = 25$ ein Maximum über den Anden die deutlichste Struktur, die sich also im Unterschied zum Indien-Tief über ein längeres Spektralband bis hin zu kleinräumigen Strukturen abbilden. Ein leichtes Maximum wird auch über Palmer Land (mit Gebirgen bis über 4000m) in der Antarktis gebildet.

Die Abbildungen 3.4.2.9 bis 3.4.2.13 zeigen Schnitte des Anden-Hochs entlang des Breitenkreises $\vartheta = 110°$.

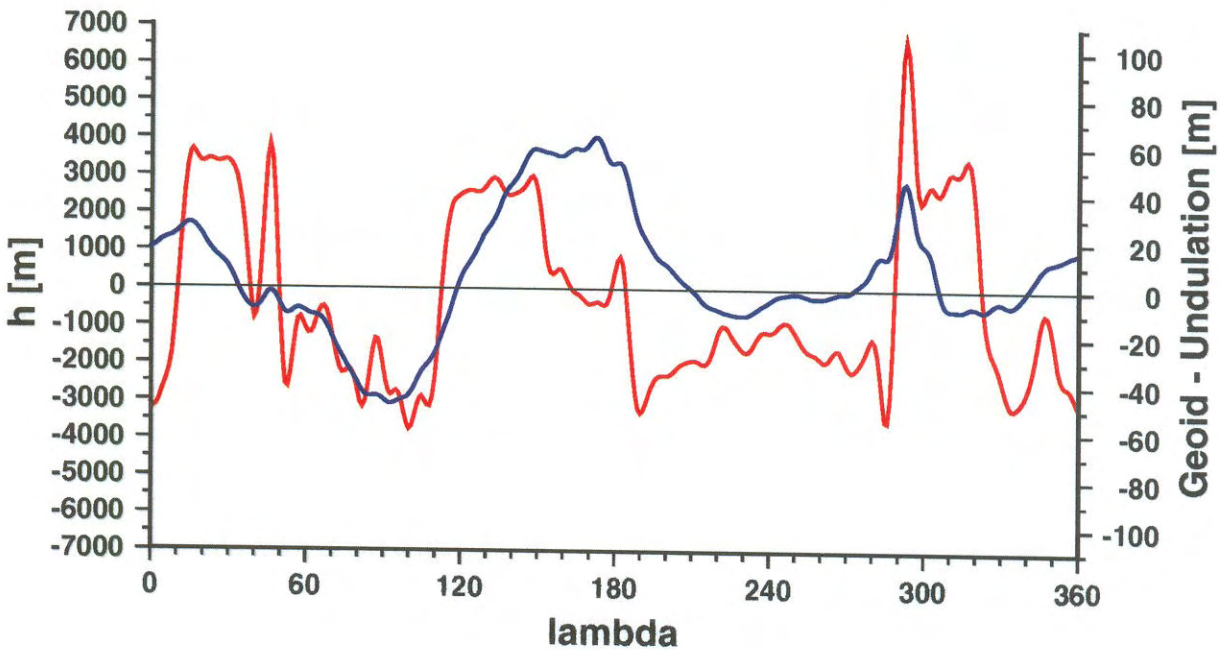
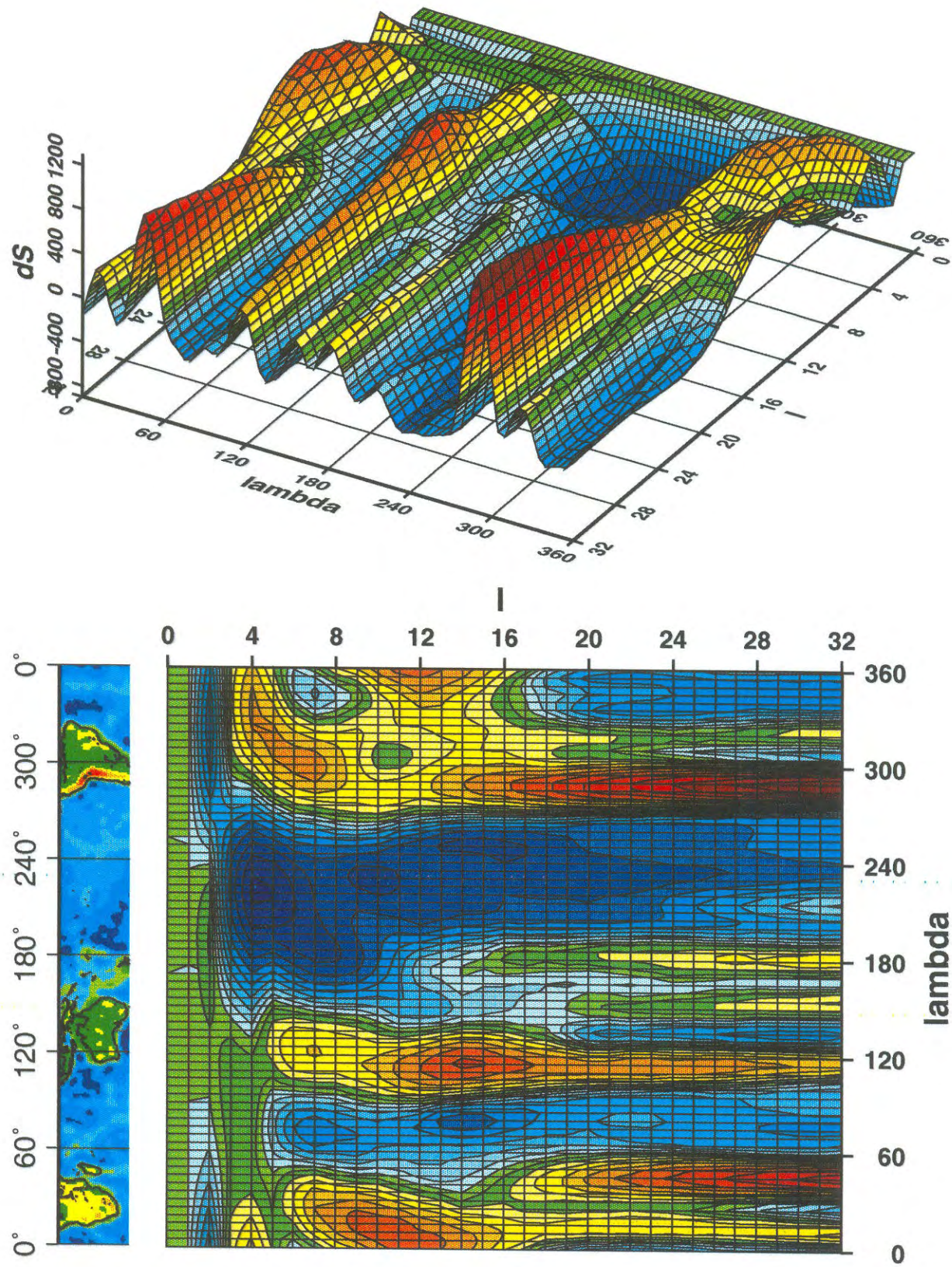


Abb. 3.4.2.9: Schnitte durch die Topographie (rot) und das Geoid (blau), diesmal entlang des Breitenkreises $\vartheta = 110°$. Deutlich zu erkennen in beiden Profilen ist der Peak über den Anden bei $\lambda = 290°$. Auch die Senken des Pazifiks und des Indischen Ozeans sind auf dem Geoid zu erkennen, während sich Australien und Afrika leicht verschoben abbilden.

Abb. 3.4.2.10 und 3.4.2.11: Lok. der Topographie entlang des Breitenkreises $\vartheta = 110^o$

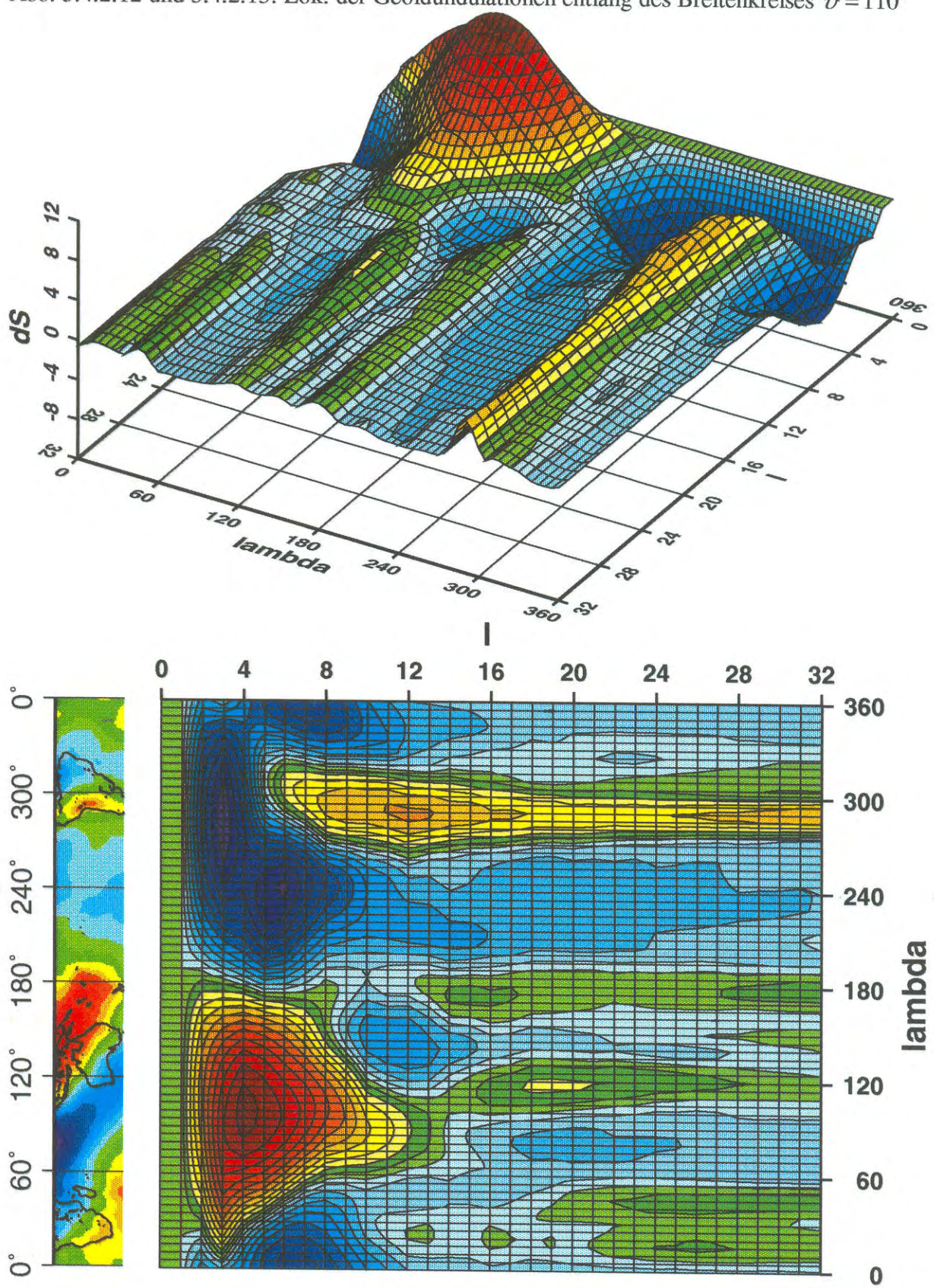


x-Achse: Entwicklungsgrad der lokalisierten Koeffizienten l

y-Achse: Länge λ entlang des Breitenkreises $\vartheta = 110^o$

z-Achse: RMS-Amplitude $\Delta S_l(\lambda,110^o) = S_l(\lambda,110^o) - \overline{S}_l$

Abb. 3.4.2.12 und 3.4.2.13: Lok. der Geoidundulationen entlang des Breitenkreises $\vartheta = 110^o$



x-Achse: Entwicklungsgrad der lokalisierten Koeffizienten l

y-Achse: Länge λ entlang des Breitenkreises $\vartheta = 110^o$

z-Achse: RMS-Amplitude $\Delta S_l(\lambda, 110^o) = S_l(\lambda, 110^o) - \overline{S}_l$

Die Abbildungen 3.4.2.10 und 3.4.2.11 zeigen die Lokalisierungen der Topographie entlang des Breitenkreises $\vartheta = 110^{\circ}$. Für lange Wellenlängen ist ein Maximum zwischen $l = 4$ und $l = 9$ im Bereich Südamerikas zu erkennen, während sich für $l = 6$ bis $l = 16$ ein Maximum am westlichen Rand Afrikas und zwischen $l = 9$ und $l = 17$ eines an der Westküste Australiens bildet. Für kürzere Wellenlängen ist ein sehr deutlicher Peak über den Anden und dem angrenzenden Atacamagraben ausgebildet. Ein weiteres deutliches Maximum liegt über Madagaskar. Im Pazifik sind bei $\lambda = 215^{\circ}$ Tahiti und bei $\lambda = 180^{\circ}$ die Fiji-Inseln zu erkennen. Weitere Maxima werden für $\lambda = 325^{\circ}$ beim Kontinentalaufschwung östlich Südamerikas, für $\lambda = 155^{\circ}$ und um $\lambda = 115^{\circ}$ beim Kontinentalaufschwung beidseitig Australiens sowie für $\lambda = 10^{\circ}$ beim Kontinentalaufschwung westlich Afrikas erreicht.

Im Vergleich dazu in den Abbildungen 3.4.2.12 und 3.4.2.13 der Schnitt durch die Lokalisierungen der Geoidundulationen. Im langwelligen Bereich sind noch die Ausläufer des Indien-Tiefs und des Neuguinea-Hochs dominant und bilden zusammen ein ausgeprägtes Maximum von $l = 2$ bis $l \approx 10$. Zwischen $l = 6$ und $l = 18$ wird ein Maximum über der Subduktionszone des Atacamagrabens und den Anden gebildet, das sich für größere l fortsetzt und sich bis zu einem weiteren Maximum bei $l = 32$ um $\lambda = 290^{\circ}$ verfolgen läßt. Um $\lambda = 45^{\circ}$ liegt im kurzwelligen Bereich ein Maximum über Madagaskar und bei $\lambda = 180^{\circ}$ eines über den Fiji-Inseln, welches sich bis in mittlere Wellenlängen zurückverfolgen läßt und zwischen $l = 14$ und $l = 17$ ein zweites Maximum erreicht, hervorgerufen wahrscheinlich durch die Subduktionszone des Tongagrabens. Ein relativ schwach ausgeprägtes Maximum liegt im Bereich des Kontinentalaufschwunges um $\lambda = 120^{\circ}$ westlich Australiens.

Literaturliste

Cazenave, A., Dominh, K., Allegre, C.J. und Marsh, J.G. (1986): *Global Relationship between Oceanic Geoid and Topographie*, Journal of Geophysical Research 91 (1986) 11,439-11,450

Ilk, K.H. (1983): *Ein Beitrag zur Dynamik ausgedehnter Körper – Gravitaionswechselwirkung*, Deutsche Geodätische Gesellschaft bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, München 1983

Louis, A.K., Maas, P., Rieder, A. (1994): *Wavelets*, B.G. Teubner Studienbücher Mathematik, Stuttgart 1994

Rapp, R.N. und Yi, Y. (1991): *The October 1990 1x1 degree mean anomaly file including an analysis of gravity information from China*, Ohio State University, Dept. Geod. Sci. and Surv., Internal Report, Columbus, OH, 1991

Schwintzer, P., Reigber, Ch., Bode, A., Kang, Z., Zhu, S.Y., Massmann, F.-H., Raimondo, J.C., Biancale, R., Balmino, G., Lemoine, J.M., Moynot, B., Marty, J.C., Barlier, F. und Boudon, Y. (1997): *Long-wavelength global gravity field models: GRIM4-S4, GRIM4-C4*, Journal of Geodesy 71 (1997) 189-208

Simons, M., Solomon, S.C. und Hager, B.H. (1997): *Localization of gravity and topography: constraints on the tectonics and mantle dynamics of Venus*, Geophys. J. Int. 131 (1997) 24-44

Simons, M. und Hager, B.H. (1997): *Localization of the gravity field and the signature of glacial rebound*, Nature 390 (1997) 500-504

Varshalovich, D.A., Moskalev, A.N. und Kjersonskii, V.K. (1988): *Quantum Theory of Angular Momentum*, World Scientific, Singapore 1988

Außerdem habe ich von M. Simons die Lokalisierungs-Software: sph_calc, sph_exp und sph_map benutzt.

Alle Graphiken sind mit GMT3.1 von Paul Wessel und Walter H.F. Smith erstellt worden (frei verfügbar unter www.soest.hawaii.edu/gmt).

Anhang:

A1 Normierung

Da die Normierung nicht überall in der Literatur einheitlich gehandhabt wird, stelle ich die Formeln für die Normierung, wie sie hier benutzt werden, kurz zusammen (K.H. Ilk, 1983, S. 119 ff.).

Legendre-Polynome: $P_l(t) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dt^l}\left(t^2-1\right)$

Zugeordnete Legendre-Polynome: $P_{lm}(t) = \left(1-t^2\right)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dt^m}P_l(t)$

$$\int_{-1}^{1} P_{lm}(t)P_{kn}(t)dt = \frac{2}{2l+1}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\delta_{lk}\delta_{mn}$$

Vollständig normierte Legendre-Polynome: $\overline{P}_{lm}(t) = \sqrt{(2-\delta_{m0})(2l+1)\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_{lm}(t)$

$$= \alpha_{lm}P_{lm}(t)$$

$$\int_{-1}^{1} \overline{P}_{lm}(t)\overline{P}_{kn}(t)dt = 2\left(2-\delta_{m0}\right)\delta_{lk}\delta_{mn}$$

mit $t = \cos\vartheta$: $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \overline{P}_{lm}(\cos\vartheta)\overline{P}_{kn}(\cos\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\lambda$

$$= 4\pi\left(2-\delta_{m0}\right)\delta_{lk}\delta_{mn}$$

Damit ergibt sich für die Entwicklung einer Funktion $A(\lambda,\vartheta)$ in Kugelflächenfunktionen

$$A(\lambda,\vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}\left(c_{lm}C_{lm}(\lambda,\vartheta) + s_{lm}S_{lm}(\lambda,\vartheta)\right) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}\left(\overline{c}_{lm}\overline{C}_{lm}(\lambda,\vartheta) + \overline{s}_{lm}\overline{S}_{lm}(\lambda,\vartheta)\right).$$

Dabei gilt $C_{lm}(\lambda,\vartheta) = P_{lm}(\cos\vartheta)\cos(m\lambda)$ bzw. $S_{lm}(\lambda,\vartheta) = P_{lm}(\cos\vartheta)\sin(m\lambda)$. c_{lm}, s_{lm} sind die Koeffizienten der Kugelflächenfunktionsentwicklung von $A(\lambda,\vartheta)$, nach ihnen aufgelöst gilt

$$c_{lm} = \frac{1}{4\pi}(2-\delta_{m0})(2l+1)\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} A(\lambda,\vartheta)C_{lm}(\lambda,\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\lambda,$$

$$s_{lm} = \frac{1}{4\pi}(1-\delta_{m0})(2l+1)\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} A(\lambda,\vartheta)S_{lm}(\lambda,\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\lambda.$$

Für die normierten Funktionen gilt entsprechend $\overline{C}_{lm}(\lambda,\vartheta) = \overline{P}_{lm}(\cos\vartheta)\cos(m\lambda)$ bzw. $\overline{S}_{lm}(\lambda,\vartheta) = \overline{P}_{lm}(\cos\vartheta)\sin(m\lambda)$. $\overline{c}_{lm}, \overline{s}_{lm}$ sind die vollständig normierte Koeffizienten, sie hängen mit den normierten wie folgt zusammen:

$$\overline{c}_{lm} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} A(\lambda,\vartheta)\overline{C}_{lm}(\lambda,\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\lambda = \frac{1}{\alpha_{lm}}c_{lm},$$

$$\bar{s}_{lm} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} A(\lambda,\vartheta)\bar{S}_{lm}(\lambda,\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\lambda = \frac{1}{\alpha_{lm}} s_{lm}.$$

Komplexe Kugelflächenfunktionen:

$$Y_{lm}(\cos\vartheta) = P_{lm}(\cos\vartheta)e^{im\lambda} = P_{lm}(\cos\vartheta)\cos(m\lambda) + iP_{lm}(\cos\vartheta)\sin(m\lambda) = C_{lm}(\lambda,\vartheta) + iS_{lm}(\lambda,\vartheta)$$

$$Y_{l-m}(\cos\vartheta) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_{lm}(\cos\vartheta)e^{-im\lambda} = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!}\left(C_{lm} - iS_{lm}\right)$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} Y_{lm}(\lambda,\vartheta)Y_{kn}^*(\lambda,\vartheta)\cos\vartheta\, d\vartheta\, d\lambda = 4\pi\frac{1}{2l+1}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\delta_{lk}\delta_{mn},$$

$Y_{kn}^*(\lambda,\vartheta) = (-1)^n Y_{k-n}(\lambda,\vartheta)$ ist die konjugiert Komplexe zu $Y_{kn}(\lambda,\vartheta)$.

Vollständig normierte komplexe Kugelflächenfunktionen:

$$\bar{Y}_{lm}(\lambda,\vartheta) = (-1)^m\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}Y_{lm}(\lambda,\vartheta) = \beta_{lm}Y_{lm}(\lambda,\vartheta) = \beta_{lm}\left(C_{lm} + iS_{lm}\right)$$

$$\bar{Y}_{l-m}(\lambda,\vartheta) = \beta_{l-m}Y_{l-m}(\lambda,\vartheta) = \beta_{l-m}(-1)^m\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_{lm}(\lambda,\vartheta)e^{-im\lambda} = (-1)^m\beta_{lm}P_{lm}(\lambda,\vartheta)e^{-im\lambda}$$

$$= (-1)^m\beta_{lm}\left(C_{lm} - iS_{lm}\right)$$

Die Funktionen mit negativem m ergeben sich aus denen mit positivem m:

$$\mathrm{Re}\left(\bar{Y}_{l-m}(\lambda,\vartheta)\right) = (-1)^m\,\mathrm{Re}\left(\bar{Y}_{lm}(\lambda,\vartheta)\right)$$
$$\mathrm{Im}\left(\bar{Y}_{l-m}(\lambda,\vartheta)\right) = -(-1)^m\,\mathrm{Im}\left(\bar{Y}_{lm}(\lambda,\vartheta)\right)$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\bar{Y}_{lm}(\lambda,\vartheta)\bar{Y}_{kn}^*(\lambda,\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\lambda = \delta_{lk}\delta_{mn}$$

$A(\lambda,\vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}k_{lm}Y_{lm}(\lambda,\vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\bar{k}_{lm}\bar{Y}_{lm}(\lambda,\vartheta)$, k_{lm} sind die komplexen Koeffizienten der Kugelflächenfunktionsentwicklung von $A(\lambda,\vartheta)$, $\bar{k}_{lm}$ entsprechend die vollständig normierten komplexen Koeffizienten.

Löst man nach ihnen auf, so gilt $k_{lm} = \frac{2l+1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}A(\lambda,\vartheta)Y_{lm}^*(\lambda,\vartheta)\sin\vartheta\, d\lambda\, d\vartheta$ bzw.

$$k_{l-m} = (-1)^m\frac{2l+1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}A(\lambda,\vartheta)Y_{lm}(\lambda,\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\lambda.$$

Für die normierten Koeffizienten gilt $\bar{k}_{lm} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}A(\lambda,\vartheta)\bar{Y}_{lm}^*(\lambda,\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\lambda = \frac{1}{\beta_{lm}}k_{lm}$ bzw.

$$\bar{k}_{l-m} = (-1)^m \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} A(\lambda,\vartheta)\bar{Y}_{lm}(\lambda,\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\lambda = \frac{(-1)^m \dfrac{(l-m)!}{(l+m)!}}{\beta_{lm}} k_{l-m} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}k_{l-m}.$$

Die Koeffizienten mit negativem m ergeben sich aus denen mit positivem m:

$$\mathrm{Re}\left(\bar{k}_{l-m}\right) = (-1)^m \mathrm{Re}\left(\bar{k}_{lm}\right)$$
$$\mathrm{Im}\left(\bar{k}_{l-m}\right) = -(-1)^m \mathrm{Im}\left(\bar{k}_{lm}\right)$$

Im Normalfall werden für das zu untersuchende Originalfeld vollständig normierte reelle Koeffizienten vorliegen, die weitere Rechnung erfolgt jedoch mit vollständig normierten komplexen Koeffizienten.

Für die Umrechnung ergibt sich:

$$k_{lm} = \frac{1+\delta_{m0}}{2}\left(c_{lm} - is_{lm}\right)$$

$$\bar{k}_{lm} = \frac{1}{\beta_{lm}}k_{lm} = \frac{1}{\beta_{lm}}\frac{1+\delta_{lm}}{2}\left(c_{lm} - is_{lm}\right) = (-1)^m\sqrt{4\pi\left(2-\delta_{m0}\right)}\frac{1}{\alpha_{lm}}\frac{1+\delta_{m0}}{2}\left(c_{lm} - is_{lm}\right)$$

$$= (-1)^m\sqrt{4\pi}\frac{\sqrt{2-\delta_{m0}}\left(1+\delta_{m0}\right)}{2}\left(\bar{c}_{lm} - i\bar{s}_{lm}\right) = (-1)^m\sqrt{4\pi}\frac{1}{\sqrt{2-\delta_{m0}}}\left(\bar{c}_{lm} - i\bar{s}_{lm}\right)$$

m = 0: $\bar{k}_{l0} = \sqrt{4\pi}\bar{c}_{l0}$

m > 0: $\bar{k}_{lm} = (-1)^m\sqrt{2\pi}\left(\bar{c}_{lm} - i\bar{s}_{lm}\right)$

$\bar{k}_{l-m} = \sqrt{2\pi}\left(\bar{c}_{lm} + i\bar{s}_{lm}\right)$

Nach der Lokalisierung werden die komplexen Koeffizienten wieder in reelle Koeffizienten umgerechnet:

m = 0: $\bar{c}_{l0} = \dfrac{\bar{k}_{l0}}{\sqrt{4\pi}}$; $\bar{s}_{l0} = 0$

m > 0: $\bar{c}_{lm} = (-1)^m\dfrac{\mathrm{Re}\left(\bar{k}_{lm}\right)}{\sqrt{2\pi}}$; $\bar{s}_{lm} = -(-1)^m\dfrac{\mathrm{Im}\left(\bar{k}_{lm}\right)}{\sqrt{2\pi}}$

A2 Wigner - 3lm - Symbole

Die Wigner-3lm-Symbole sind folgendermaßen definiert (D.A. Varshalovich et al., 1988, S. 236 ff.):

$$\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l \\ m_1 & m_2 & m \end{pmatrix} = (-1)^{l+m+2l_1} \frac{1}{\sqrt{2l+1}} C^{l,m}_{l_1,-m_1,l_2,-m_2}$$

Dabei treten die Glebsch-Gordan-Koeffizienten $C^{l,m}_{l_1,-m_1,l_2,-m_2}$ auf:

$$C^{c\gamma}_{a\alpha b\beta} = \delta_{\gamma,\alpha+\beta} \sqrt{\frac{(a+b-c)!(a-b+c)!(-a+b+c)!}{(a+b+c+1)!}}$$
$$\cdot \sqrt{(a+\alpha)!(a-\alpha)!(b+\beta)!(b-\beta)!(c+\gamma)!(c-\gamma)!(2c+1)}$$
$$\cdot \sum_z \frac{(-1)^z}{z!(a+b-c-z)!(a-\alpha-z)!(b+\beta-z)!(c-b+\alpha+z)!(c-a-\beta+z)!}$$

Damit dieser Ausdruck definiert und ungleich Null ist, muß $\alpha+\beta=\gamma$ gelten. Ferner darf keine der Klammern kleiner Null werden, d.h. aus der 1. Wurzel folgt $|a-b| \le c \le a+b$ (Dreiecksungleichung), und aus der 2. Wurzel $|\alpha| \le a$; $|\beta| \le b$; $|\gamma| \le c$.

z läuft über alle ganzen Zahlen für die gilt:

$z \ge 0$,

$(a+b-c-z) \ge 0 \Rightarrow z \le (a+b-c)$,

$(a-\alpha-z) \ge 0 \Rightarrow z \le (a-\alpha)$,

$(b+\beta-z) \ge 0 \Rightarrow z \le (b+\beta)$,

$(c-b+\alpha+z) \ge 0 \Rightarrow z \ge (b-c-\alpha)$,

$(c-a-\beta+z) \ge 0 \Rightarrow z \ge (a-c+\beta)$.

Daraus ergibt sich für z: $\max(0, b-c-\alpha, a-c+\beta) \le z \le \min(a+b-c, a-\alpha, b+\beta)$.

Im Spezialfall $\alpha + \beta + \gamma = 0$ vereinfacht sich der Ausdruck:

Für a + b + c ungerade gilt: $C^{c0}_{a0b0} = 0$

Für a + b + c gerade gilt: $C^{c0}_{a0b0} = \frac{(-1)^{g-c}\sqrt{2c+1}\cdot g!}{(g-a)!(g-b)!(g-c)!} \sqrt{\frac{(2g-2a)!(2g-2b)!(2g-2c)!}{(2g+1)!}}$,

$$g = \frac{a+b+c}{2}.$$

Die Wigner-3lm-Symbole besitzen die Symmetrieeigenschaft

$$\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l \\ -m_1 & -m_2 & -m \end{pmatrix} = (-1)^{l_1+l_2+l} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l \\ m_1 & m_2 & m \end{pmatrix}.$$

A3 Rotation des Originalfeldes

Der Rotationsoperator $\Re(\alpha,\beta,\gamma)$ setze sich aus den drei Drehungen $R_3(\alpha)$ (Drehung um die z-Achse), $R_2(\beta)$ (Drehung um die neue y-Achse) und $R_3(\gamma)$ (Drehung um die neue z-Achse) zusammen.

Daraus ergibt sich für eine mittels dieses Operators gedrehte Kugelflächenfunktion (K.H. Ilk, 1983, S. 47 ff.):

$$\overline{Y}_{lm}(\lambda',\vartheta') = \Re(\alpha,\beta,\gamma)\overline{Y}_{lm}(\lambda,\vartheta) = \sum_{n=-l}^{l} D_{nm}^{-l}(\alpha,\beta,\gamma)\overline{Y}_{ln}(\lambda,\vartheta),$$

$$D_{nm}^{-l}(\alpha,\beta,\gamma) = e^{-in\alpha} d_{nm}^{-l}(\beta) e^{-im\gamma},$$

$$d_{nm}^{-l}(\beta) = \sqrt{\frac{(l+n)!(l-n)!}{(l+m)!(l-m)!}} \sum_{\sigma=\sigma_1}^{\sigma_2} \binom{l+m}{\sigma} \binom{l-m}{l-n-\sigma} (-1)^{n-m+\sigma} \left(\cos\frac{\beta}{2}\right)^{2l+m-n-2\sigma} \left(\sin\frac{\beta}{2}\right)^{n-m+2\sigma},$$

$$\sigma_1 = \max(m-n,0),\ \sigma_2 = \min(l-n, l+m).$$

Die inverse Drehung ergibt sich durch Umkehr der Reihenfolge der Drehungen bei gleichzeitiger Umkehr der Vorzeichen der Drehwinkel:

$$\overline{Y}_{lm}(\lambda,\vartheta) = \Re(-\gamma,-\beta,-\alpha)\overline{Y}_{lm}(\lambda',\vartheta') = \sum_{n=-l}^{l} D_{nm}^{-l}(-\gamma,-\beta,-\alpha)\overline{Y}_{ln}(\lambda',\vartheta').$$

Anstatt die Kugelflächenfunktionen zu drehen, besteht auch die Möglichkeit, die Koeffizienten zu drehen:

$$\Re(\alpha,\beta,\gamma)A(\lambda,\vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} \overline{a}_{lm}\Re(\alpha,\beta,\gamma)\overline{Y}_{lm}(\lambda,\vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} \overline{a}_{lm}\overline{Y}_{lm}(\lambda',\vartheta')$$
$$= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} \Re(\alpha,\beta,\gamma)\overline{a}_{lm}\overline{Y}_{lm}(\lambda,\vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} \overline{a}'_{lm}\overline{Y}_{lm}(\lambda,\vartheta).$$

Für die Koeffizienten folgt:

$$\overline{a}_{lm} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} A(\lambda,\vartheta)\overline{Y}_{lm}^{*}(\lambda,\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\lambda = (-1)^m \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} A(\lambda,\vartheta)\overline{Y}_{l-m}(\lambda,\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\lambda$$
$$= (-1)^m \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} A(\lambda,\vartheta)\sum_{n=-l}^{l} D_{-n-m}^{-l}(-\gamma,-\beta,-\alpha)\overline{Y}_{l-n}(\lambda',\vartheta')\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\lambda$$
$$= (-1)^m \sum_{n=-l}^{l} D_{-n-m}^{-l}(-\gamma,-\beta,-\alpha)\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} A(\lambda,\vartheta)\overline{Y}_{l-n}(\lambda',\vartheta')\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\lambda$$
$$= \sum_{n=-l}^{l} D_{-n-m}^{-l}(-\gamma,-\beta,-\alpha)(-1)^{m-n}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} A(\lambda,\vartheta)\overline{Y}_{ln}^{*}(\lambda',\vartheta')\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\lambda$$
$$= \sum_{n=-l}^{l} D_{-n-m}^{-l}(-\gamma,-\beta,-\alpha)(-1)^{m-n}\overline{a}'_{ln} = \sum_{n=-l}^{l} D_{mn}^{-l}(\alpha,\beta,\gamma)\overline{a}'_{ln},$$

$$D_{-n-m}^{-l}(-\gamma,-\beta,-\alpha) = D_{mn}^{-l}(\alpha,-\beta,\gamma),$$

$$(-1)^{m-n} d_{mn}^{-l}(-\beta) = d_{mn}^{-l}(\beta).$$

Entsprechend gilt für die inverse Drehung $\overline{a}'_{lm} = \sum_{n=-l}^{l} D_{mn}^{-l}(-\gamma,-\beta,-\alpha)\overline{a}_{ln}$.

Im Falle eines Fensters in Form einer runden Kugelkappe fällt die Drehung um γ aufgrund der Rotationssymmetrie weg.

Mit $\alpha = \lambda$, $\beta = \vartheta$, $\gamma = 0$ gilt:

$$\overline{a}_{lm} = \sum_{n=-l}^{l} D_{mn}^{-l}(\lambda,\vartheta,0)\overline{a}'_{ln},$$

$$e^{-im\lambda} = \cos(m\lambda) - i\sin(m\lambda),$$

$$e^{-in0} = 1,$$

$$d_{mn}^{-l}(\vartheta) = (-1)^{m-n} d_{nm}^{-l}(\vartheta),$$

$$\overline{a}_{lm} = (-1)^{m-n} \sum_{n=-l}^{l} d_{nm}^{-l}(\vartheta)\left(\cos(m\lambda)\,\mathrm{Re}(\overline{a}'_{ln}) + \sin(m\lambda)\,\mathrm{Im}(\overline{a}'_{ln}) + i\left(\cos(m\lambda)\,\mathrm{Im}(\overline{a}'_{ln}) - \sin(m\lambda)\,\mathrm{Re}(\overline{a}'_{ln})\right)\right)$$

und für die inverse Drehung entsprechend:

$$\overline{a}'_{lm} = \sum_{n=-l}^{l} D_{mn}^{-l}(0,-\vartheta,-\lambda)\overline{a}_{ln},$$

$$e^{im0} = 1,$$

$$e^{in\lambda} = \cos(n\lambda) + i\sin(n\lambda),$$

$$d_{mn}^{-l}(-\vartheta) = d_{nm}^{-l}(\vartheta),$$

$$\overline{a}'_{lm} = \sum_{n=-l}^{l} d_{nm}^{-l}(\vartheta)\left(\cos(n\lambda)\,\mathrm{Re}(\overline{a}_{ln}) - \sin(n\lambda)\,\mathrm{Im}(\overline{a}_{ln}) + i\left(\cos(n\lambda)\,\mathrm{Im}(\overline{a}_{ln}) + \sin(n\lambda)\,\mathrm{Re}(\overline{a}_{ln})\right)\right).$$

B Quellcode

LOCAL:

```
C Programm zur Lokalisierung von Kugelflaechenfunktionen
C
C       C,S-Koeffizienten => komplexe Koeffizienten
C                         => Rotation nach Lambda, Theta
C                         => lokalisierte komplexe Koeff.
C                         => lokalisierte C,S-Koeff.
C
      PROGRAM LOCAL
C
C Variablendeklaration: L,M  Grad bzw. Ordnung der Koeffizienten
C                       LOBS  Max. Grad der globalen Koeffizienten
C                       LWIN  Max. Grad der Fensterkoeffizienten
C                       LNYQ  Max. Grad der lokalen Koeffizienten
C
C                       C,S  C,S-Koeffizienten
C                       R  Massstabsfaktor der C,S-Koeffizienten
C                       GCKOEF  Feld der globalen kompl. Koef.
C                       RCKOEF  Feld der rotierten kompl. Koef.
C                       LCKOEF  Feld der lokalisierten kompl. Koef.
C
C                       LAMBDA,THETA  Koordinaten des neuen Pols
C                       LAMMIN,LAMMAX,THEMIN,THEMAX  Gebietsgrenzen
C                       LSTEP,TSTEP  Rasterweite
C                       I,N,DELTA  Laufvariablen
C                       DELTA1,DELTA2  Schleifengrenzen
C                       D  Summand
C                       XB  Zwischenspeicher fuer Rotation
C
C                       FS  Massstab fuer Lokalisation
C                       LS  FS entsprechender Grad von L
C                       THETAC  Groesse des Fensters
C                       T  cos(THETAC)
C                       W  Feld mit Fensterkoeffizienten
C                       PI0,PIM1,PIP1  P_i, P_i-1, P_i+1
C
C                       L1  Grad der globalen Koeffizienten
C                       L2  Grad der Fensterkoeffizienten
C                       L1MIN,L1MAX,L2MIN,L2MAX  Schleifengrenzen
C                       FAKTO1,FAKTO2,F1,F2,H  Zwischenspeicher
C                       WIGNER  Wigner-3MJ-Symbol
C
C                       FAK  Feld mit Fakultaeten bis 145!
C                       DUMMY  Hilfsvariable zum vorruecken in der Datei
C
C                       LA,TH  Schleifenvariablen
C                       LA1,LA2,LA3,TH1,TH2,TH3  In Character umgewan-
C                                                delte Ziffern von LA,TH
C                       NAME  Name der Ausgabedateien der lok. Koef.
C                       KFNAME  Allgemeiner Teil von NAME
C
C Parameter-Voreinstellungen (Eingabedatei und Felddimensionierung):
C       INAME  Name der Eingabedatei mit den Koeffizienten
C       LDATA  Entwicklungsgrad des Eingabefiles (kann groesser als LMAX sein)
C       LMAX  maximales LOBS das noch beruecksichtigt wird
```

```
C
      CHARACTER INAME*(*)
      PARAMETER (INAME='GRIM4C4')
      PARAMETER (LDATA=72)
      PARAMETER (LMAX=60)
C
      INTEGER L,M,N,LOBS,LWIN,LNYQ,I,DELTA,DELTA1,DELTA2,L1,L2,L1MIN,
     1        L1MAX,L2MIN,L2MAX
      DOUBLE PRECISION C,S,R,GCKOEF,RCKOEF,LCKOEF,LAMBDA,THETA,LAMMIN,
     1                 LAMMAX,THEMIN,THEMAX,LSTEP,TSTEP,D,FAKTO1,FAKTO2,
     1                 F1,F2,H,XB,FS,LS,THETAC,T,W,PI0,PIM1,PIP1,WIGNER,
     1                 FAK,LA,TH
      CHARACTER DUMMY,LA1,LA2,LA3,TH1,TH2,TH3
      CHARACTER*12 NAME,KFNAME
C
      DIMENSION FAK(0:145)
      DIMENSION GCKOEF(0:LDATA,-LDATA:LDATA,1:2)
      DIMENSION RCKOEF(0:LMAX,0:LMAX,1:2)
      DIMENSION LCKOEF(0:LMAX,0:LMAX,1:2)
      DIMENSION W(0:LMAX)
      DIMENSION XB(0:LMAX,0:LMAX,-LMAX:LMAX)
C
      COMMON /P/ PI0,PIM1
      COMMON /FA/ FAK
C
      PI=3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582D+00
C
C Eingabe-Parameter
C
      OPEN(UNIT=1,FILE='INPUT_ROTLOK',STATUS='OLD')
      READ(1,'(A)')DUMMY
      READ(1,'(I2)')LOBS
      READ(1,'(A)')DUMMY
      READ(1,'(A)')DUMMY
      READ(1,'(F3.1)')FS
      READ(1,'(A)')DUMMY
      READ(1,'(A)')DUMMY
      READ(1,'(F13.5)')R
      READ(1,'(A)')DUMMY
      READ(1,'(A)')DUMMY
      READ(1,'(F5.1)')LAMMIN
      READ(1,'(A)')DUMMY
      READ(1,'(A)')DUMMY
      READ(1,'(F5.1)')LAMMAX
      READ(1,'(A)')DUMMY
      READ(1,'(A)')DUMMY
      READ(1,'(F5.1)')LSTEP
      READ(1,'(A)')DUMMY
      READ(1,'(A)')DUMMY
      READ(1,'(F5.1)')THEMIN
      READ(1,'(A)')DUMMY
      READ(1,'(A)')DUMMY
      READ(1,'(F5.1)')THEMAX
      READ(1,'(A)')DUMMY
      READ(1,'(A)')DUMMY
      READ(1,'(F5.1)')TSTEP
      READ(1,'(A)')DUMMY
      READ(1,'(A)')DUMMY
      READ(1,'(A4)')KFNAME
```

```
      CLOSE(1)
C
C Oeffnen und Einlesen der Datei mit den Fakultaeten
C
      OPEN(UNIT=1,FILE='FAK',STATUS='OLD')
      DO 10 I=0,145
10      READ(1,'(E39.34)')FAK(I)
      CLOSE(1)
C
C Oeffnen der Koeffizientendatei und Vorruecken bis zu Koeffizienten
C
      OPEN(UNIT=1,FILE=INAME,STATUS='OLD')
      DO 20 I=1,2
20      READ(1,'(A)')DUMMY
C
C Einlesen und Umrechnung in komplexe Koeffizienten
C
      DO 30 M=0,LDATA
        DO 30 L=M,LDATA
          READ(1,'(17X,E15.9,1X,E15.9)')C,S
C
          C=C*R
          S=S*R
C
C Komplexe Koeffizienten mit negativem M und M=0
C
          IF (M.EQ.0) THEN
            GCKOEF(L,M,1)=SQRT(4*PI)*C
            GCKOEF(L,M,2)=0.
          ELSE
            GCKOEF(L,-M,1)=SQRT(2*PI)*C
            GCKOEF(L,-M,2)=SQRT(2*PI)*S
          ENDIF
C
C Komplexe Koeffizienten mit positivem M
C
          IF (M.GT.0) THEN
            GCKOEF(L,M,1)=(-1)**M*GCKOEF(L,-M,1)
            GCKOEF(L,M,2)=-(-1)**M*GCKOEF(L,-M,2)
          ENDIF
C
30    CONTINUE
      CLOSE(1)
C
C Obergrenze fuer die Entwicklung der lokal. Koef.
C
      LNYQ=INT(FS/(FS+1)*LOBS)
C
C Hauptschleife fuer Theta
C
      DO 100 TH=THEMIN,THEMAX+.1,TSTEP
        THETA=TH*PI/180
C
C Rotation:
C
          DO 40 M=0,LOBS
            DO 40 L=M,LOBS
              DO 40 N=-L,L
C
```

```
      FAKTO1=SQRT(FAK(L+N)*FAK(L-N)/(FAK(L+M)*FAK(L-M)))
C
C Aufsummation von D
C
      D=0
      DELTA1=MAX(0,M-N)
      DELTA2=MIN(L-N,L+M)
      DO 43 DELTA=DELTA1,DELTA2
43      D=D+FAK(L+M)/(FAK(L+M-DELTA)*FAK(DELTA))*
     1     FAK(L-M)/(FAK(N-M+DELTA)*FAK(L-N-DELTA))*
     1     (-1)**(N-M+DELTA)*(COS(THETA/2))**(2*L+M-N-2*DELTA)*
     1     (SIN(THETA/2))**(N-M+2*DELTA)
40      XB(L,M,N)=D*FAKTO1
C
C Hauptschleife fuer Lambda
C
    DO 100 LA=LAMMIN,LAMMAX+.1,LSTEP
     LAMBDA=LA*PI/180
     DO 50 M=0,LOBS
      DO 50 L=M,LOBS
       RCKOEF(L,M,1)=0
       RCKOEF(L,M,2)=0
       DO 50 N=-L,L
        FAKTO1=XB(L,M,N)
        F1=FAKTO1*COS(N*LAMBDA)
        F2=FAKTO1*SIN(N*LAMBDA)
        RCKOEF(L,M,1)=RCKOEF(L,M,1)+F1*GCKOEF(L,N,1)-
     1                F2*GCKOEF(L,N,2)
50      RCKOEF(L,M,2)=RCKOEF(L,M,2)+F2*GCKOEF(L,N,1)+
     1                F1*GCKOEF(L,N,2)
C
C Lokalisierung:
C
C Ausgabedatei der lokalisierten Koeffizienten
C
      LA1=CHAR(INT(LA)/100+48)
      LA2=CHAR(MOD(INT(LA),100)/10+48)
      LA3=CHAR(MOD(INT(LA),10)+48)
      TH1=CHAR(INT(TH)/100+48)
      TH2=CHAR(MOD(INT(TH),100)/10+48)
      TH3=CHAR(MOD(INT(TH),10)+48)
      NAME=LA1//LA2//LA3//'_'//TH1//TH2//TH3//'_'//KFNAME
      OPEN(UNIT=2,FILE=NAME)
C
      DO 60 L=0,LNYQ
C
C Berechnung der Groesse des Fensters fuer L
C
      LS=L/FS
      THETAC=PI/SQRT(LS*(LS+1))
      T=COS(THETAC)
C
C LWIN muss kleiner als L bleiben
C
      LWIN=MIN(INT(LS+.99999),L-1)
C
C Berechnung der Fensterkoeffizienten:
C
      W(0)=SQRT(4*PI)
```

```
      IF (LWIN.GT.0) THEN
C
C Startwerte fuer P_0 und P_1
C
        PIM1=1.
        PI0=T
C
        DO 63 I=1,LWIN
          H=PIM1
63          W(I)=SQRT(4*PI/(2*I+1))/(1-T)*(H-PIP1(T,I+1))
C
      ENDIF
C
C Berechnung der lokalisierten Koeffizienten:
C
      DO 65 M=0,L
        LCKOEF(L,M,1)=0.
        LCKOEF(L,M,2)=0.
C
C Schleifengrenzen fuer L1
C
        L1MIN=MAX(L-LWIN,M)
        L1MAX=MIN(L+LWIN,LOBS)
        DO 67 L1=L1MIN,L1MAX
          FAKTO2=0.
C
C Schleifengrenzen fuer L2
C
          L2MIN=ABS(L-L1)
          L2MAX=MIN(L+L1,LWIN)
          DO 68 L2=L2MIN,L2MAX
            FAKTO1=SQRT((2*L1+1)*(2*L2+1)*(2*L+1)/(4*PI))*
     1                WIGNER(L1,L2,L,0,0,0)*WIGNER(L1,L2,L,M,0,-M)
68          FAKTO2=FAKTO2+W(L2)*FAKTO1
          LCKOEF(L,M,1)=LCKOEF(L,M,1)+RCKOEF(L1,M,1)*FAKTO2
67          LCKOEF(L,M,2)=LCKOEF(L,M,2)+RCKOEF(L1,M,2)*FAKTO2
        LCKOEF(L,M,1)=(-1)**M*LCKOEF(L,M,1)
        LCKOEF(L,M,2)=(-1)**M*LCKOEF(L,M,2)
65      CONTINUE
60    CONTINUE
C
C Ruecktransformation in C,S-Koeffizienten
C
      DO 70 L=0,LNYQ
        DO 70 M=0,L
          IF (M.EQ.0) THEN
            C=1/SQRT(4*PI)*LCKOEF(L,M,1)
            S=0.
          ELSE
            C=(-1)**M/SQRT(2*PI)*LCKOEF(L,M,1)
            S=-(-1)**M/SQRT(2*PI)*LCKOEF(L,M,2)
          ENDIF
C
C Ausgabe der C,S-Koeffizienten
C
70        WRITE(2,'(I2,1X,I2,1X,E15.9,1X,E15.9)')L,M,C,S
      CLOSE(2)
100   WRITE(6,'(F5.1,1X,F5.1)')LAMBDA*180/PI,THETA*180/PI
    END
```

```
C
C
C Funktion zur Berechnung von P_j(t) aus P_j-1(t) und P_j-2(t):
C
C Uebernimmt T=cos(THETAC)
C                J=I+1
C Gemeinsamer Speicher A=PI0
C                              B=PIM1
C
      DOUBLE PRECISION FUNCTION PIP1 (T,J)
C
C Sonstige Variablendeklaration: HELP  Hilfsvariable
C
      DOUBLE PRECISION T,HELP,A,B
      INTEGER J
C
      COMMON /P/ A,B
C
      HELP=(2*J-1)*T/J*A-(J-1)*B/J
C
C Aktualisierung von PI0 und PIM1
C
      B=A
      A=HELP
C
      PIP1=HELP
      RETURN
      END
C
C
C Funktion zur Berechnung der Clebsch-Gordan-Koeffizienten:
C
C Uebernimmt A,B,C,AL,BE,GA entsprechend Funktion WIGNER
C Gemeinsamer Speicher FAK
C
      DOUBLE PRECISION FUNCTION CLEGOR(A,B,C,AL,BE,GA)
C
C Sonstige Variablendeklaration: G  Zwischenspeicher
C                                Z  Laufvariable
C                                ZMIN,ZMAX  Schleifengrenzen
C
      INTEGER A,B,C,AL,BE,GA,G,Z,ZMIN,ZMAX
      DOUBLE PRECISION FAK(0:145)
      COMMON /FA/ FAK
C
C Fall AL=BE=GA=0
C
      IF ((AL.EQ.0).AND.(BE.EQ.0).AND.(GA.EQ.0)) THEN
        IF (MOD(A+B+C,2).EQ.1) THEN
          CLEGOR=0.
          RETURN
        ELSE
          G=(A+B+C)/2
          CLEGOR=(-1)**(G-C)*SQRT(2.D0*C+1)*FAK(G)/
     1           (FAK(G-A)*FAK(G-B)*FAK(G-C))*
     1           SQRT(FAK(2*G-2*A)*FAK(2*G-2*B)*FAK(2*G-2*C)/FAK(2*G+1))
          RETURN
        ENDIF
      ELSE
```

```
C
C Allgemeiner Fall
C
      ZMIN=MAX(0,B-C-AL,A-C+BE)
      ZMAX=MIN(A+B-C,A-AL,B+BE)
      CLEGOR=0.
      DO 110 Z=ZMIN,ZMAX
110      CLEGOR=CLEGOR+(-1)**Z/(FAK(Z)*FAK(A+B-C-Z)*FAK(A-AL-Z)*
     1                FAK(B+BE-Z)*FAK(C-B+AL+Z)*FAK(C-A-BE+Z))
      CLEGOR=SQRT(FAK(A+B-C)*FAK(A-B+C)*FAK(-A+B+C)/FAK(A+B+C+1))*
     1           SQRT(FAK(A+AL)*FAK(A-AL)*FAK(B+BE)*FAK(B-BE)*FAK(C+GA)*
     1           FAK(C-GA)*(2*C+1))*CLEGOR
      ENDIF
C
      RETURN
      END
C
C
C Funktion zur Berechnung der Wigner-Symbole:
C
C Uebernimmt A=L1
C            B=L2
C            C=L
C            AL=M bzw. 0
C            BE=0
C            GA=-M bzw. 0
C
      DOUBLE PRECISION FUNCTION WIGNER(A,B,C,AL,BE,GA)
C
C Sonstige Variablendeklaration: Aufruf der Funktion CLEGOR
C
      INTEGER A,B,C,AL,BE,GA
      DOUBLE PRECISION CLEGOR
      IF (C.LT.ABS(A-B)) THEN
        WIGNER=0.
        RETURN
      ENDIF
      IF (C.GT.A+B) THEN
        WIGNER=0.
        RETURN
      ELSE
        WIGNER=(-1)**(C+GA+2*A)*1/SQRT(2.D0*C+1)*
     1           CLEGOR(A,B,C,-AL,-BE,GA)
      ENDIF
C
      RETURN
      END
```

STATIS:

```
C Programm zur Berechnung der statistischen Werte
C
      PROGRAM STATIS
C
C Variablendeklaration: groesstenteils entsprechend LOCAL
C                       neu: CS,SA,CB,SB  C,S-Koeffizienten der beiden Felder
C                            SIGMA  Feld mit den Varianzen
```

```
C                       RMSA,RMSB  Root-Mean-Square der beiden Felder
C                       R  Korrelation zwischen den beiden Feldern
C                       F  Transfer-Funktion (admittance)
C                       SIGMAF  Fehler der Transfer-Funktion
C
C                       NAME1,NAME2  Namen der beiden Felder
C                       ANAME,BNAME  Spezifischer Namensteil der Felder
C                       SNAME  Name der Ausgabedatei mit den stat. Werten
C
C Parameter-Voreinstellung zur Felddimensionierung:
C
      PARAMETER (LMAX=60)
C
      INTEGER L,M,LOBS,LNYQ
      DOUBLE PRECISION FS,LAMMIN,LAMMAX,LSTEP,THEMIN,THEMAX,TSTEP,LA,
     1                 TH,CA,SA,CB,SB,SIGMA,RMSA,RMSB,R,F,SIGMAF
      CHARACTER*12 ANAME,BNAME,SNAME,NAME1,NAME2
      CHARACTER LA1,LA2,LA3,TH1,TH2,TH3,DUMMY
C
      DIMENSION SIGMA(0:LMAX,1:3)
C
      PI=3.14159265358979323846264338 3D+00
C
C Eingabe-Parameter
C
      OPEN(UNIT=1,FILE='INPUT_STATIS',STATUS='OLD')
      READ(1,'(A)')DUMMY
      READ(1,'(I2)')LOBS
      READ(1,'(A)')DUMMY
      READ(1,'(A)')DUMMY
      READ(1,'(F3.1)')FS
      READ(1,'(A)')DUMMY
      READ(1,'(A)')DUMMY
      READ(1,'(F5.1)')LAMMIN
      READ(1,'(A)')DUMMY
      READ(1,'(A)')DUMMY
      READ(1,'(F5.1)')LAMMAX
      READ(1,'(A)')DUMMY
      READ(1,'(A)')DUMMY
      READ(1,'(F5.1)')LSTEP
      READ(1,'(A)')DUMMY
      READ(1,'(A)')DUMMY
      READ(1,'(F5.1)')THEMIN
      READ(1,'(A)')DUMMY
      READ(1,'(A)')DUMMY
      READ(1,'(F5.1)')THEMAX
      READ(1,'(A)')DUMMY
      READ(1,'(A)')DUMMY
      READ(1,'(F5.1)')TSTEP
      READ(1,'(A)')DUMMY
      READ(1,'(A)')DUMMY
      READ(1,'(A4)')ANAME
      READ(1,'(A)')DUMMY
      READ(1,'(A)')DUMMY
      READ(1,'(A4)')BNAME
      READ(1,'(A)')DUMMY
      READ(1,'(A)')DUMMY
      READ(1,'(A12)')SNAME
      CLOSE(1)
```

```
C
      LNYQ=INT(FS/(FS+1)*LOBS)
C
C Ausgabedatei
C
      OPEN(UNIT=3,FILE=SNAME)
C
C Hauptschleifen fuer Lambda und Theta
C
      DO 10 LA=LAMMIN,LAMMAX,LSTEP
        LA1=CHAR(INT(LA)/100+48)
        LA2=CHAR(MOD(INT(LA),100)/10+48)
        LA3=CHAR(MOD(INT(LA),10)+48)
        DO 10 TH=THEMIN,THEMAX,TSTEP
          TH1=CHAR(INT(TH)/100+48)
          TH2=CHAR(MOD(INT(TH),100)/10+48)
          TH3=CHAR(MOD(INT(TH),10)+48)
          NAME1=LA1//LA2//LA3//'_'//TH1//TH2//TH3//'_'//ANAME
          NAME2=LA1//LA2//LA3//'_'//TH1//TH2//TH3//'_'//BNAME
C
C Dateien mit lokalisierten Koeffizienten
C
          OPEN(UNIT=1,FILE=NAME1,STATUS='OLD')
          OPEN(UNIT=2,FILE=NAME2,STATUS='OLD')
C
C Einlesen der Koef. und Berechnung der statistischen Werte
C
          WRITE(3,'(F5.1,1X,F5.1)')LA,TH
          DO 15 L=0,LNYQ
            SIGMA(L,1)=0.
            SIGMA(L,2)=0.
            SIGMA(L,3)=0.
            DO 20 M=0,L
              READ(1,'(6X,E15.9,1X,E15.9)')CA,SA
              READ(2,'(6X,E15.9,1X,E15.9)')CB,SB
              SIGMA(L,1)=SIGMA(L,1)+CA*CA+SA*SA
              SIGMA(L,2)=SIGMA(L,2)+CB*CB+SB*SB
20              SIGMA(L,3)=SIGMA(L,3)+CA*CB+SA*SB
            RMSA=SQRT(SIGMA(L,1)*4*PI/(2*L+1))
            RMSB=SQRT(SIGMA(L,2)*4*PI/(2*L+1))
            R=SIGMA(L,3)/SQRT(SIGMA(L,1)*SIGMA(L,2))
            F=SIGMA(L,3)/SIGMA(L,1)
            SIGMAF=SIGMA(L,2)/SIGMA(L,1)*(1-R*R)/(2*L)
C
C Ausgabe der statistischen Werte
C
            WRITE(3,'(I2,1X,E14.9,1X,E14.9,1X,E15.9,1X,E15.9,1X,E14.9)')
     1      L,RMSA,RMSB,R,F,SIGMAF
15          CONTINUE
          CLOSE(1)
          CLOSE(2)
10        CONTINUE
        CLOSE(3)
        END
```

SMITTE:

```
C Programm zur Berechnung der mittleren RMS-Amplitude
C
      PROGRAM SMITTE
C
C Variablendeklaration: groesstenteils entsprechend LOCAL und STATIS
C                       neu: INAME  Allg. Teil der Dateien mit lok. Koef.
C                            NAME  Spezifischer Name der Eingabedatei
C                            ONAME  Ausgabedatei mit mittleren RMS-Ampl.
C                            SM  Feld mit mittleren RMS-Amplituden
C                            G  Gewicht der Mittelbildung
C
C Parameter-Voreinstellung Zur Felddimensionierung:
C
      PARAMETER (LMAX=60)
C
      CHARACTER DUMMY,INAME*4,ONAME*12,NAME*12,LA1,LA2,LA3,TH1,TH2,TH3
      INTEGER LOBS,LNYQ,LSTEP,TSTEP,LA,TH,L,M
      DOUBLE PRECISION FS,LAMBDA,THETA,LS,TS,RMS,SM,C,S,G
C
      DIMENSION RMS(0:LMAX)
      DIMENSION SM(0:LMAX)
C
      PI=3.14159265358979323846264338 3D+00
C
C Eingabe-Parameter
C
      OPEN(UNIT=1,FILE='INPUT_SM',STATUS='OLD')
      READ(1,'(A)')DUMMY
      READ(1,'(I2)')LOBS
      READ(1,'(A)')DUMMY
      READ(1,'(A)')DUMMY
      READ(1,'(F5.1)')FS
      READ(1,'(A)')DUMMY
      READ(1,'(A)')DUMMY
      READ(1,'(I3)')LSTEP
      READ(1,'(A)')DUMMY
      READ(1,'(A)')DUMMY
      READ(1,'(I3)')TSTEP
      READ(1,'(A)')DUMMY
      READ(1,'(A)')DUMMY
      READ(1,'(A4)')INAME
      READ(1,'(A)')DUMMY
      READ(1,'(A)')DUMMY
      READ(1,'(A12)')ONAME
      CLOSE(1)
C
      LNYQ=INT(FS/(FS+1)*LOBS)
C
C Initialisierung
C
      DO 3 L=0,LNYQ
3       SM(L)=0.
      G=0.
C
C Ausgabedatei
C
      OPEN(UNIT=2,FILE=ONAME)
```

```
C
C Hauptschleifen fuer Lambda und Theta
C
    DO 20 LA=0,359,LSTEP
     LAMBDA=LA*PI/180
     LA1=CHAR(LA/100+48)
     LA2=CHAR(MOD(LA,100)/10+48)
     LA3=CHAR(MOD(LA,10)+48)
     DO 20 TH=0,180,TSTEP
      THETA=TH*PI/180
      TH1=CHAR(TH/100+48)
      TH2=CHAR(MOD(TH,100)/10+48)
      TH3=CHAR(MOD(TH,10)+48)
      NAME=LA1//LA2//LA3//'_'//TH1//TH2//TH3//'_'//INAME
C
C Datei mit lokaliserten Koeffizienten
C
      OPEN(UNIT=1,FILE=NAME,STATUS='OLD')
C
C Einlesen der Koeffizienten und Berechnung der RMS-Amplituden
C
      DO 10 L=0,LNYQ
       RMS(L)=0.
       DO 5 M=0,L
        READ(1,'(6X,E15.9,1X,E15.9)')C,S
5       RMS(L)=RMS(L)+C*C+S*S
       RMS(L)=SQRT(RMS(L)*4*PI/(2*L+1))
10      SM(L)=SM(L)+RMS(L)*SIN(THETA)
      CLOSE(1)
      G=G+SIN(THETA)
20     CONTINUE
C
C Mittelbildung und Ausgabe
C
    LS=LSTEP*PI/180
    TS=TSTEP*PI/180
    G=G*LS*TS
    DO 30 L=0,LNYQ
     SM(L)=SM(L)*LS*TS/G
30    WRITE(2,'(I2,1X,E15.9)')L,SM(L)
    CLOSE(2)
    END
```

ROT:

```
C Programm zur Berechnung der zurueckrotierten Koeffizienten aus den
C lokalisierten Koeffizienten
C
    PROGRAM ROT
C
C Variablendeklaration: I  Laufvariable
C                       LOBS  Max. Grad der globalen Koeffizienten
C                       LNYQ  Max. Grad der lokalisierten Koeffizienten
C                       FS  Massstab der Lokalisation
C                       L  Grad
C                       M  Ordnung
C                       CKOEF  Feld der komplexen Koeffizienten
```

```
C                    C C_lm
C                    S S_lm
C                    DELTA  Hilfsparameter zur Umrechnung, Laufvariable
C                    FAK  Feld mit Fakultaeten bis 145!
C
C                    LAMBDA,THETA  Koordinaten des neuen Pols
C                    N  Laufvariable
C                    A,B  Hilfskoordinaten
C                    DELTA1,DELTA2  Schleifengrenzen
C                    D  Summand
C                    RKOEF  Feld der rotierten Koeffizienten
C                    FAKTO1,F1,F2  Zwischenspeicher zur
C                                  Rechenzeitverkuerzung
C
C Parameter-Voreinstellung zur Felddimensionierung:
C
      PARAMETER (LDATA=72)
C
      CHARACTER DUMMY,INAME*12,ONAME*12
      INTEGER LOBS,LNYQ,I,L,M,DELTA,N,DELTA1,DELTA2
      DOUBLE PRECISION CKOEF,C,S,FAK,LAMBDA,THETA,A,B,RKOEF,FAKTO1,
     1                 D,F1,F2,FS
C
      DIMENSION FAK(0:145)
      DIMENSION CKOEF(0:LDATA,-LDATA:LDATA,1:2)
      DIMENSION RKOEF(0:LDATA,0:LDATA,1:2)
C
C Initialisierung
C
      PI=3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582D+00
C
C Oeffnen und Einlesen der Datei mit den Fakultaeten
C
      OPEN(UNIT=3,FILE='FAK',STATUS='OLD')
      DO 3 I=0,145
3       READ(3,'(E39.34)')FAK(I)
      CLOSE(3)
C
C Eingabewerte
C
      OPEN(UNIT=3,FILe='INPUT_ROT',STATUS='OLD')
      READ(3,'(A)')DUMMY
      READ(3,'(I2)')LOBS
      READ(3,'(A)')DUMMY
      READ(3,'(A)')DUMMY
      READ(3,'(F3.1)')FS
      READ(3,'(A)')DUMMY
      READ(3,'(A)')DUMMY
      READ(3,'(F5.1)')LAMBDA
      READ(3,'(A)')DUMMY
      READ(3,'(A)')DUMMY
      READ(3,'(F5.1)')THETA
      READ(3,'(A)')DUMMY
      READ(3,'(A)')DUMMY
      READ(3,'(A12)')INAME
      READ(3,'(A)')DUMMY
      READ(3,'(A)')DUMMY
      READ(3,'(A12)')ONAME
      CLOSE(3)
```

```
C
      LNYQ=INT(FS/(FS+1)*LOBS)
C
C Oeffnen der Koeffizientendatei
C
      OPEN(UNIT=1,FILE=INAME,STATUS='OLD')
C
C Einlesen und Umrechnung in komplexe Koeffizienten
C
      DO 10 L=0,LNYQ
        DO 10 M=0,L
          READ(1,'(6X,E15.9,1X,E15.9)')C,S
C
C Komplexe Koeffizienten mit negativem M oder M=0
C
          IF (M.EQ.0) THEN
            CKOEF(L,M,1)=SQRT(4*PI)*C
            CKOEF(L,M,2)=0.
          ELSE
            CKOEF(L,-M,1)=SQRT(2*PI)*C
            CKOEF(L,-M,2)=SQRT(2*PI)*S
          ENDIF
C
C Komplexe Koeffizienten mit positivem M
C
          IF (M.GT.0) THEN
            CKOEF(L,M,1)=(-1)**M*CKOEF(L,-M,1)
            CKOEF(L,M,2)=-(-1)**M*CKOEF(L,-M,2)
          ENDIF
C
10    CONTINUE
      CLOSE(1)
C
C Rotation:
C
C Ausgabefile
C
      OPEN (UNIT=2,FILE=ONAME)
C
      A=LAMBDA*PI/180
      B=THETA*PI/180
C
C Hauptschleifen
C
      DO 30 M=0,LNYQ
        DO 30 L=M,LNYQ
          RKOEF(L,M,1)=0.
          RKOEF(L,M,2)=0.
          DO 30 N=-L,L
            FAKTO1=(-1)**(M-N)*
     1                SQRT(FAK(L+N)*FAK(L-N)/(FAK(L+M)*FAK(L-M)))
C
C Aufsummation von D
C
            DELTA1=MAX(0,M-N)
            DELTA2=MIN(L-N,L+M)
            D=0
            DO 40 DELTA=DELTA1,DELTA2
40            D=D+FAK(L+M)/(FAK(L+M-DELTA)*FAK(DELTA))*
```

```
     1          FAK(L-M)/(FAK(N-M+DELTA)*FAK(L-N-DELTA))*
     1          (-1)**(N-M+DELTA)*(COS(B/2))**(2*L+M-N-2*DELTA)*
     1          (SIN(B/2))**(N-M+2*DELTA)
          D=D*FAKTO1
C
          F1=COS(M*A)*D
          F2=SIN(M*A)*D
          RKOEF(L,M,1)=RKOEF(L,M,1)+F1*CKOEF(L,N,1)+F2*CKOEF(L,N,2)
          RKOEF(L,M,2)=RKOEF(L,M,2)-F2*CKOEF(L,N,1)+F1*CKOEF(L,N,2)
C
30    CONTINUE
C
C Rueckrechnung in C,S-Koeffizienten
C
      DO 50 L=0,LNYQ
       DO 50 M=0,L
        IF (M.EQ.0) THEN
         C=1/SQRT(4*PI)*RKOEF(L,M,1)
         S=0.
        ELSE
         C=(-1)**M/SQRT(2*PI)*RKOEF(L,M,1)
         S=-(-1)**M/SQRT(2*PI)*RKOEF(L,M,2)
        ENDIF
C
C Ausgabe
C
50      WRITE(2,'(I2,1X,I2,1X,E15.9,1X,E15.9)')L,M,C,S
      CLOSE(2)
      END
```

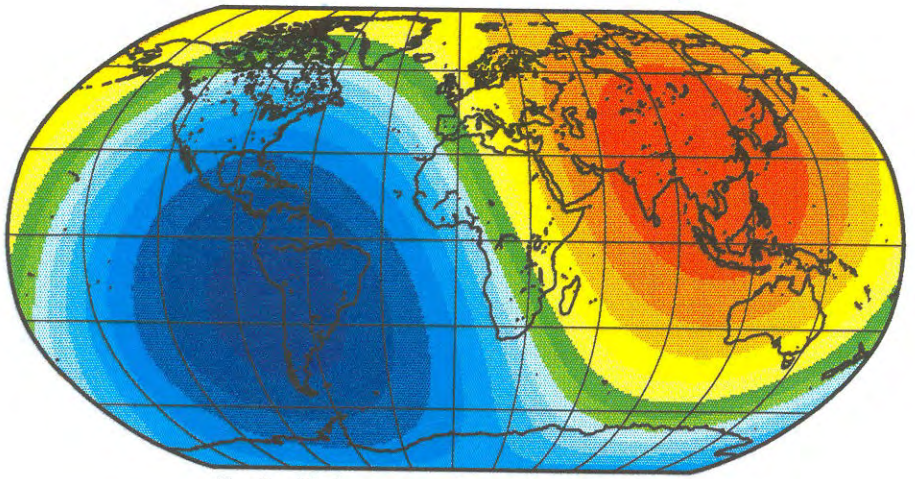
C Schaubilder zu 3.3

Auf den folgenden Seiten sind die Abbildungen der in 3.3 besprochenen Lokalisierungen des Geoids und der Topographie über Erdoberfläche und Spektrum sowie die jeweiligen Admittanzen der lokalisierten Geoidundulationen bezüglich der lokalisierten Topographie und die Korrelationen zwischen den lokalisierten Koeffizienten der Geoidundulationen und der Topographie zusammengestellt.

Die Lokalisierungen erfolgten in einem 5° x 5° Raster über die gesamte Erdoberfläche. Es wurden die Originalfelder bis zum Grad $L_{obs} = 48$ verwendet bei einem Maßstabsfaktor von $f_s = 2$. Die Lokalisierungen liegen damit bis zum Grad $L_{nyq} = 32$ vor.

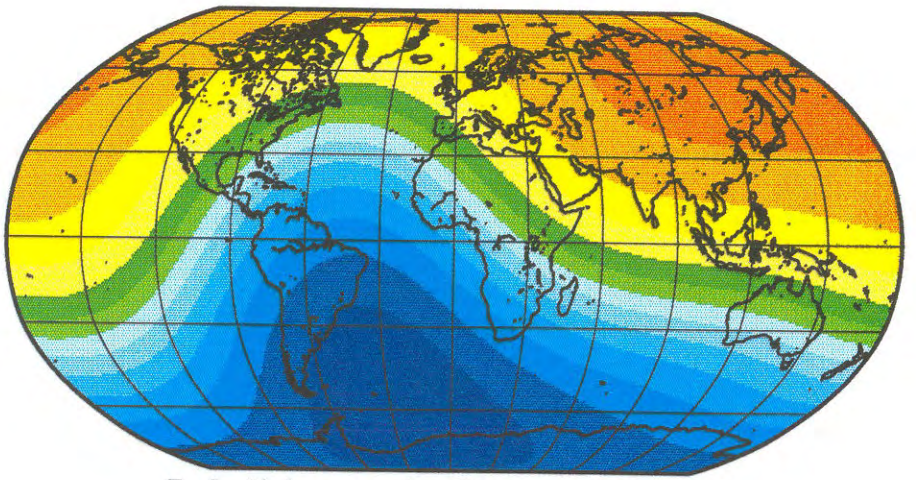
Dargestellt sind pro Entwicklungsgrad *l* die Differenzen zwischen den RMS-Amplituden der lokalisierten Koeffizienten und deren über die ganze Erdoberfläche gemittelten Werten $\Delta S_l(\lambda,\vartheta) = S_l(\lambda,\vartheta) - \overline{S}_l$ [m]. Das bedeutet, daß Minima Gebieten mit besonders flachem Spektrum entsprechen.

Die Admittanzen [m/km] des Geoids bezüglich der Topographie und die Korrelationen zwischen Geoid und Topographie sind entsprechend den Definitionen in 2.4 für jeden Grad gebildet und über die ganze Erdoberfläche dargestellt.



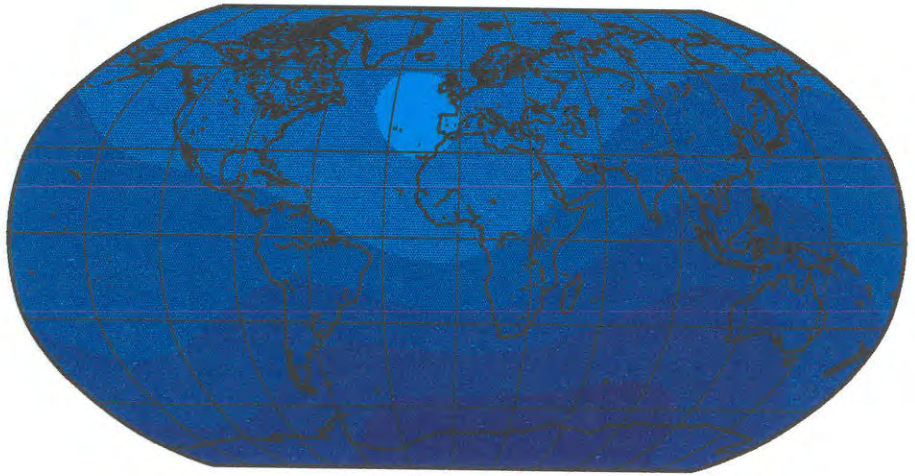
Lokalisierung des Geoids: l=2

-12.6 0.0 12.6



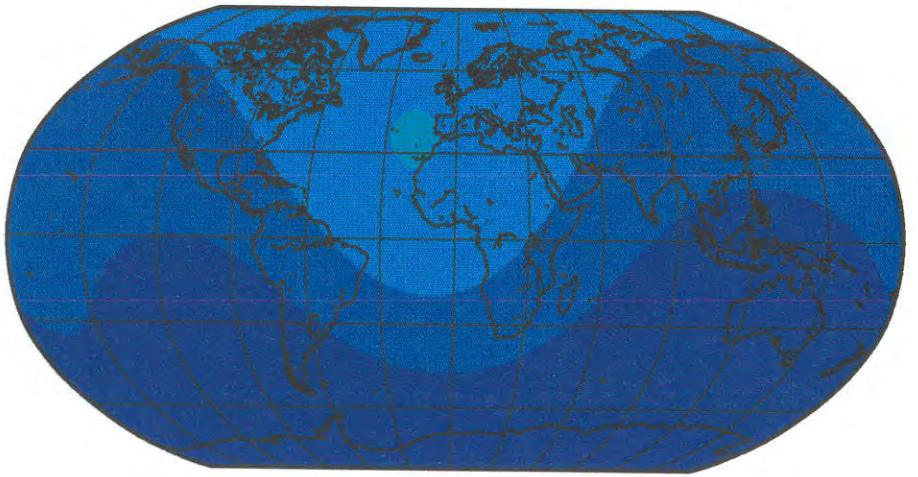
Lokalisierung der Topographie: l=2

-1260 0 1260



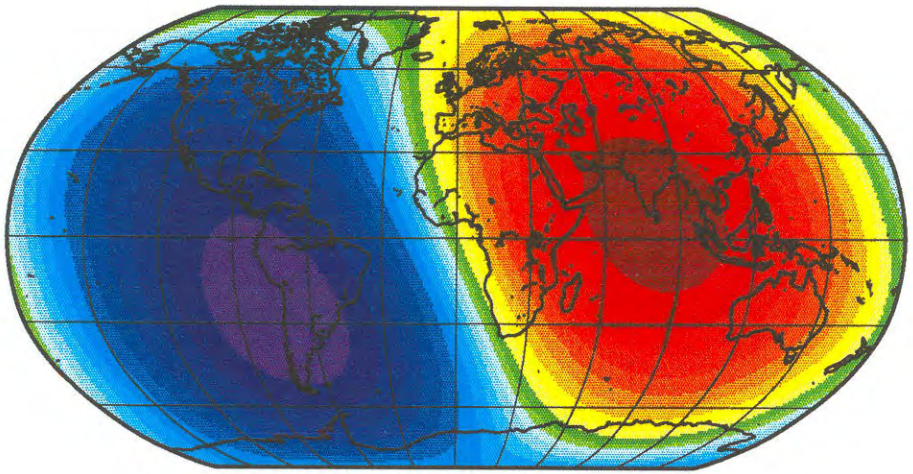
Admittanz: l=2

-18 -12 -6 0 6 12 18



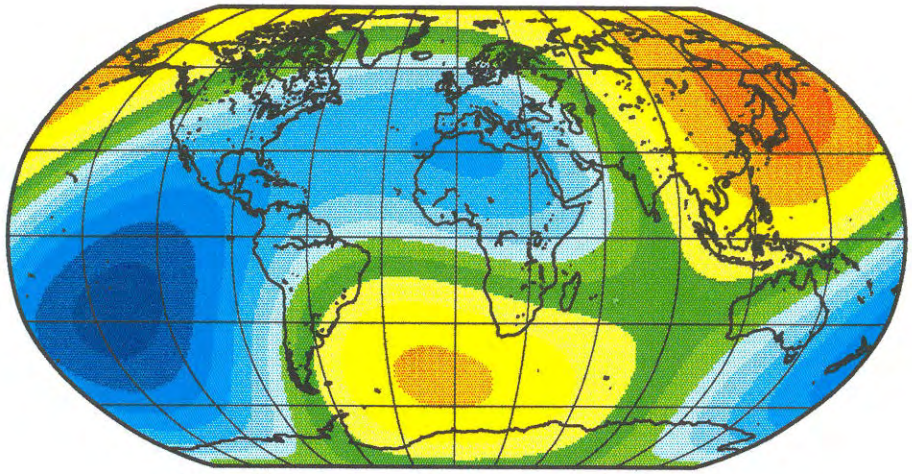
Korrelation: l=2

-1.0 -0.5 0.0 0.5 1.0



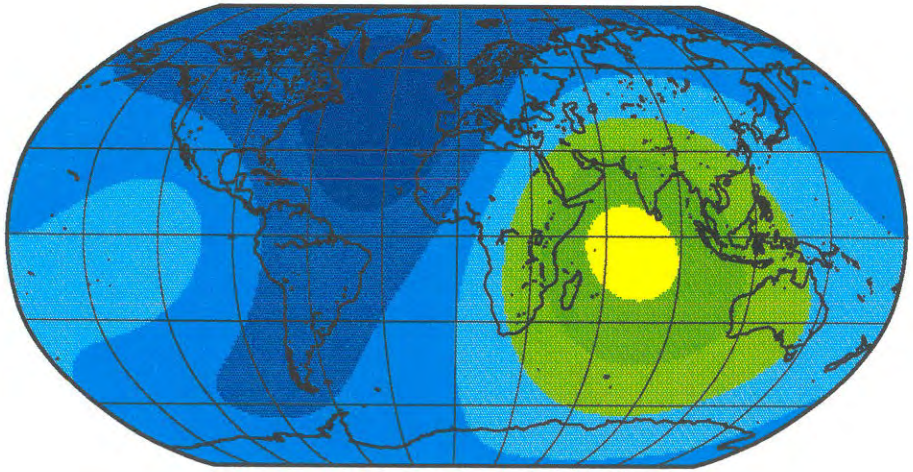
Lokalisierung des Geoids: l=3

-12.6 0.0 12.6



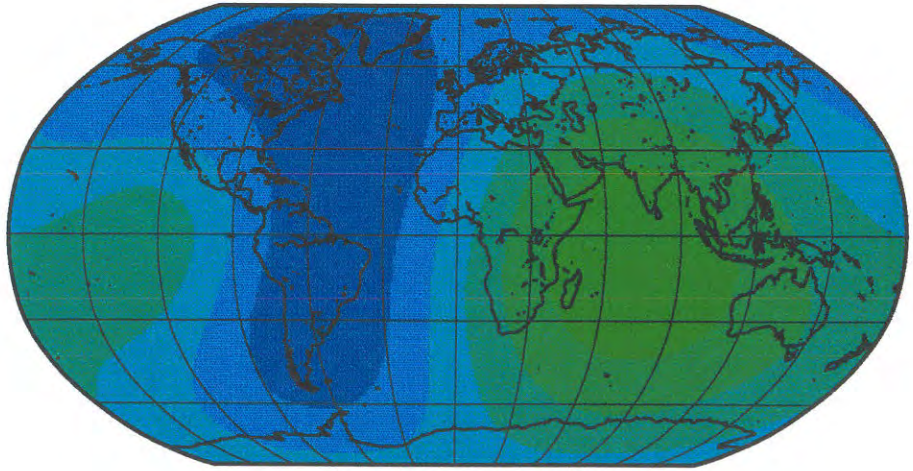
Lokalisierung der Topographie: l=3

-1260 0 1260



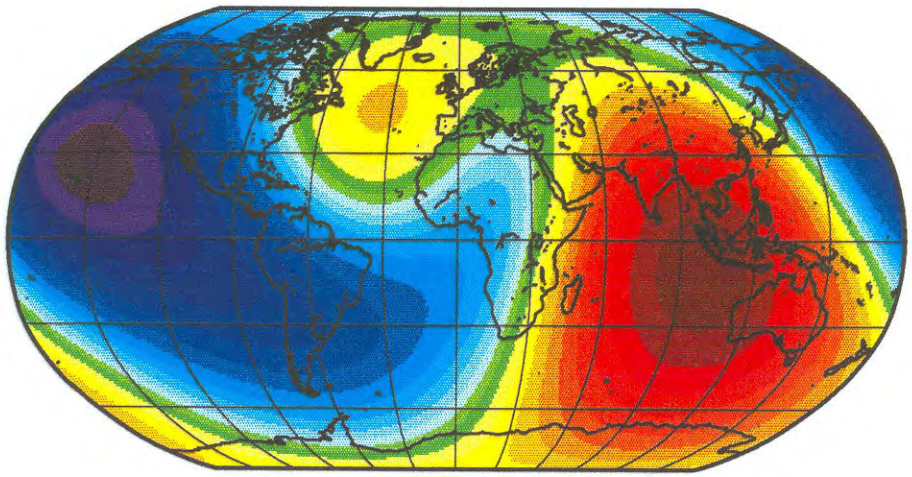
Admittanz: l=3

-18 -12 -6 0 6 12 18



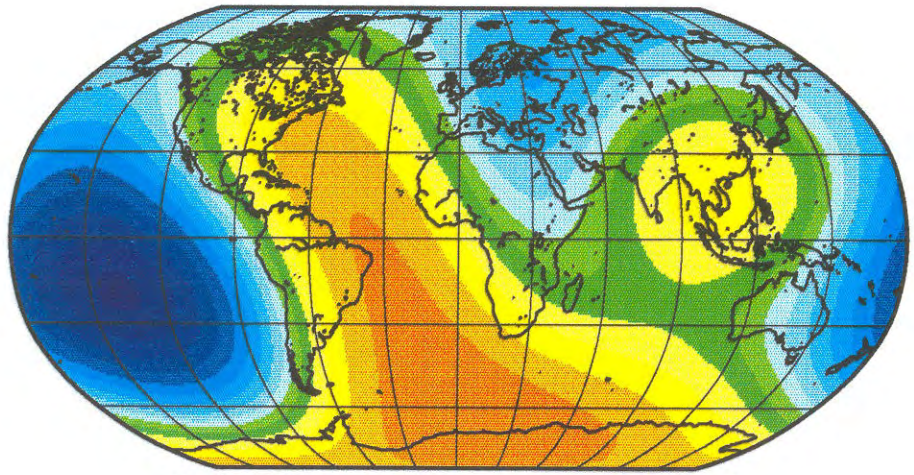
Korrelation: l=3

-1.0 -0.5 0.0 0.5 1.0



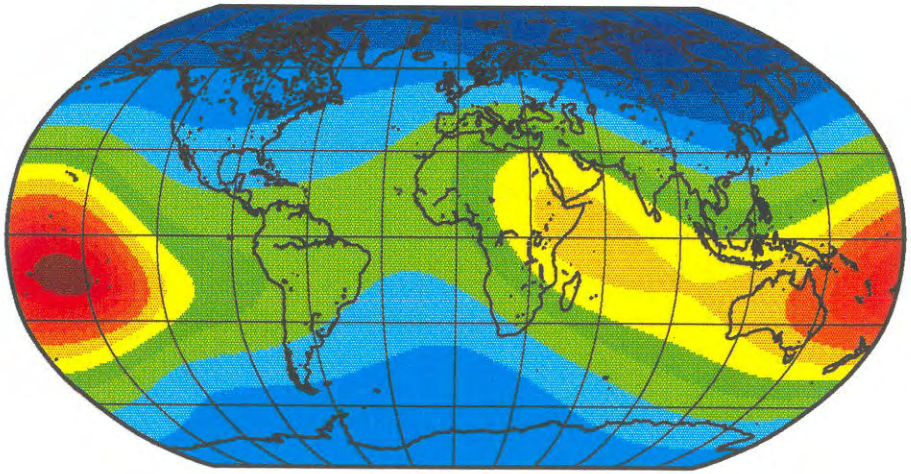
Lokalisierung des Geoids: l=4

-12.6 0.0 12.6



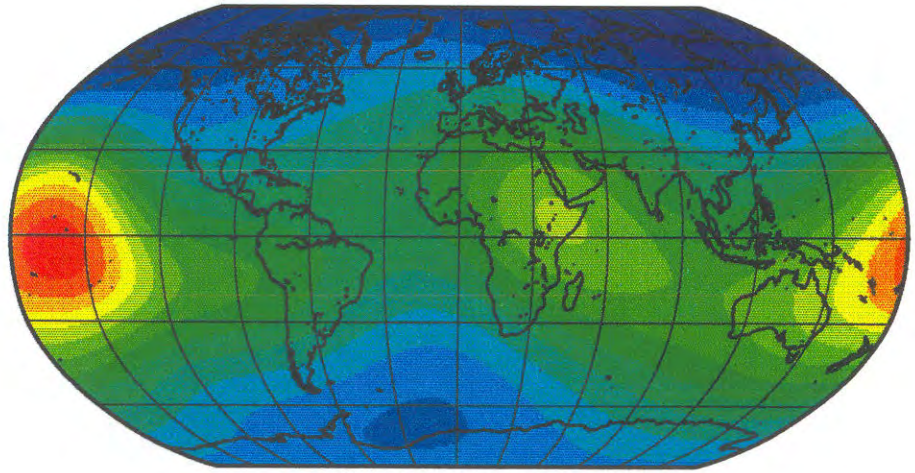
Lokalisierung der Topographie: l=4

-1260 0 1260



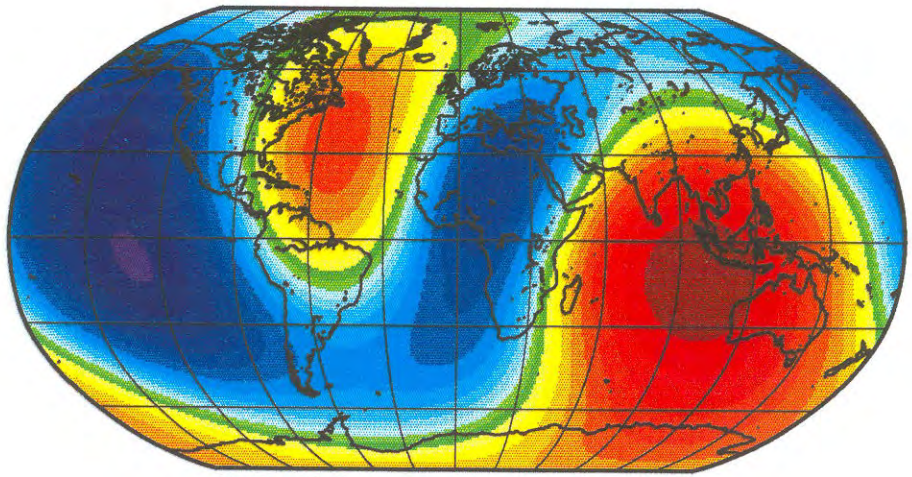
Admittanz: l=4

-18 -12 -6 0 6 12 18



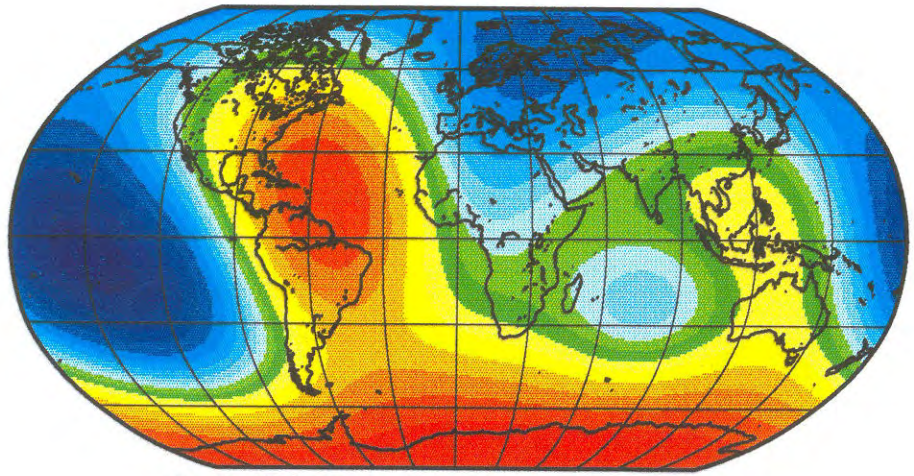
Korrelation: l=4

-1.0 -0.5 0.0 0.5 1.0



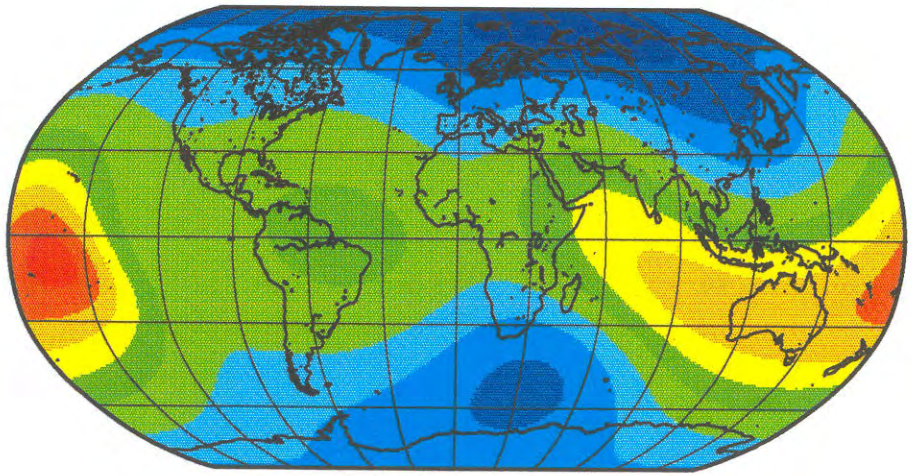
Lokalisierung des Geoids: l=5

-12.6 0.0 12.6



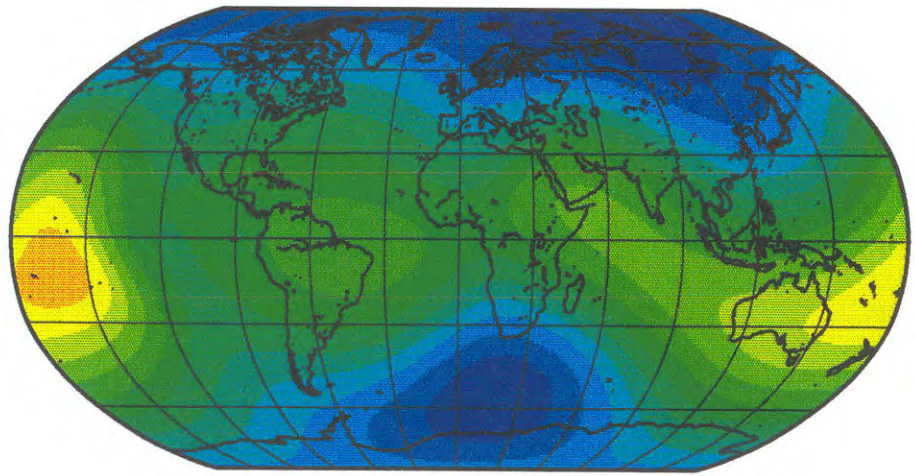
Lokalisierung der Topographie: l=5

-1260 0 1260



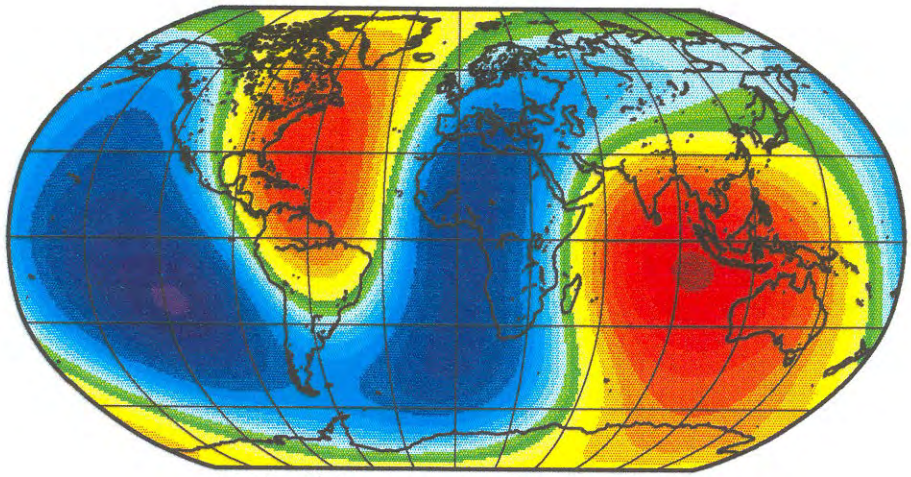
Admittanz: l=5

-18 -12 -6 0 6 12 18



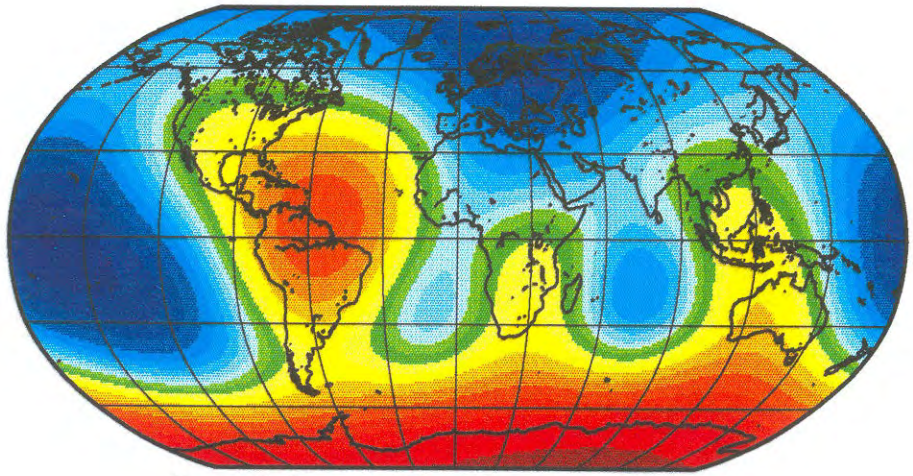
Korrelation: l=5

-1.0 -0.5 0.0 0.5 1.0



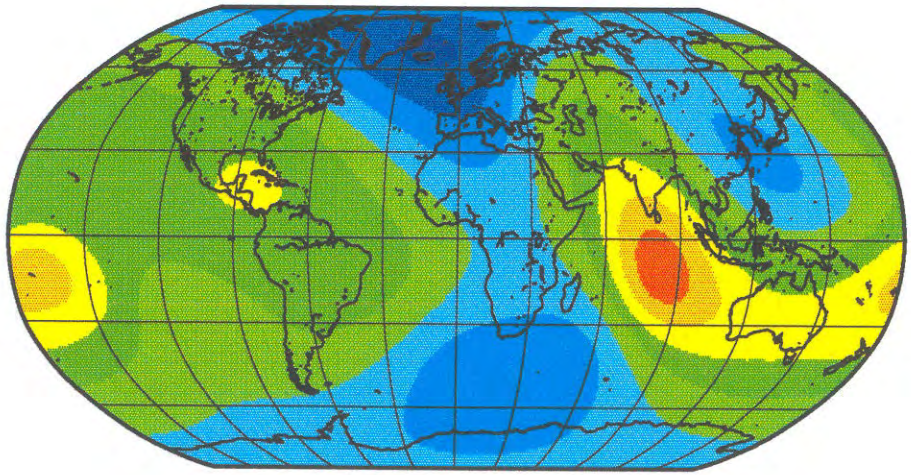
Lokalisierung des Geoids: l=6

-12.6 0.0 12.6



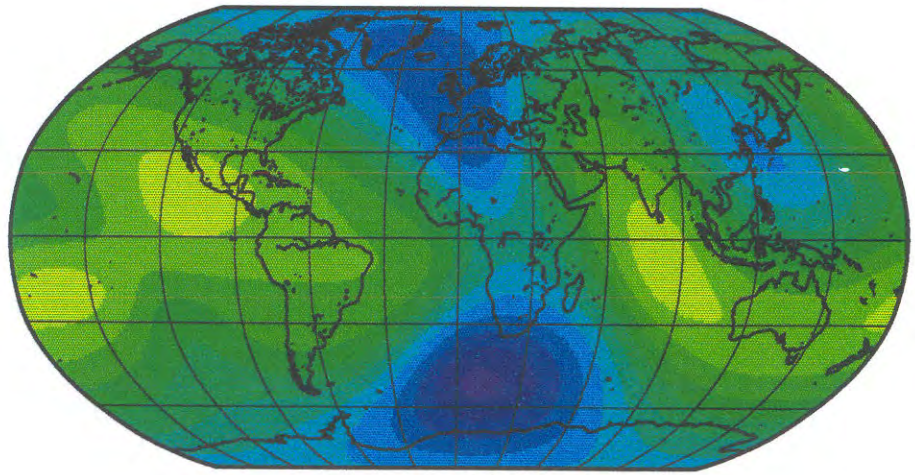
Lokalisierung der Topographie: l=6

-1260 0 1260



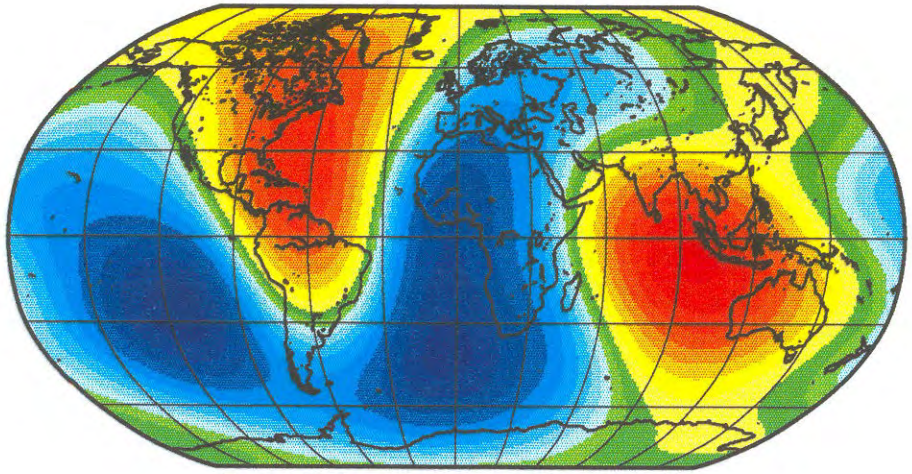
Admittanz: l=6

-18 -12 -6 0 6 12 18



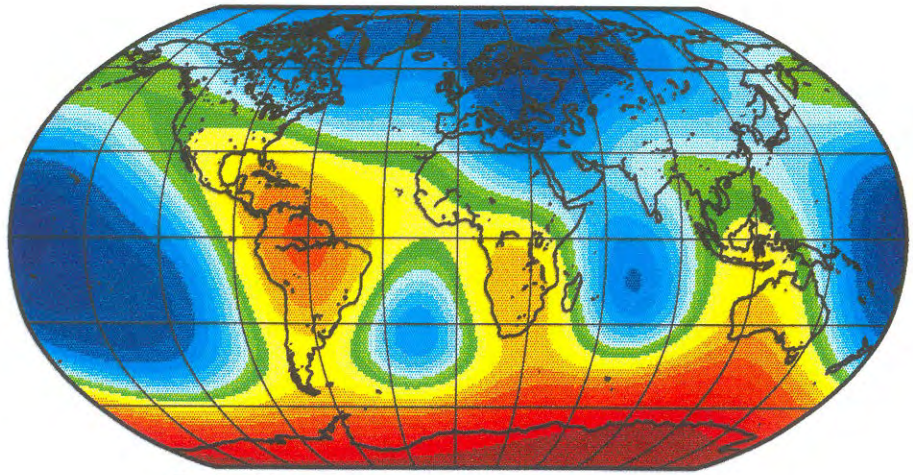
Korrelation: l=6

-1.0 -0.5 0.0 0.5 1.0



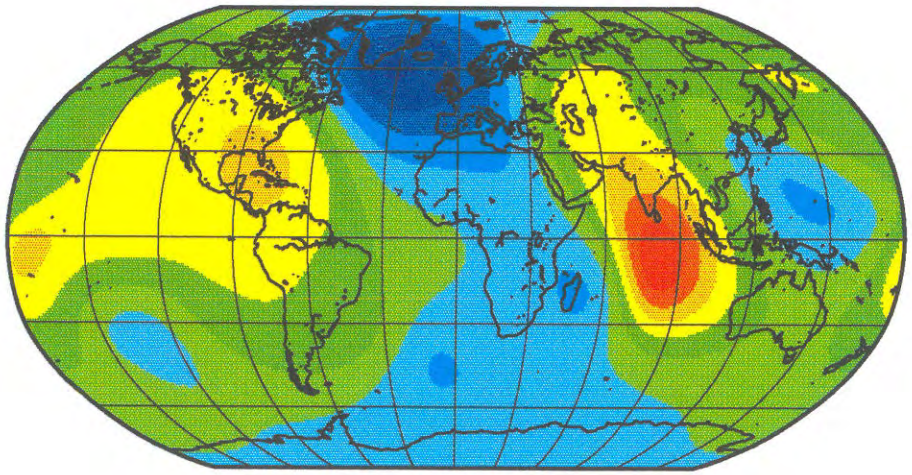
Lokalisierung des Geoids: l=7

-12.6 0.0 12.6



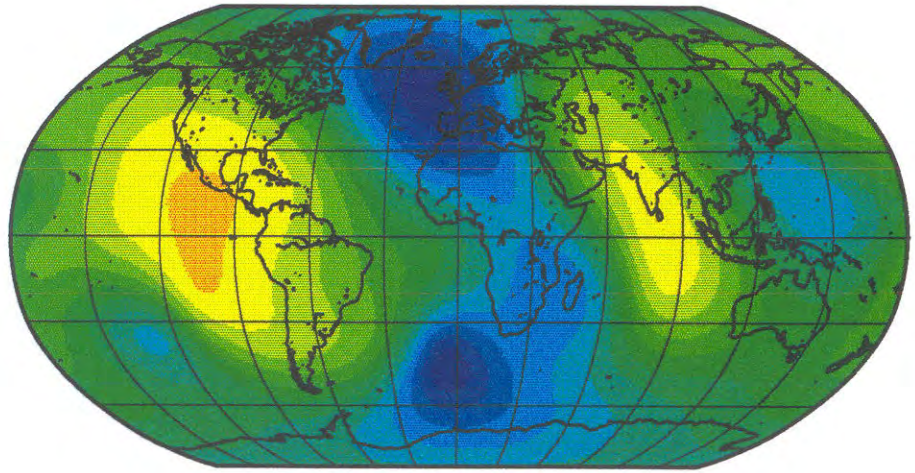
Lokalisierung der Topographie: l=7

-1260 0 1260



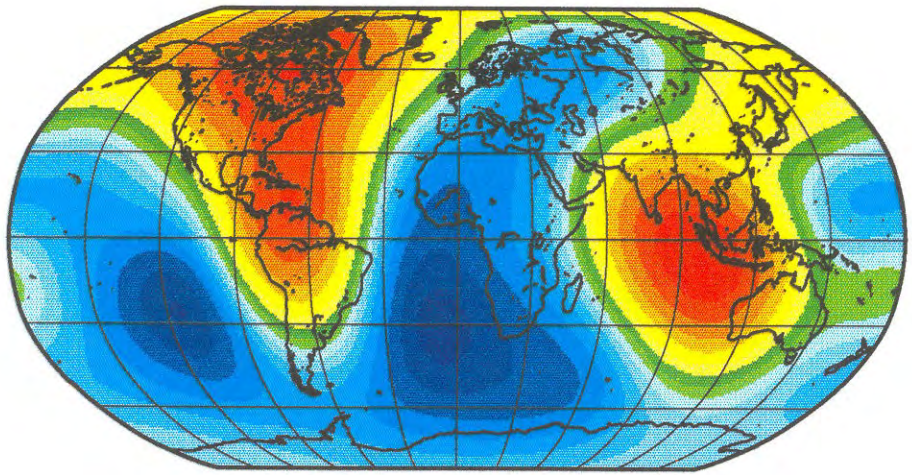
Admittanz: l=7

-18 -12 -6 0 6 12 18



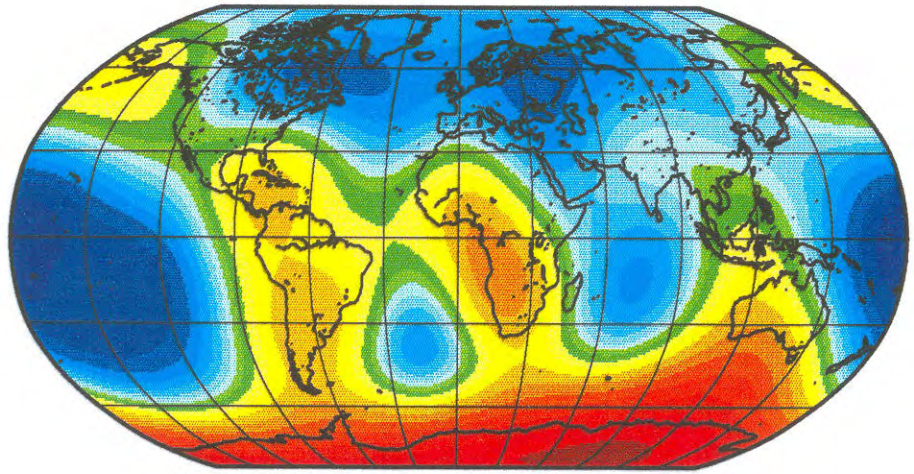
Korrelation: l=7

-1.0 -0.5 0.0 0.5 1.0



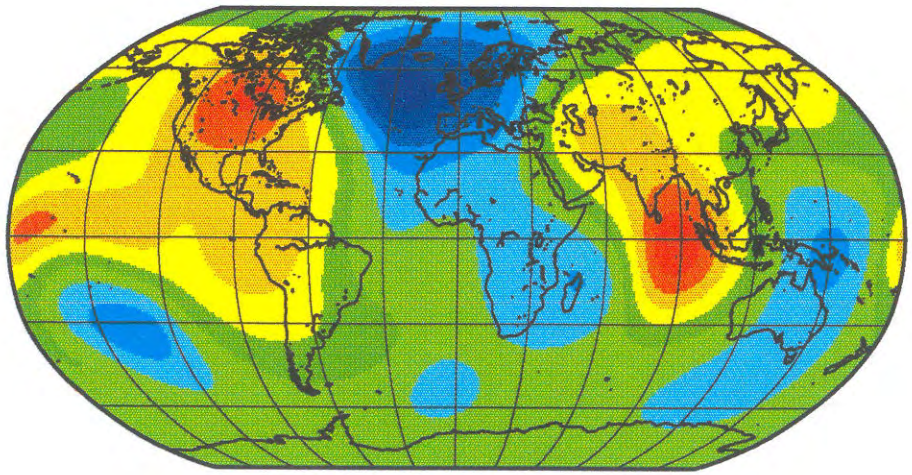
Lokalisierung des Geoids: l=8

-12.6 0.0 12.6



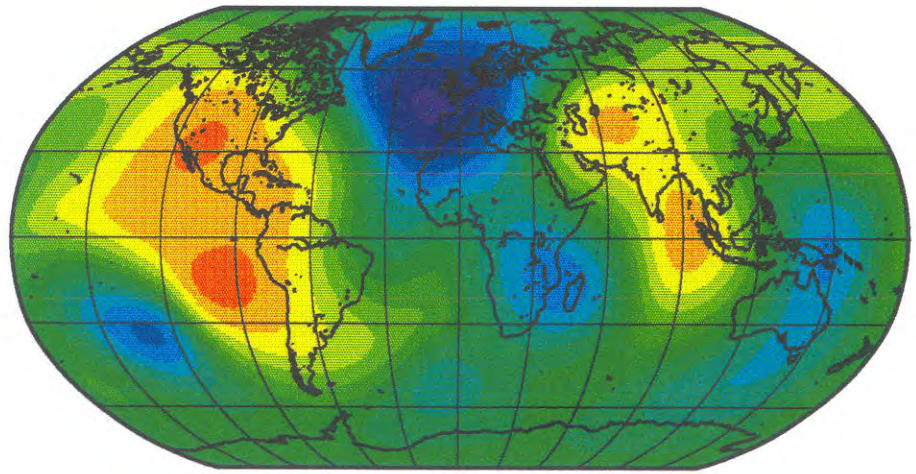
Lokalisierung der Topographie: l=8

-1260 0 1260



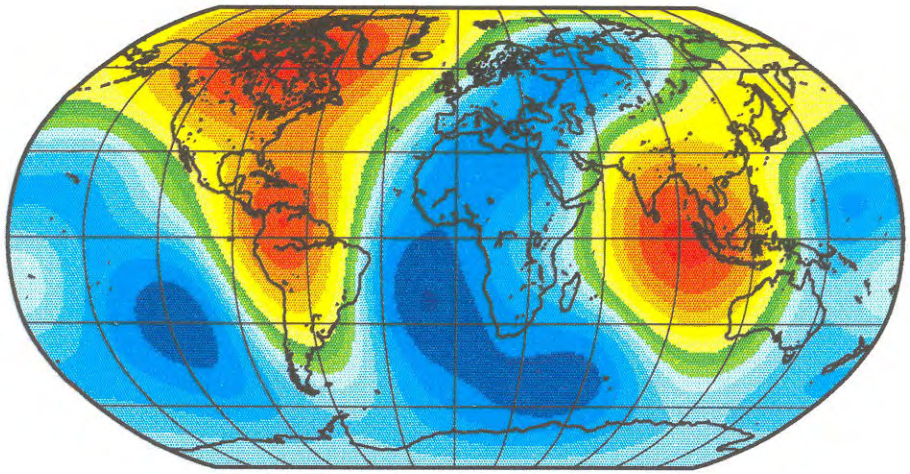
Admittanz: l=8

-18 -12 -6 0 6 12 18



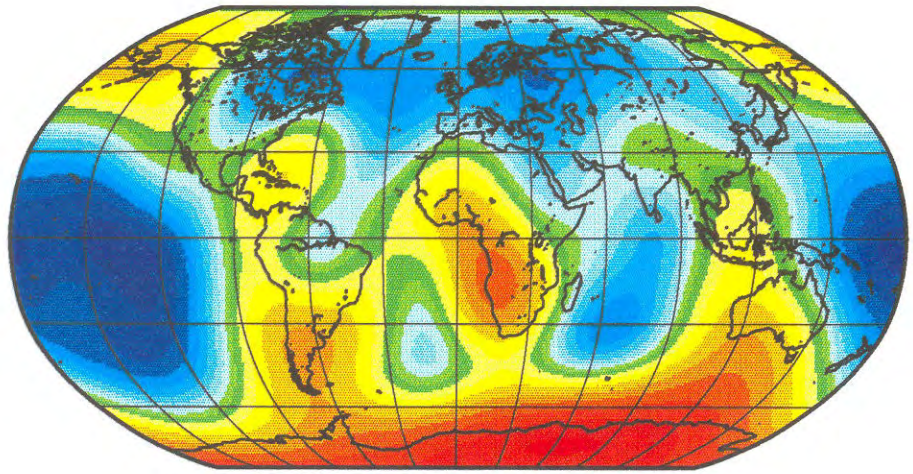
Korrelation: l=8

-1.0 -0.5 0.0 0.5 1.0



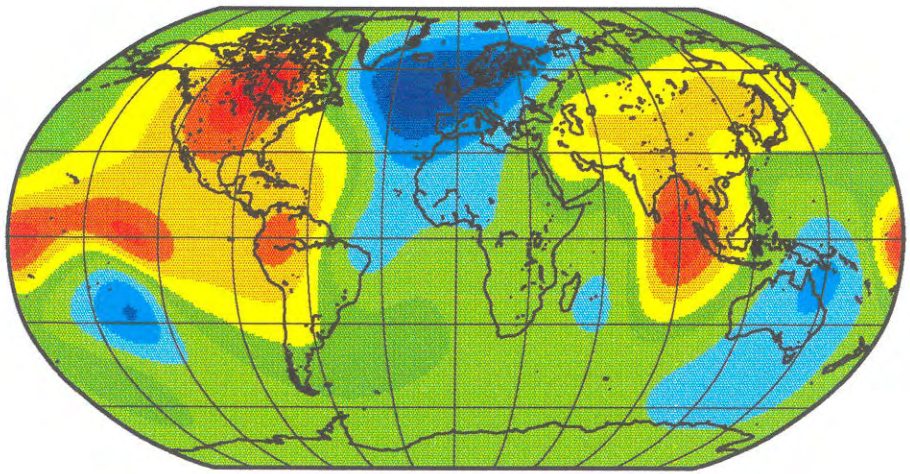
Lokalisierung des Geoids: l=9

-12.6 0.0 12.6



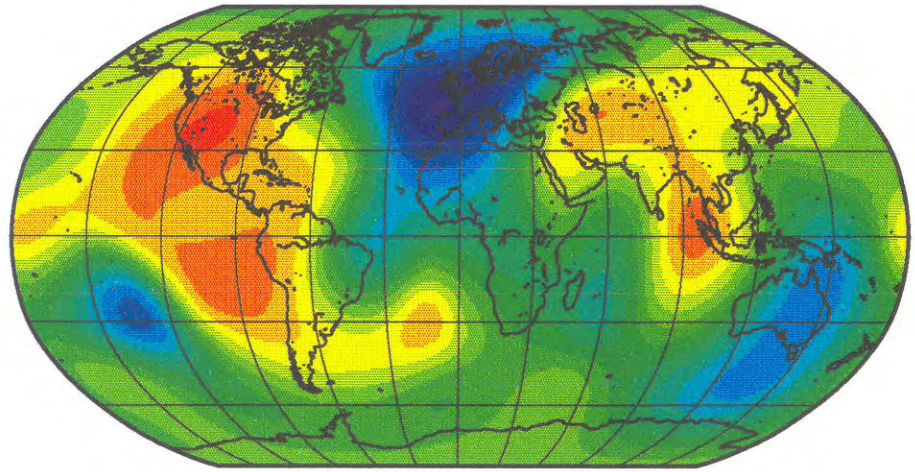
Lokalisierung der Topographie: l=9

-1260 0 1260



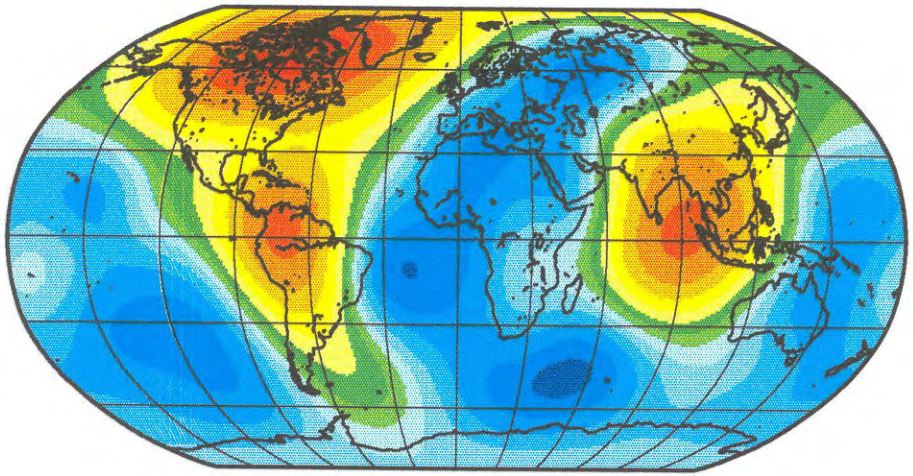
Admittanz: l=9

-18 -12 -6 0 6 12 18



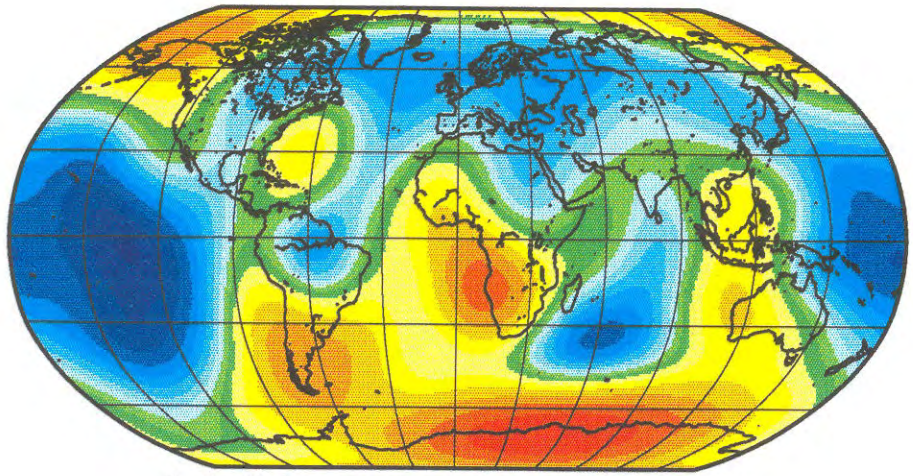
Korrelation: l=9

-1.0 -0.5 0.0 0.5 1.0



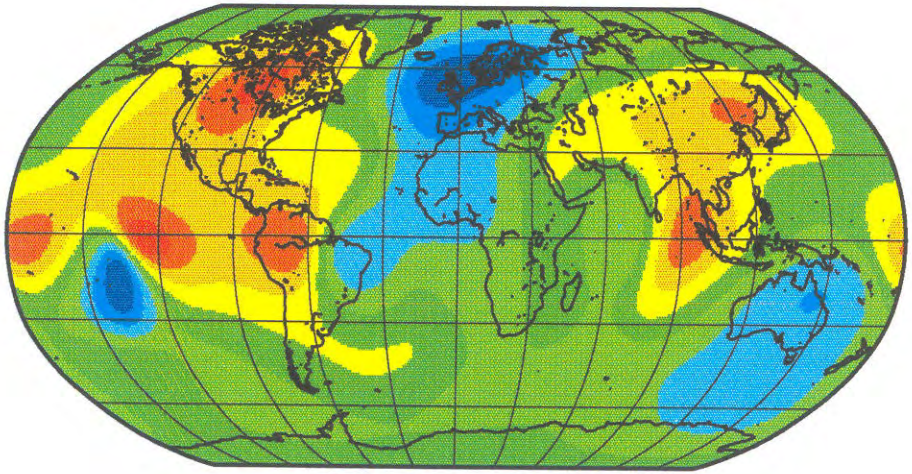
Lokalisierung des Geoids: l=10

-12.6 0.0 12.6



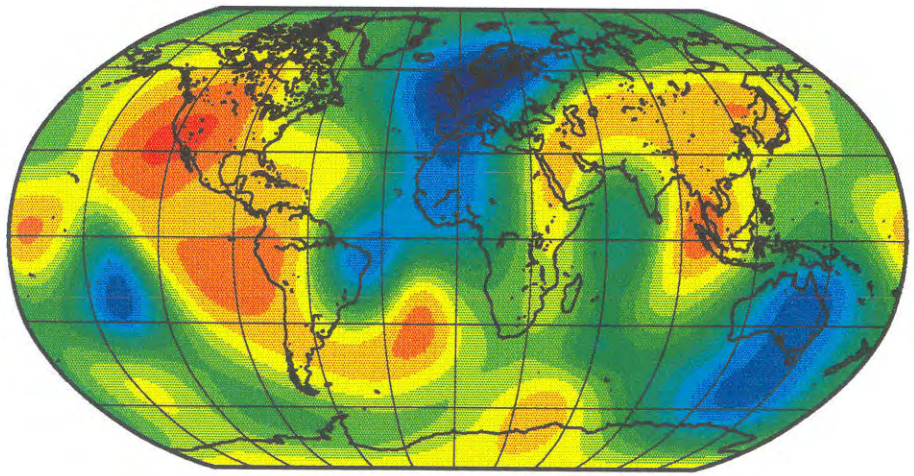
Lokalisierung der Topographie: l=10

-1260 0 1260



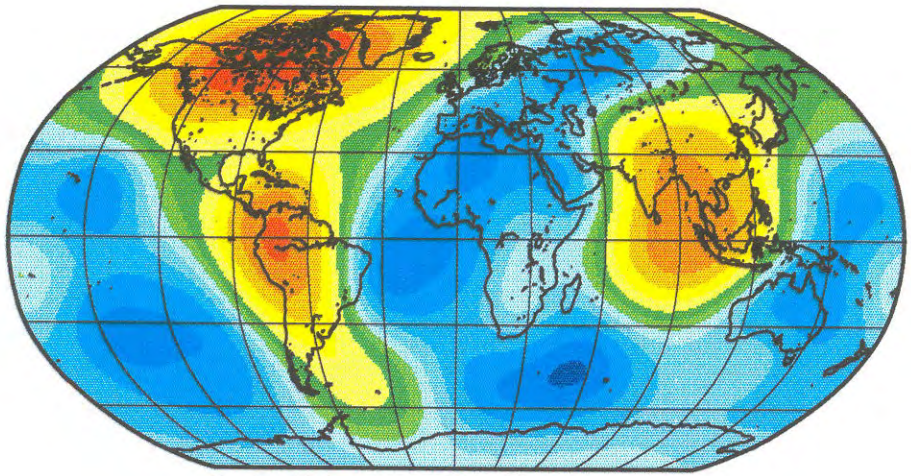
Admittanz: l=10

-18 -12 -6 0 6 12 18



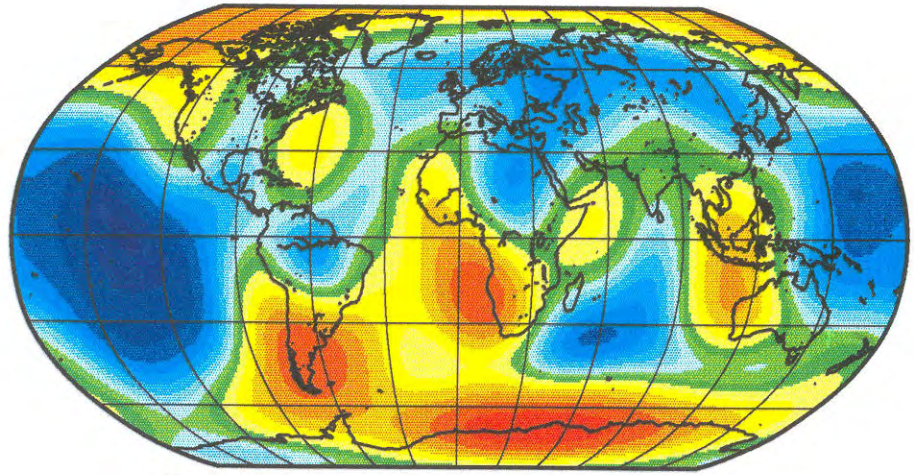
Korrelation: l=10

-1.0 -0.5 0.0 0.5 1.0



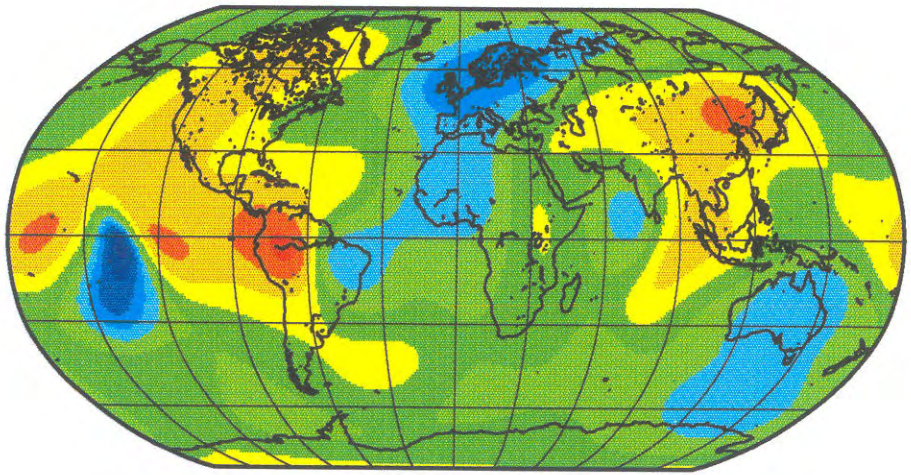
Lokalisierung des Geoids: l=11

-12.6 0.0 12.6



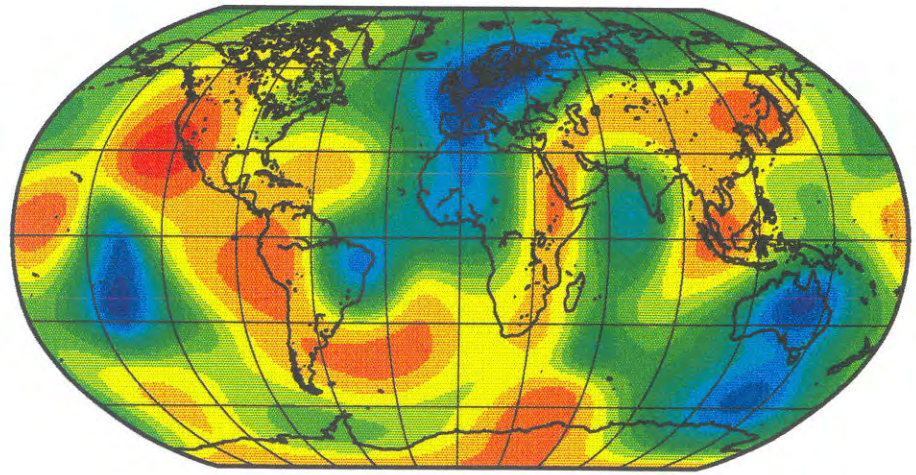
Lokalisierung der Topographie: l=11

-1260 0 1260



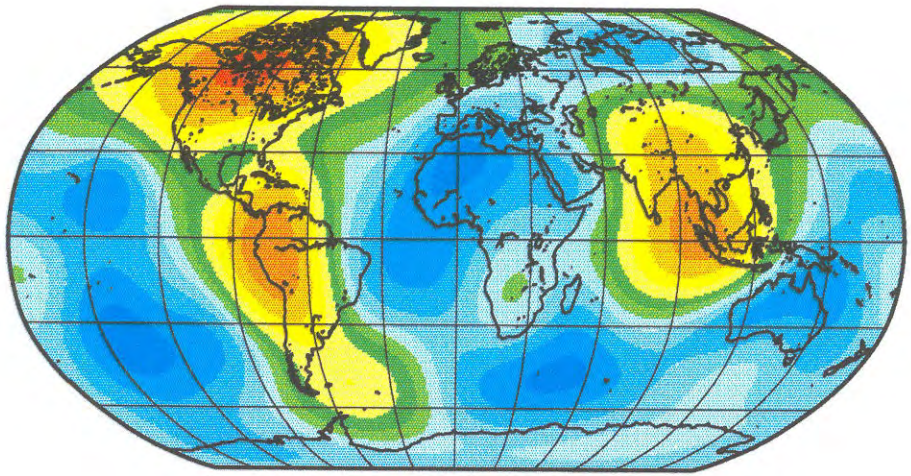
Admittanz: l=11

-18 -12 -6 0 6 12 18



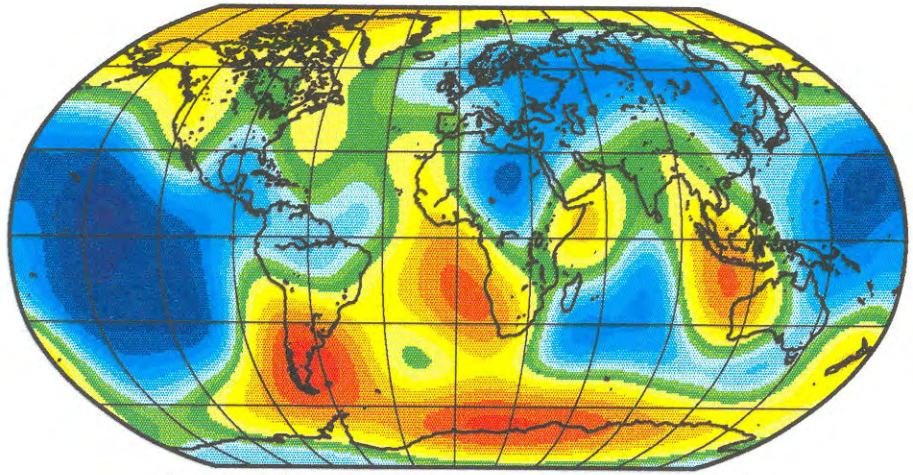
Korrelation: l=11

-1.0 -0.5 0.0 0.5 1.0



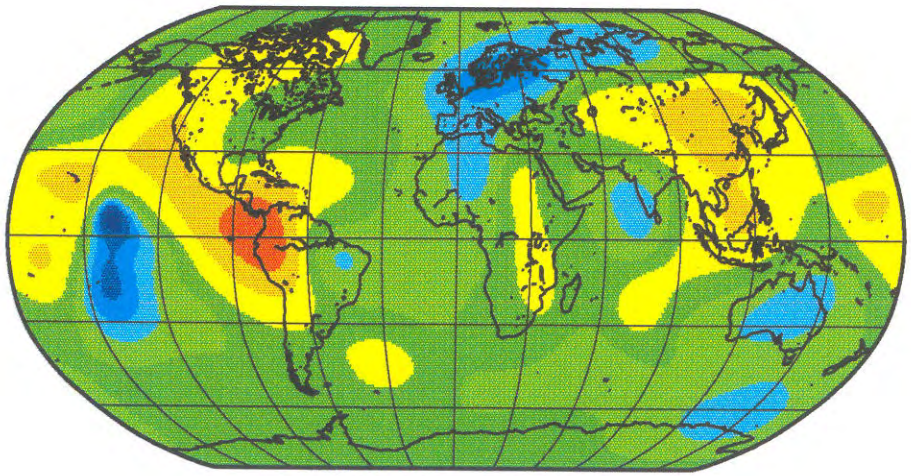
Lokalisierung des Geoids: l=12

-12.6 0.0 12.6



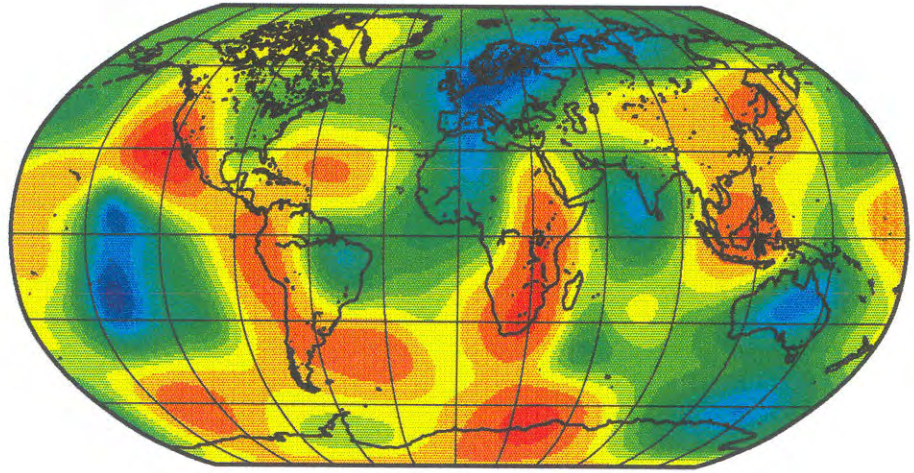
Lokalisierung der Topographie: l=12

-1260 0 1260



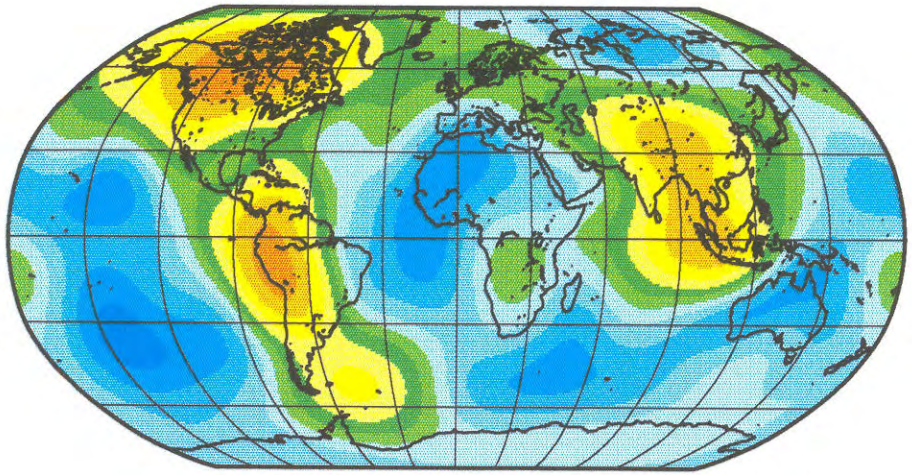
Admittanz: l=12

-18 -12 -6 0 6 12 18



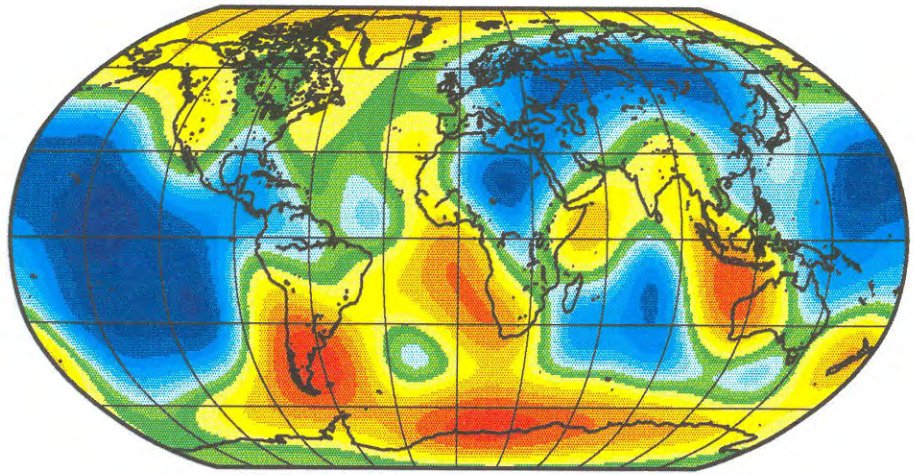
Korrelation: l=12

-1.0 -0.5 0.0 0.5 1.0



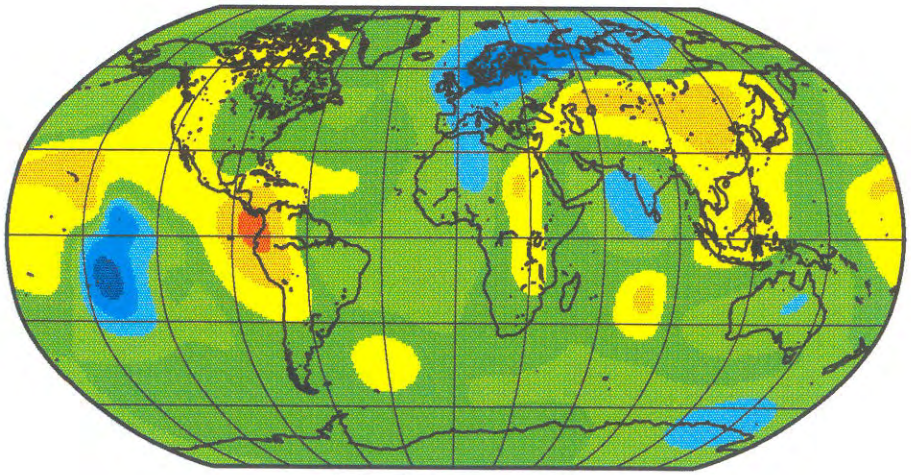
Lokalisierung des Geoids: l=13

-12.6 0.0 12.6



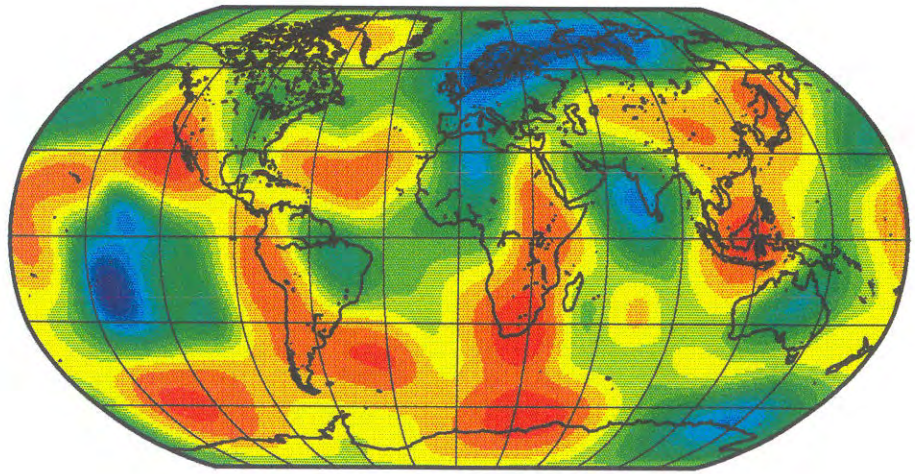
Lokalisierung der Topographie: l=13

-1260 0 1260



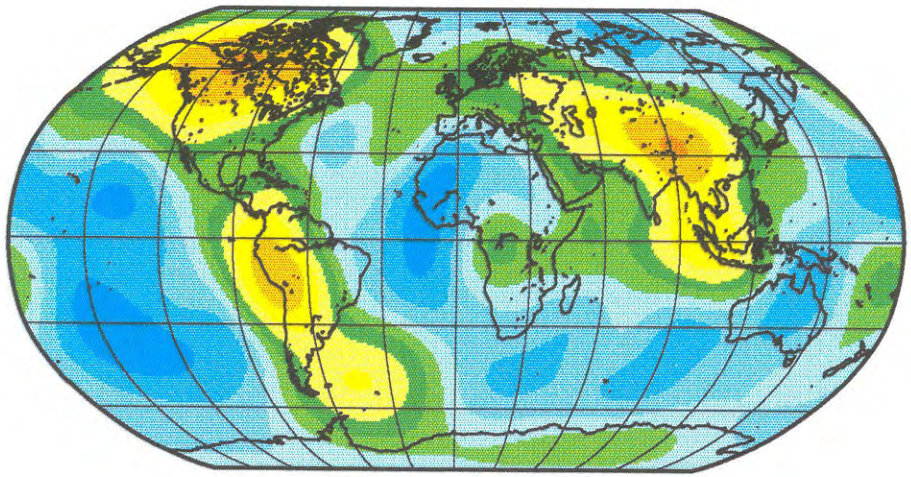
Admittanz: l=13

-18 -12 -6 0 6 12 18



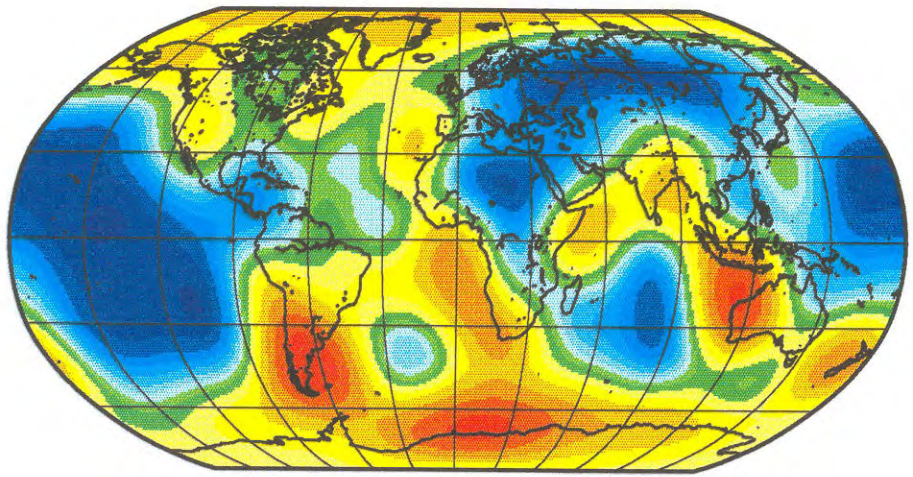
Korrelation: l=13

-1.0 -0.5 0.0 0.5 1.0



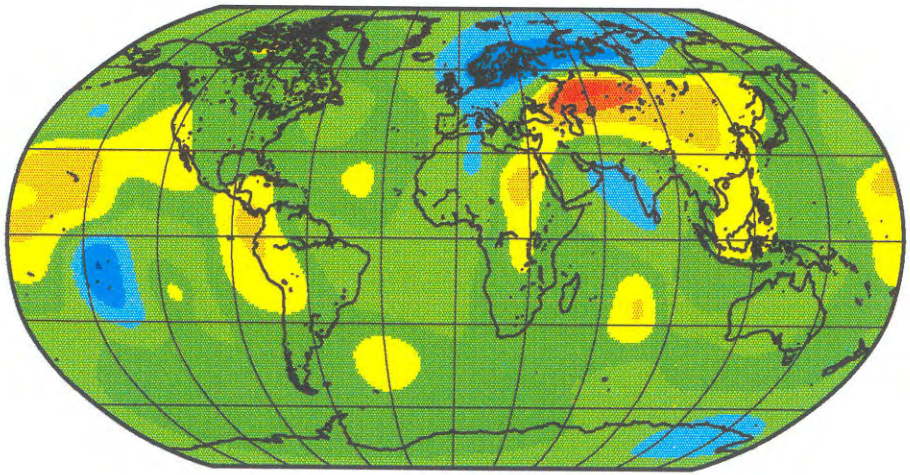
Lokalisierung des Geoids: l=14

-12.6 0.0 12.6



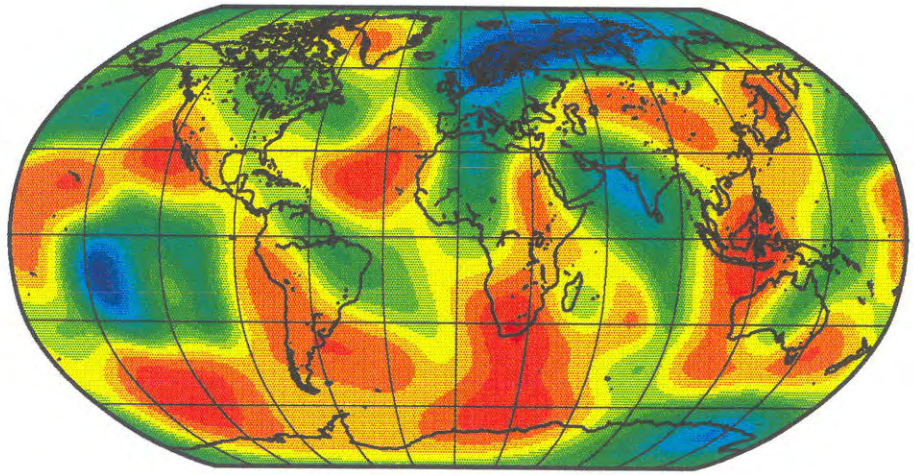
Lokalisierung der Topographie: l=14

-1260 0 1260



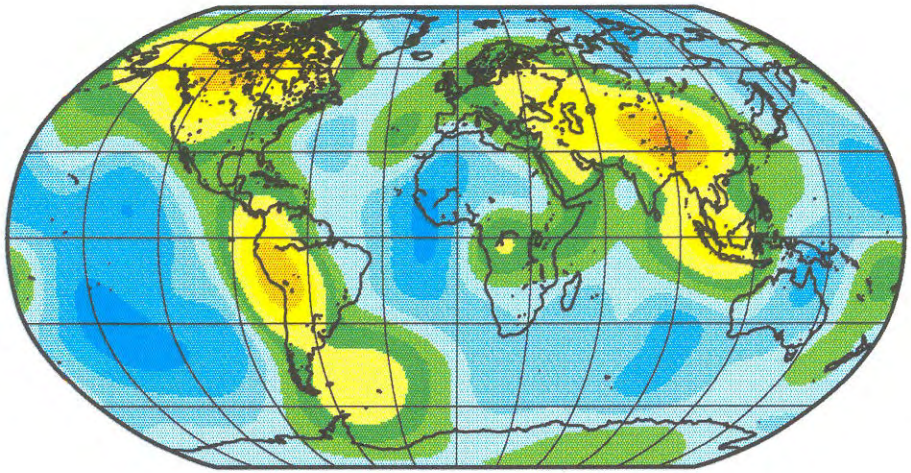
Admittanz: l=14

-18 -12 -6 0 6 12 18



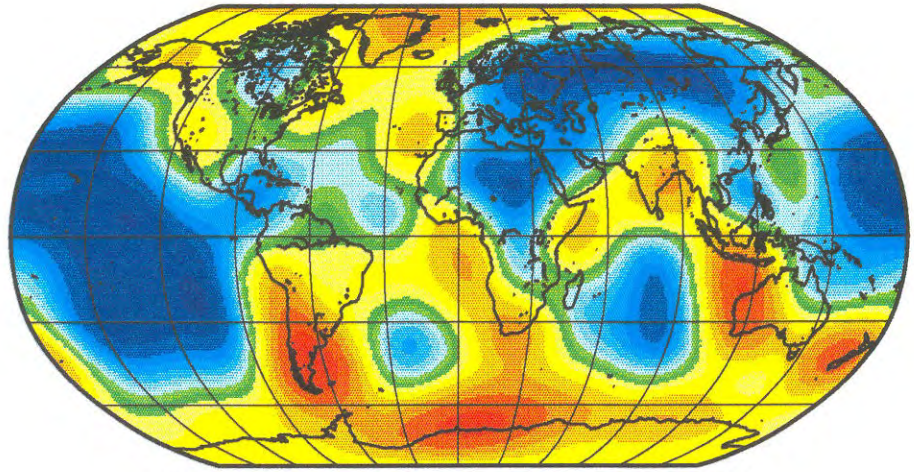
Korrelation: l=14

-1.0 -0.5 0.0 0.5 1.0



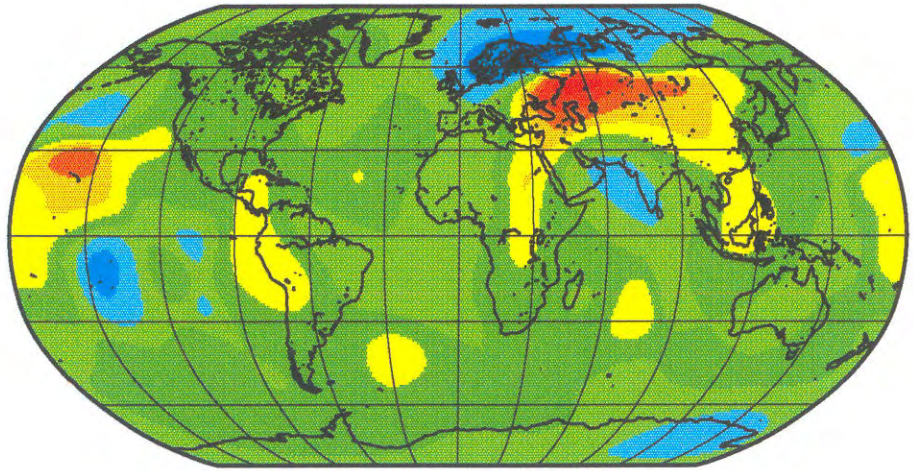
Lokalisierung des Geoids: l=15

-12.6 0.0 12.6



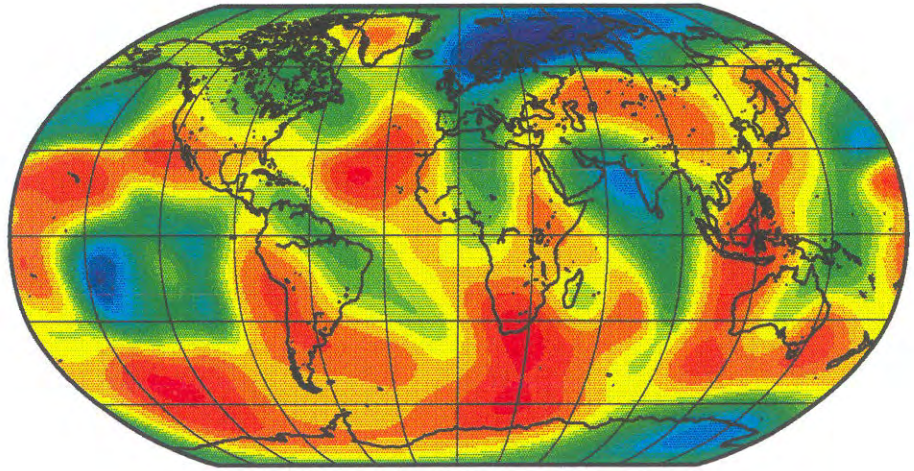
Lokalisierung der Topographie: l=15

-1260 0 1260



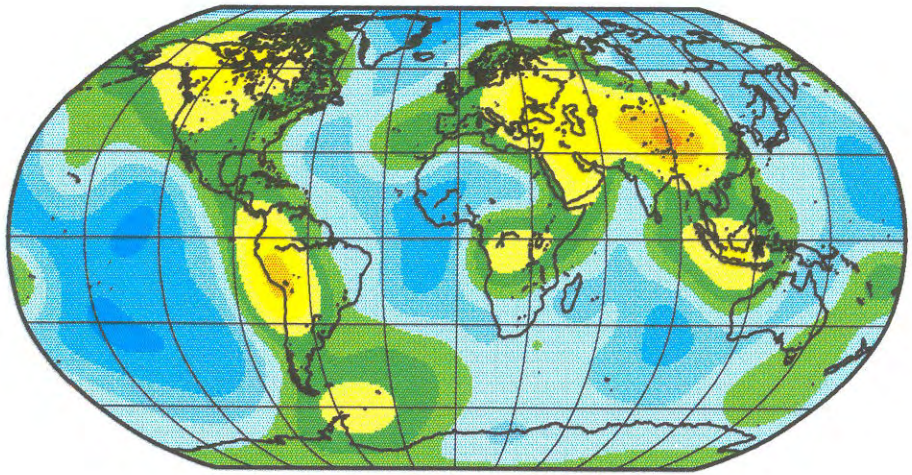
Admittanz: l=15

-18 -12 -6 0 6 12 18



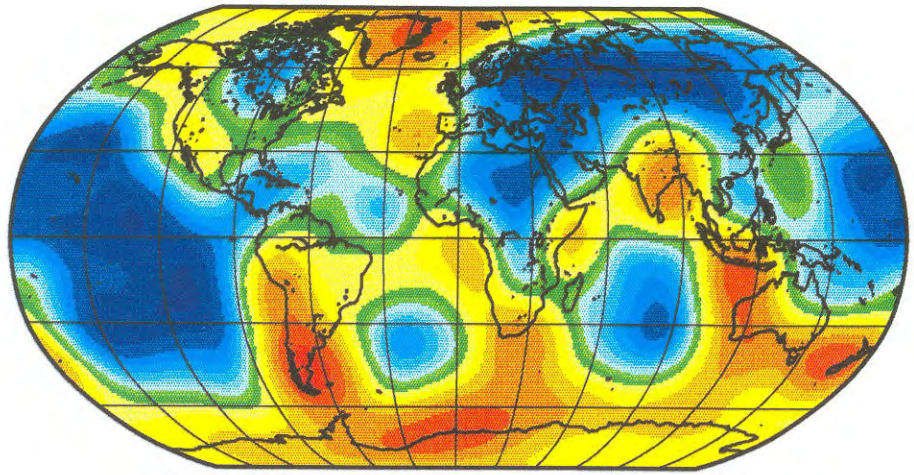
Korrelation: l=15

-1.0 -0.5 0.0 0.5 1.0



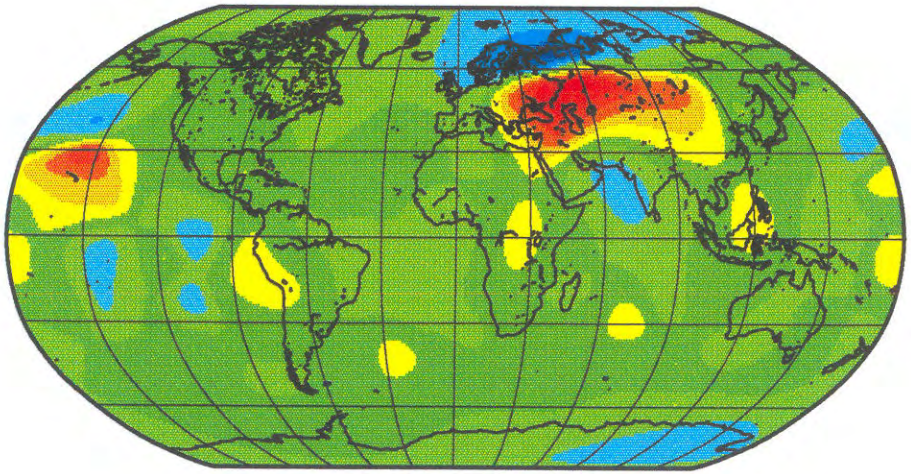
Lokalisierung des Geoids: l=16

-12.6 0.0 12.6



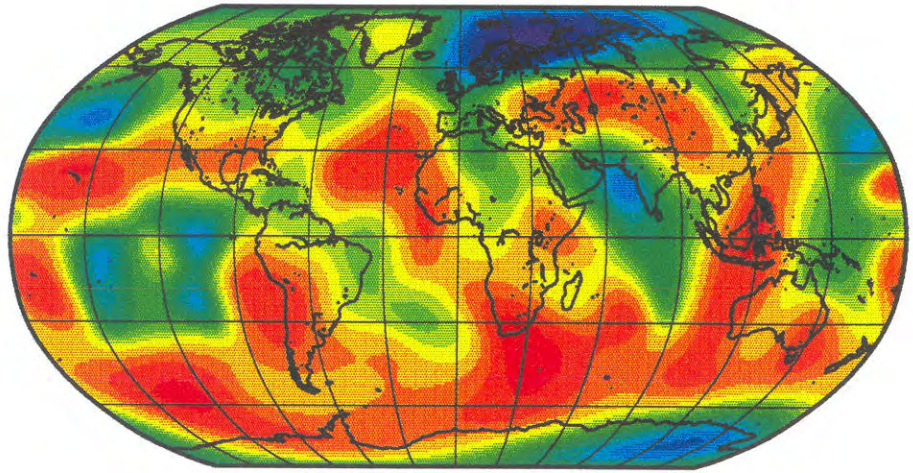
Lokalisierung der Topographie: l=16

-1260 0 1260



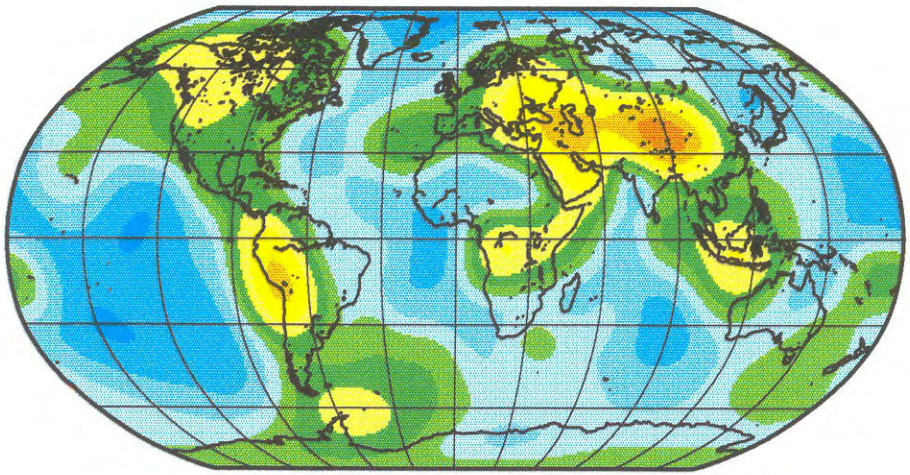
Admittanz: l=16

-18 -12 -6 0 6 12 18



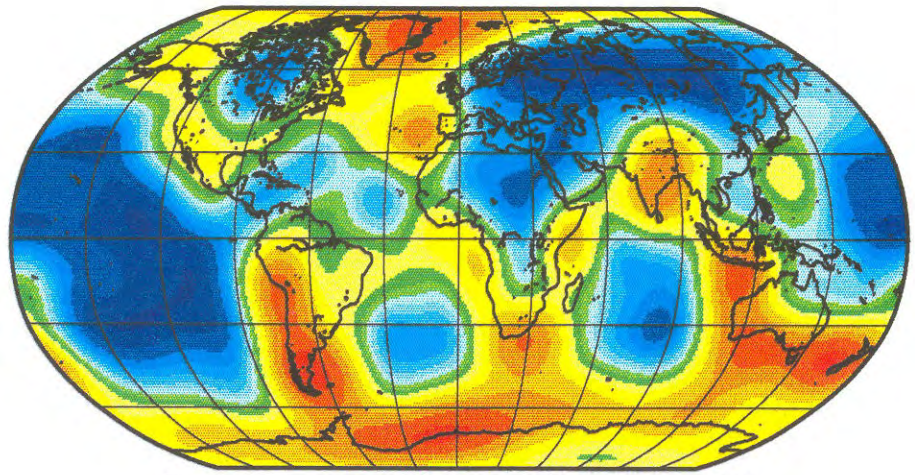
Korrelation: l=16

-1.0 -0.5 0.0 0.5 1.0



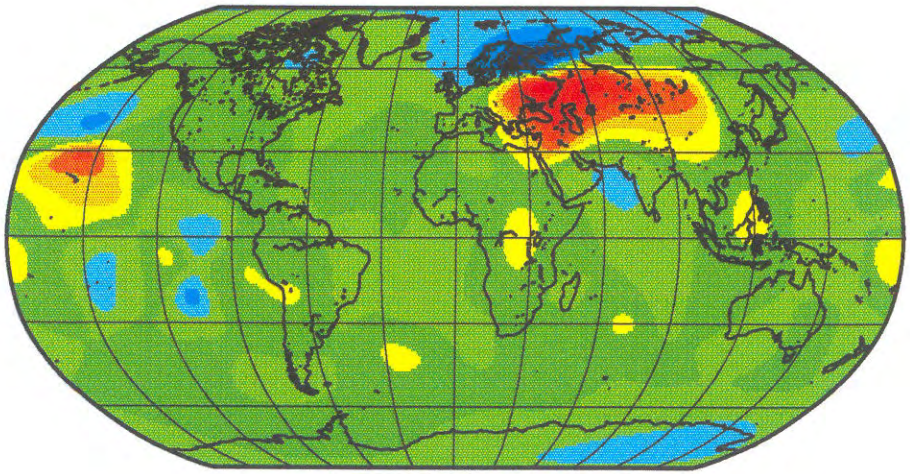
Lokalisierung des Geoids: l=17

-12.6 0.0 12.6



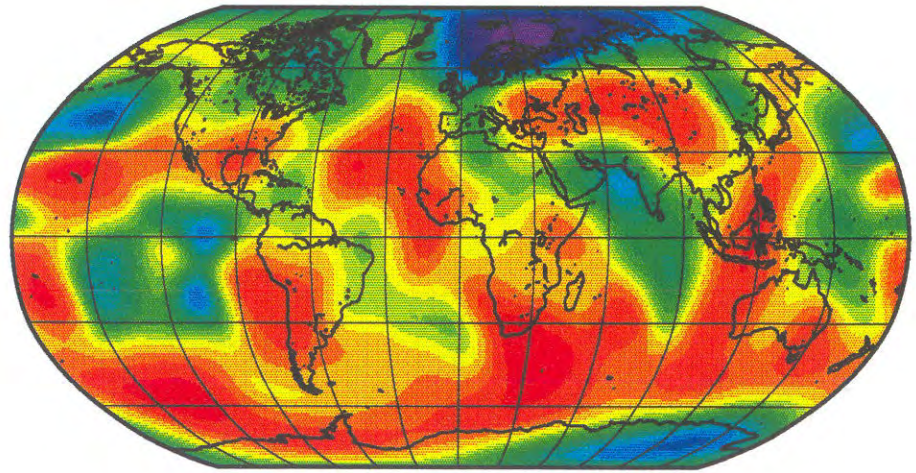
Lokalisierung der Topographie: l=17

-1260 0 1260



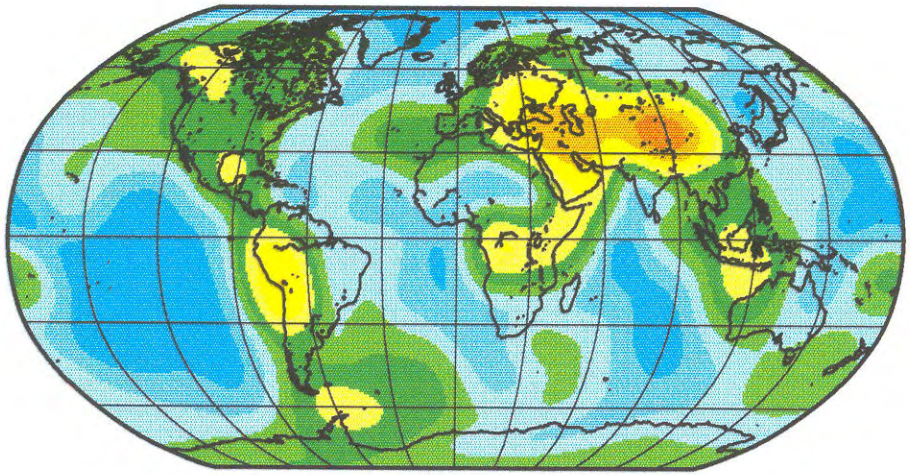
Admittanz: l=17

-18 -12 -6 0 6 12 18



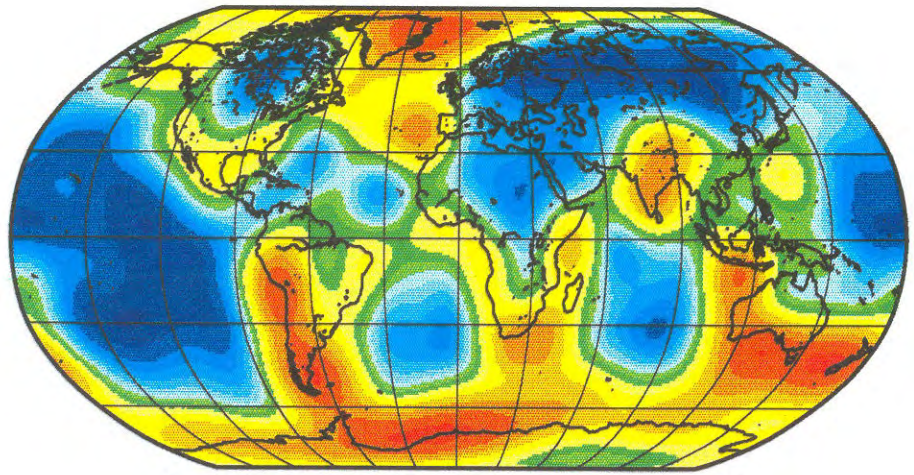
Korrelation: l=17

-1.0 -0.5 0.0 0.5 1.0



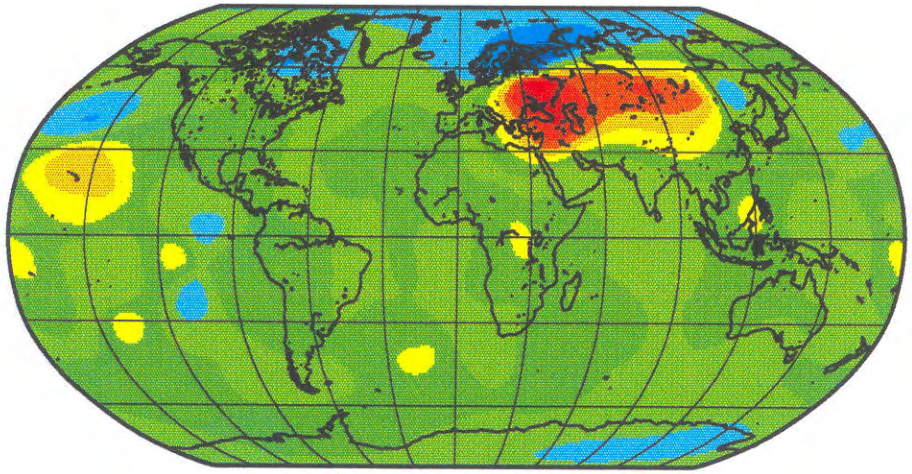
Lokalisierung des Geoids: l=18

-12.6 0.0 12.6



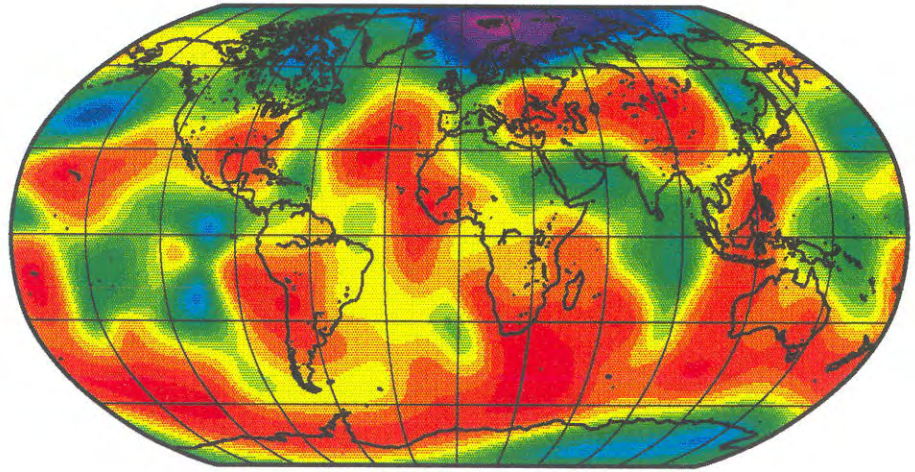
Lokalisierung der Topographie: l=18

-1260 0 1260



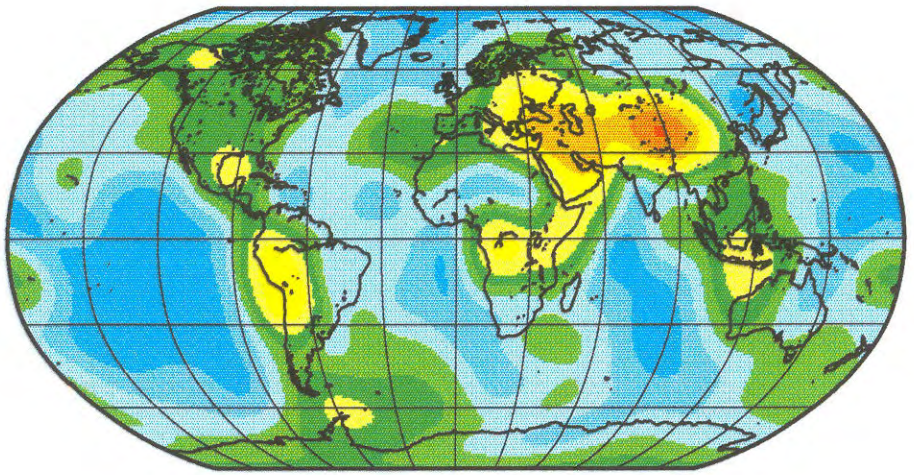
Admittanz: l=18

-18 -12 -6 0 6 12 18



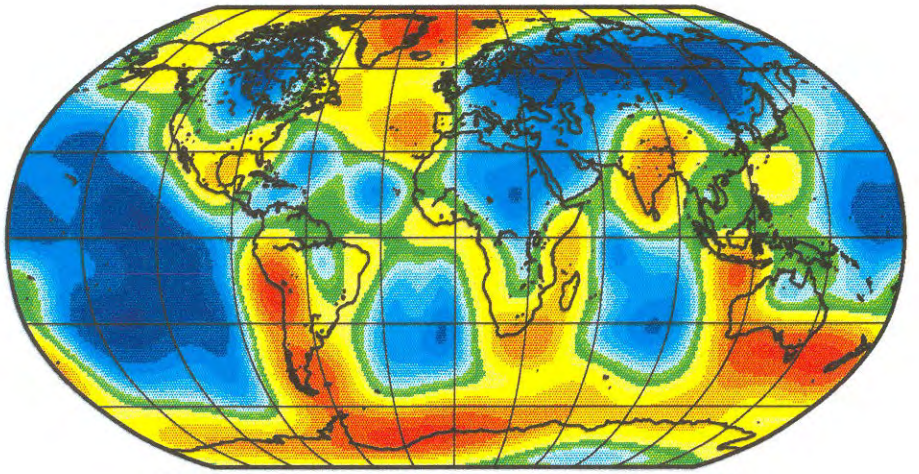
Korrelation: l=18

-1.0 -0.5 0.0 0.5 1.0



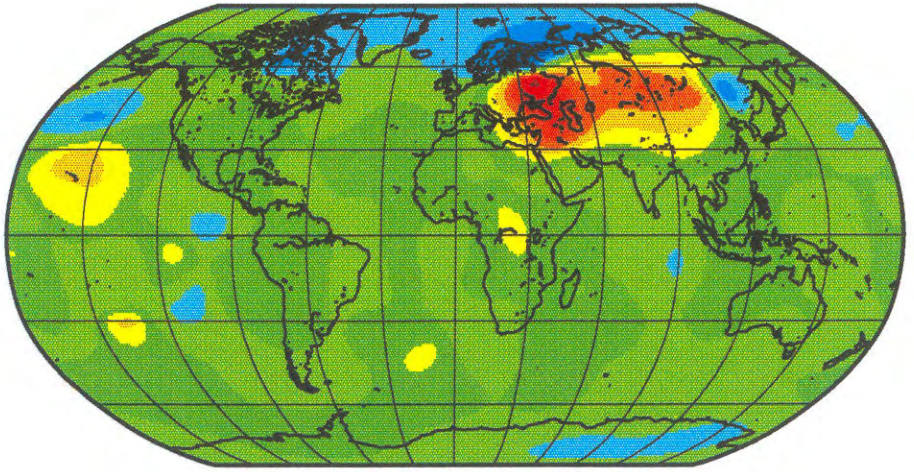
Lokalisierung des Geoids: l=19

-12.6 0.0 12.6



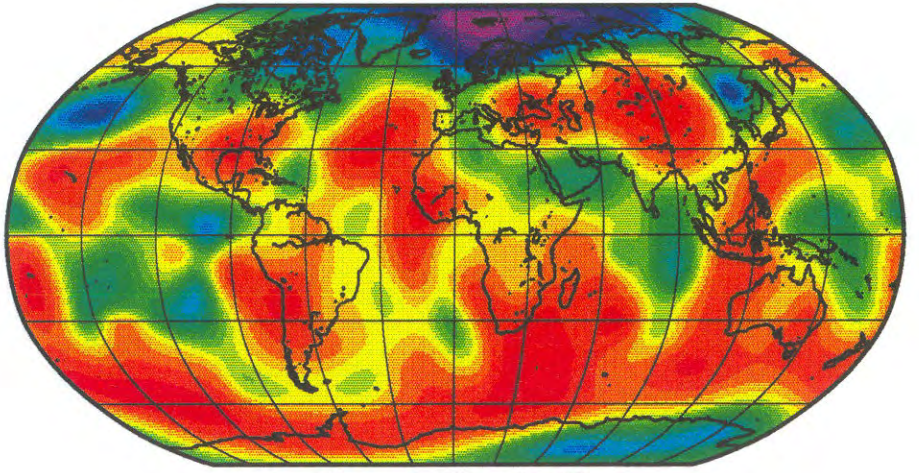
Lokalisierung der Topographie: l=19

-1260 0 1260



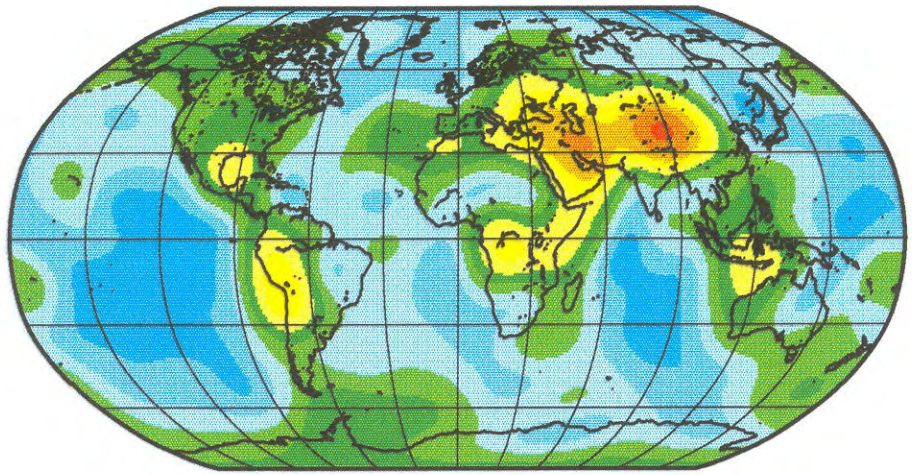
Admittanz: l=19

-18 -12 -6 0 6 12 18



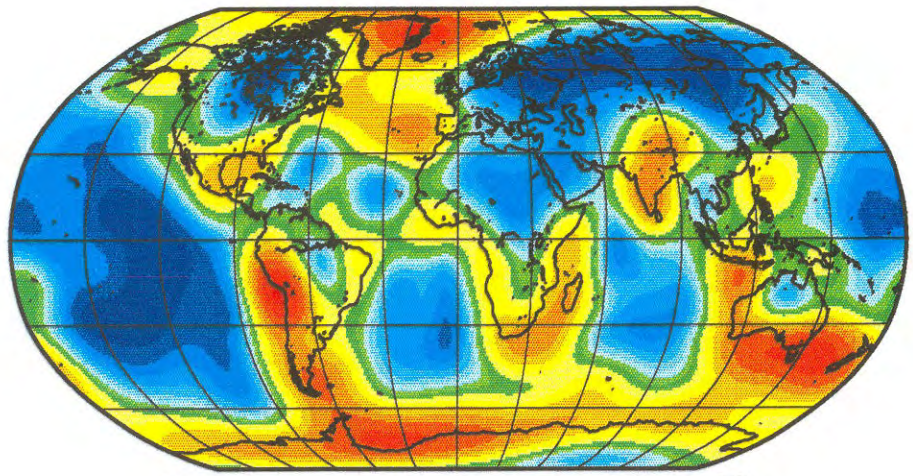
Korrelation: l=19

-1.0 -0.5 0.0 0.5 1.0



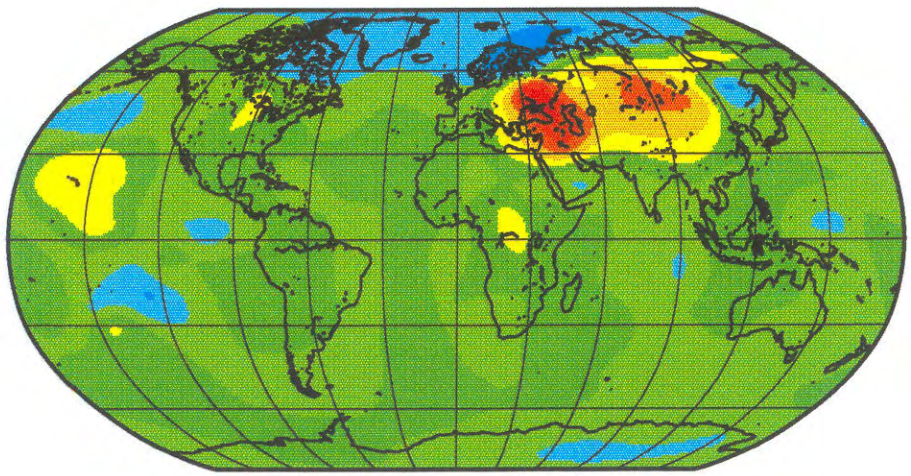
Lokalisierung des Geoids: l=20

-12.6 0.0 12.6



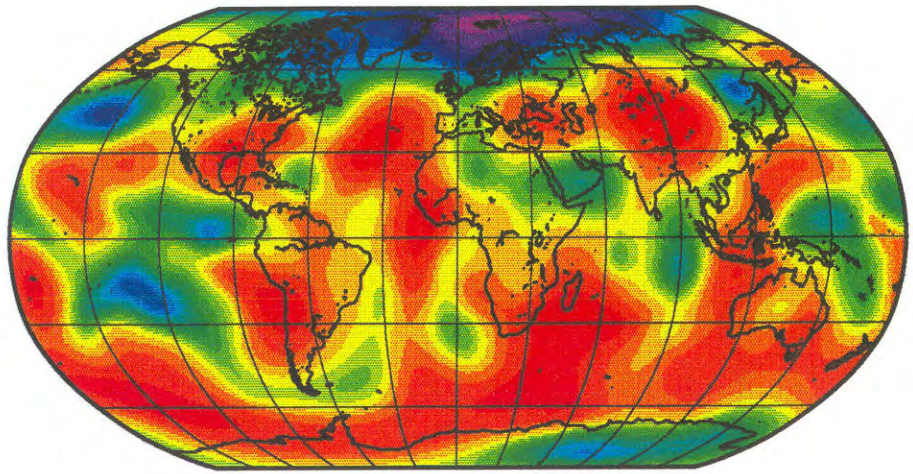
Lokalisierung der Topographie: l=20

-1260 0 1260



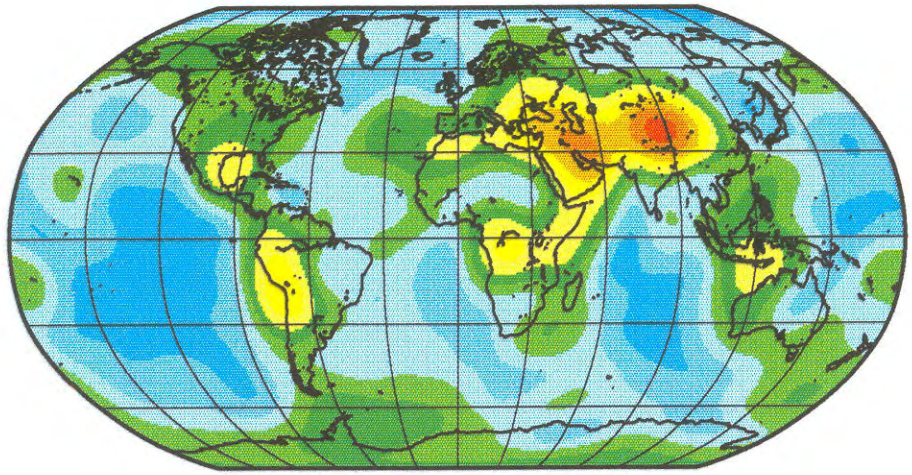
Admittanz: l=20

-18 -12 -6 0 6 12 18



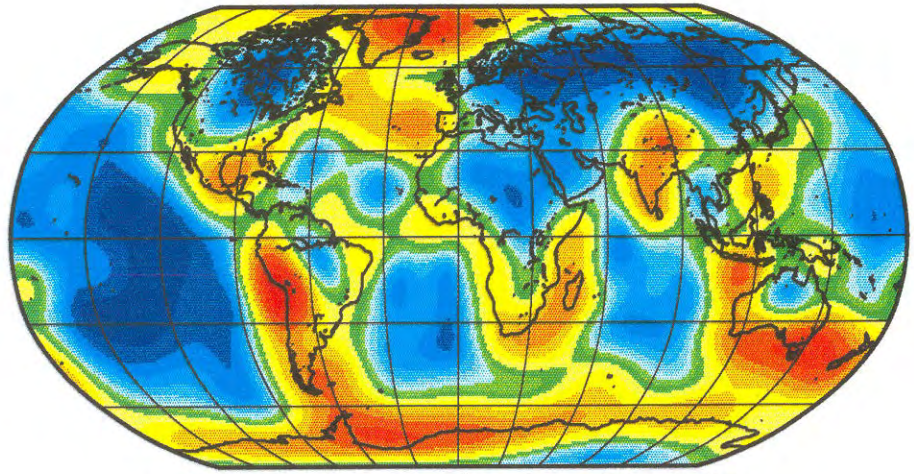
Korrelation: l=20

-1.0 -0.5 0.0 0.5 1.0



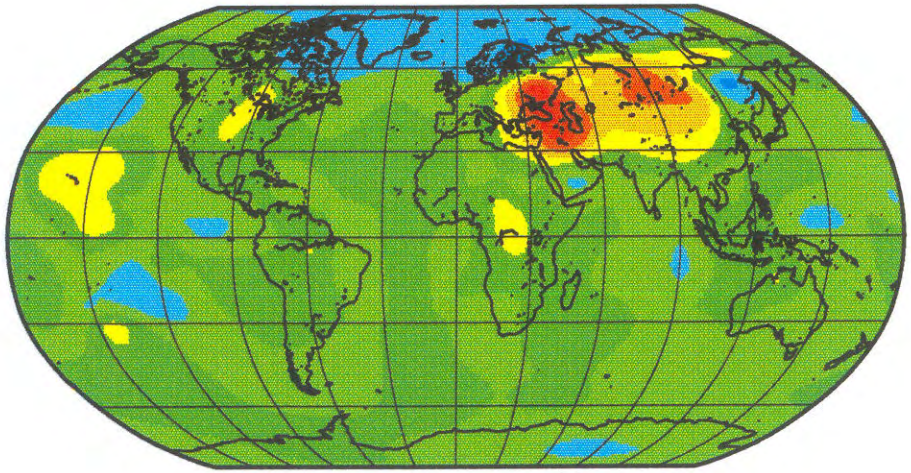
Lokalisation des Geoids: l=21

-12.6 0.0 12.6



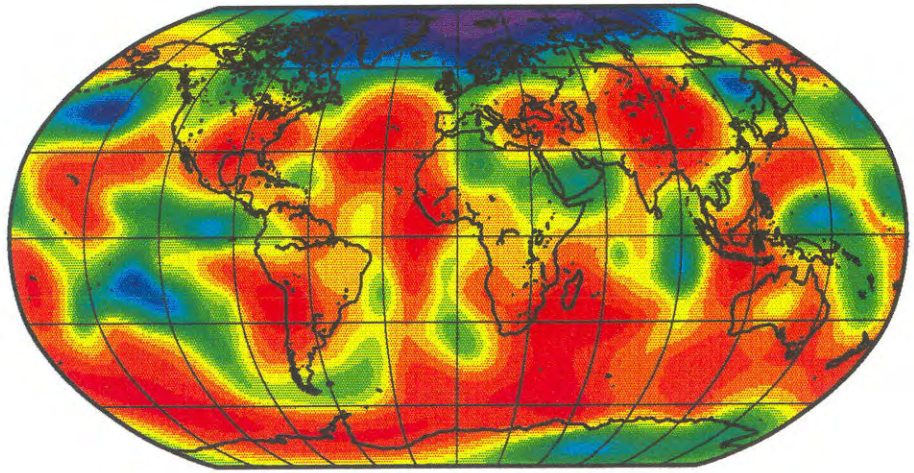
Lokalisation der Topographie: l=21

-1260 0 1260



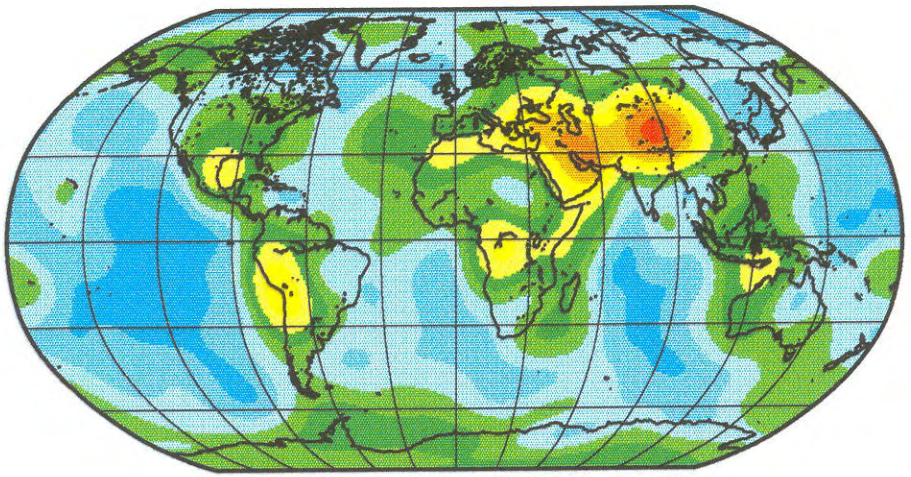
Admittanz: l=21

-18 -12 -6 0 6 12 18



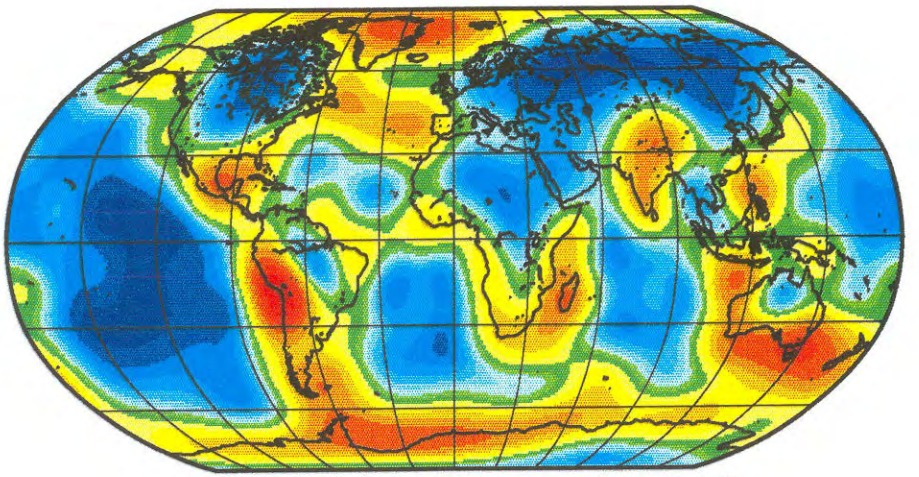
Korrelation: l=21

-1.0 -0.5 0.0 0.5 1.0



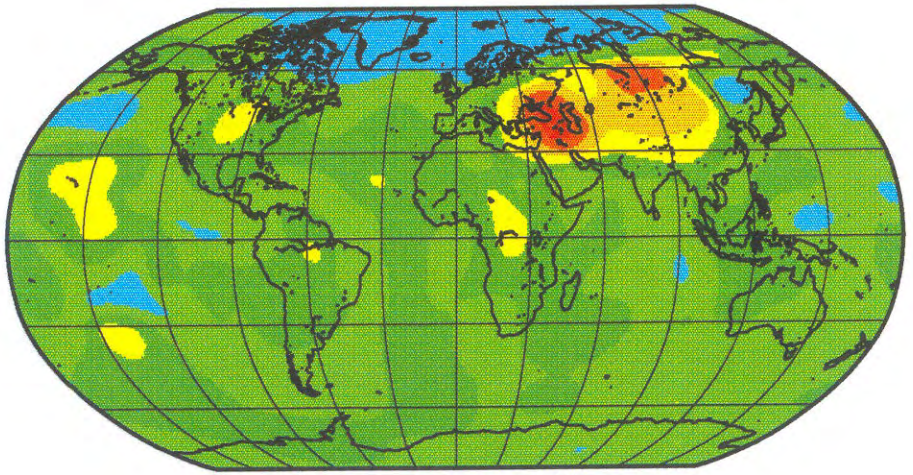
Lokalisation des Geoids: l=22

-12.6 0.0 12.6



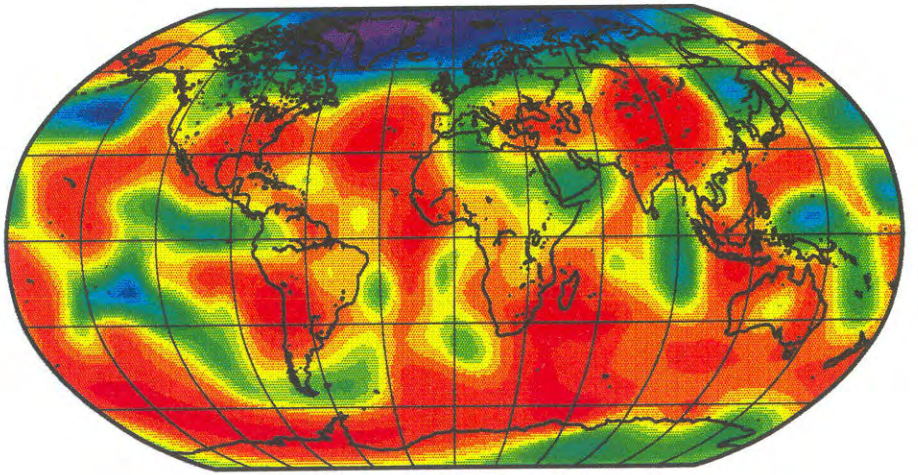
Lokalisation der Topographie: l=22

-1260 0 1260



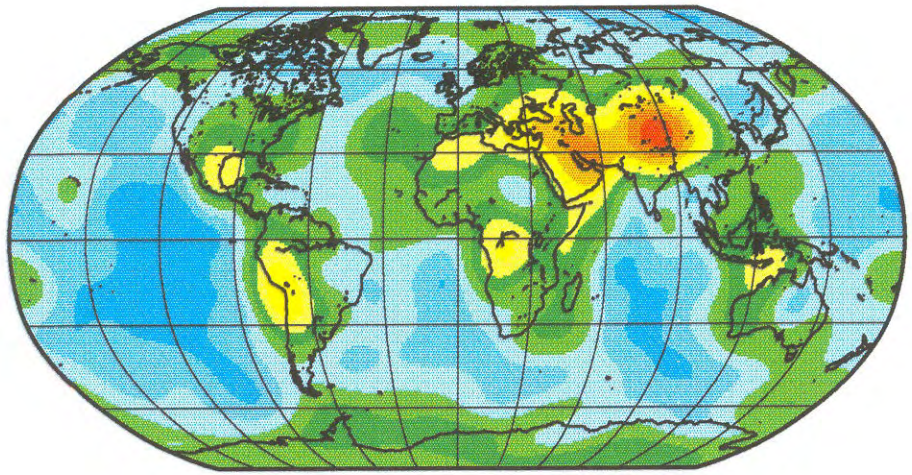
Admittanz: l=22

-18 -12 -6 0 6 12 18



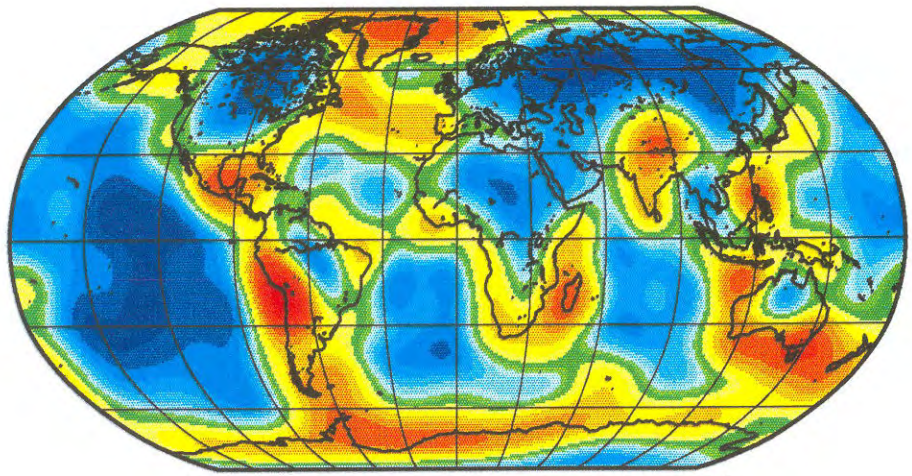
Korrelation: l=22

-1.0 -0.5 0.0 0.5 1.0



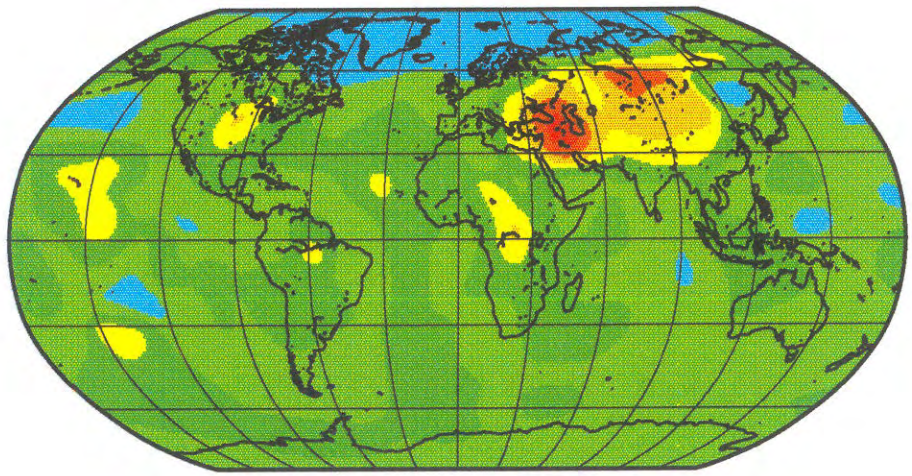
Lokalisation des Geoids: l=23

-12.6 0.0 12.6



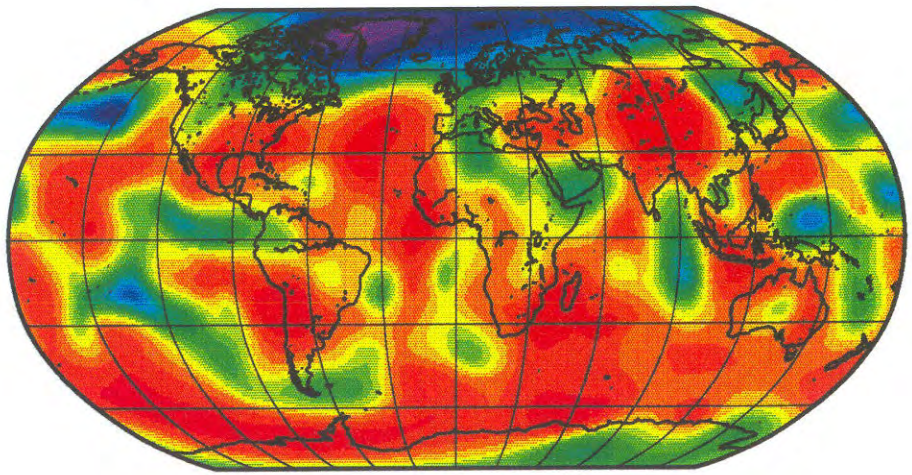
Lokalisation der Topographie: l=23

-1260 0 1260



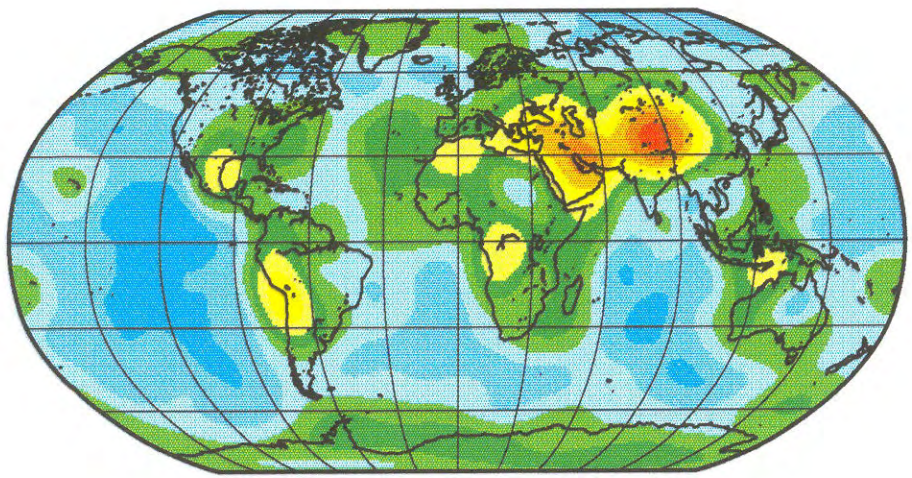
Admittanz: l=23

-18 -12 -6 0 6 12 18



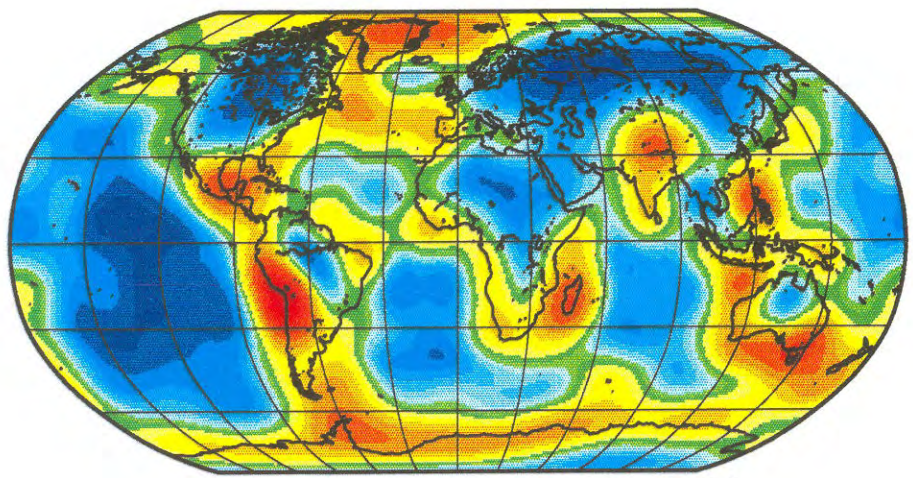
Korrelation: l=23

-1.0 -0.5 0.0 0.5 1.0



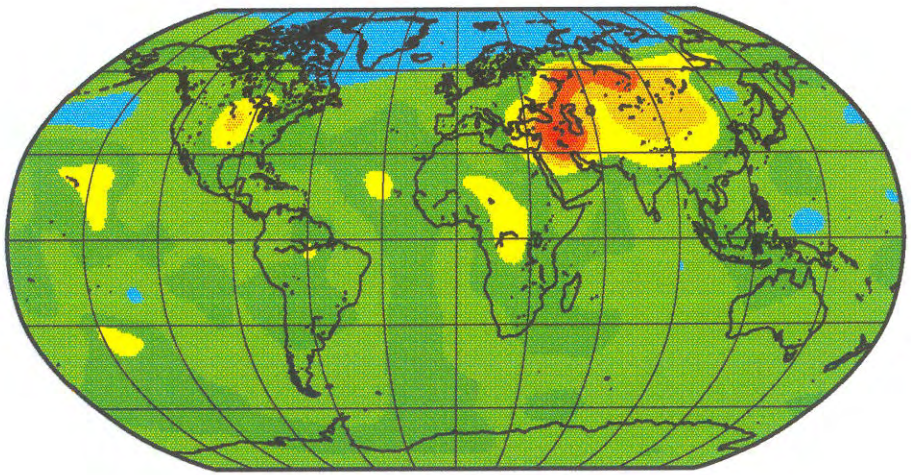
Lokalisation des Geoids: l=24

-12.6 0.0 12.6



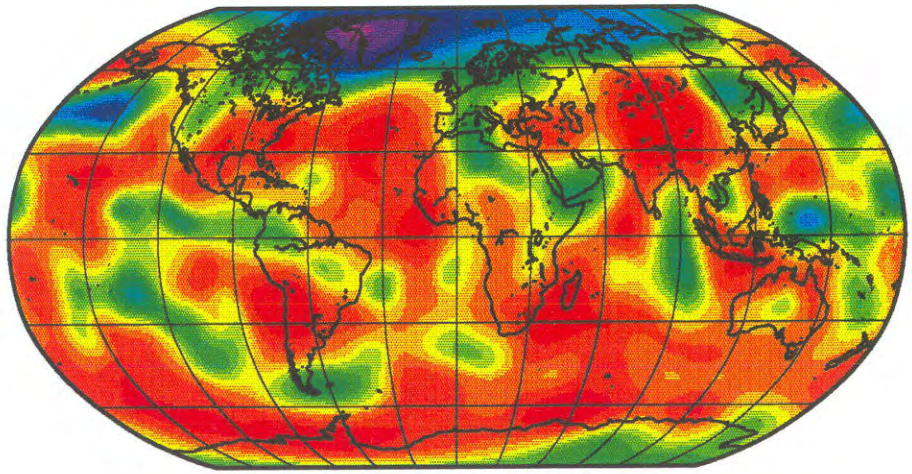
Lokalisation der Topographie: l=24

-1260 0 1260



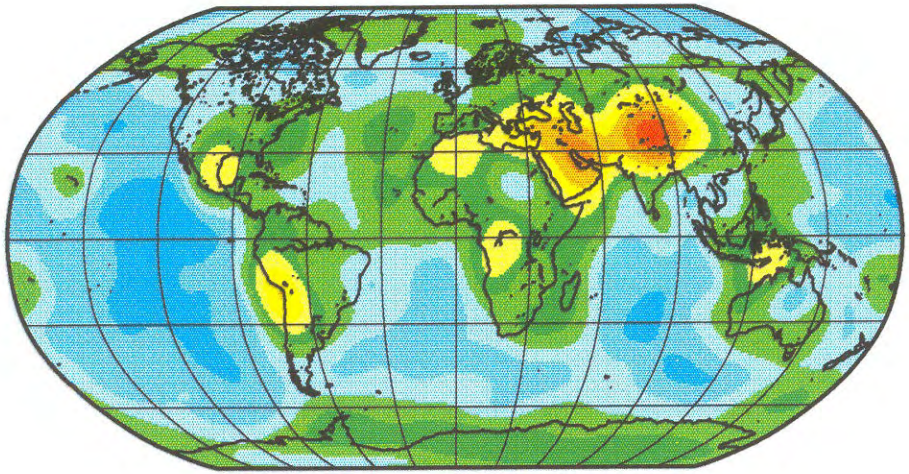
Admittanz: l=24

-18 -12 -6 0 6 12 18



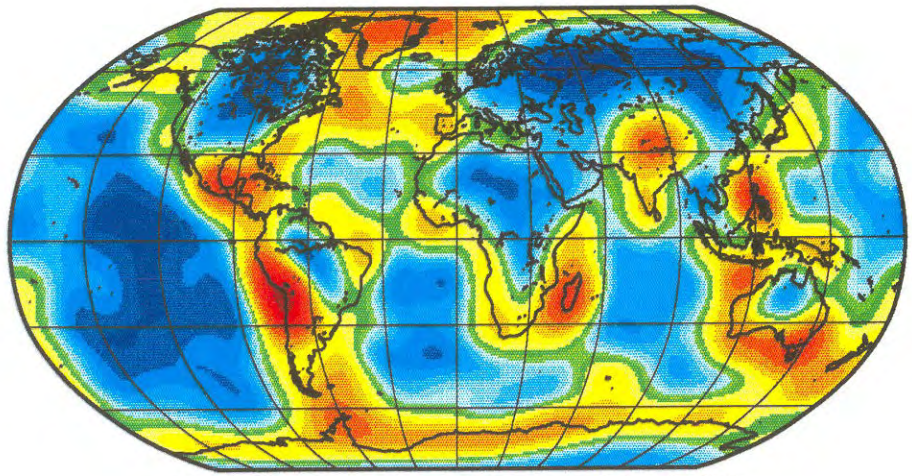
Korrelation: l=24

-1.0 -0.5 0.0 0.5 1.0



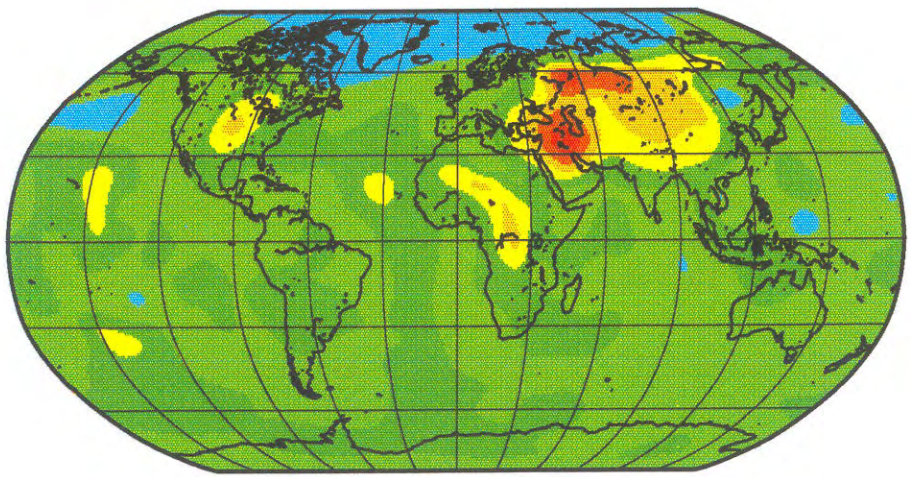
Lokalisation des Geoids: l=25

-12.6 0.0 12.6



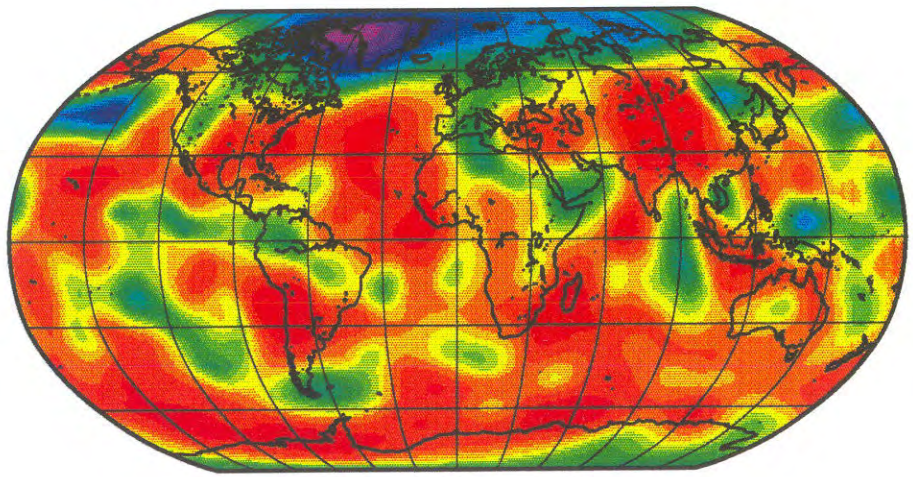
Lokalisation der Topographie: l=25

-1260 0 1260



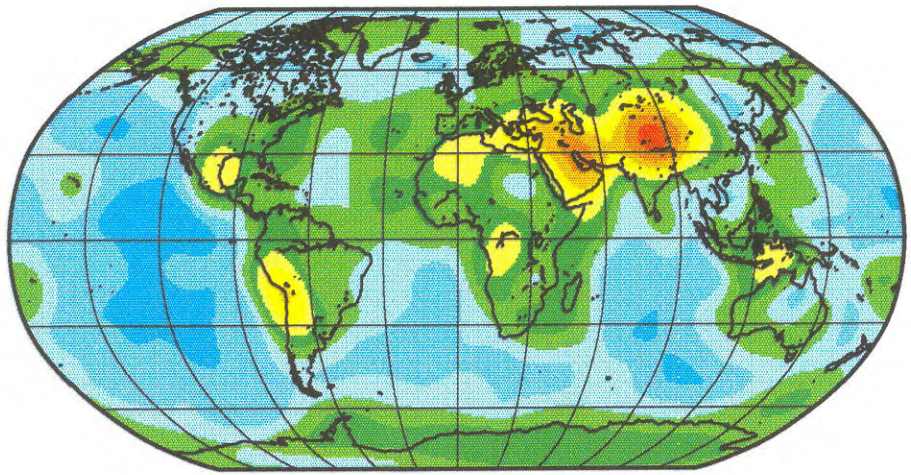
Admittanz: l=25

-18 -12 -6 0 6 12 18



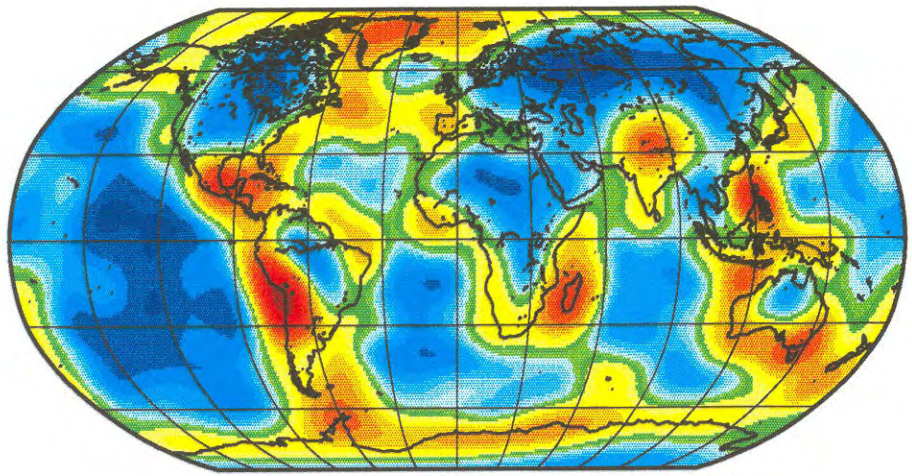
Korrelation: l=25

-1.0 -0.5 0.0 0.5 1.0



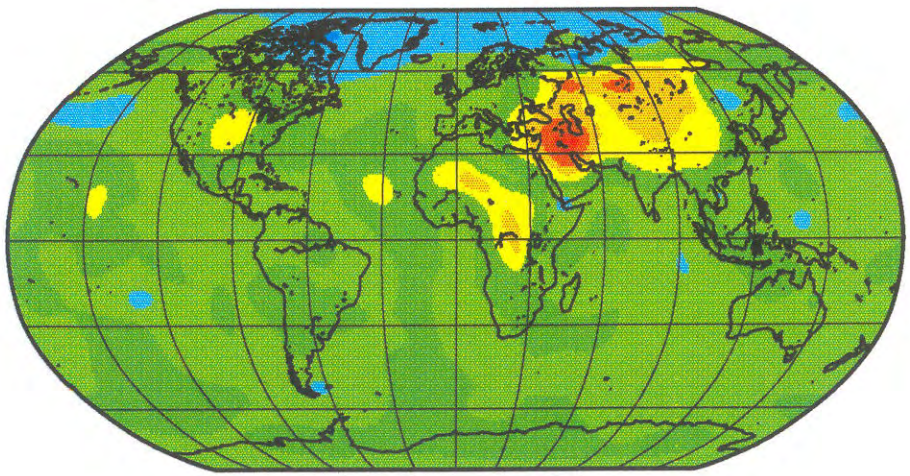
Lokalisation des Geoids: l=26

-12.6 0.0 12.6



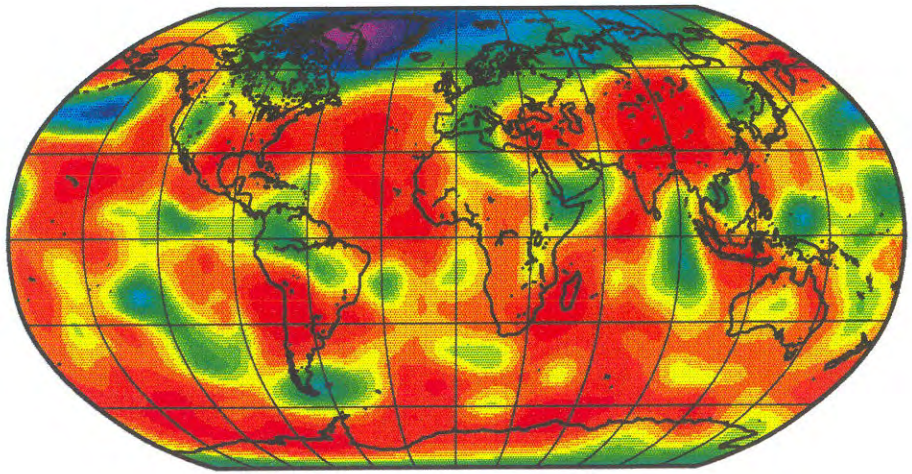
Lokalisation der Topographie: l=26

-1260 0 1260



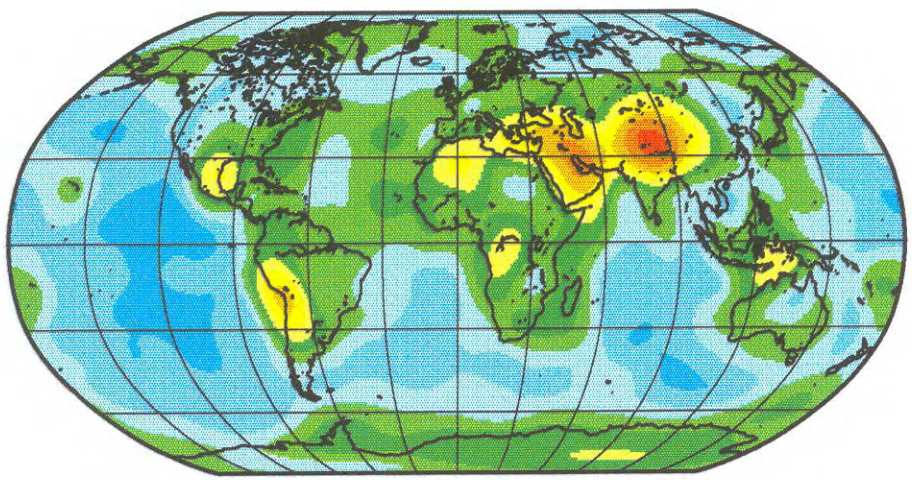
Admittanz: l=26

-18 -12 -6 0 6 12 18



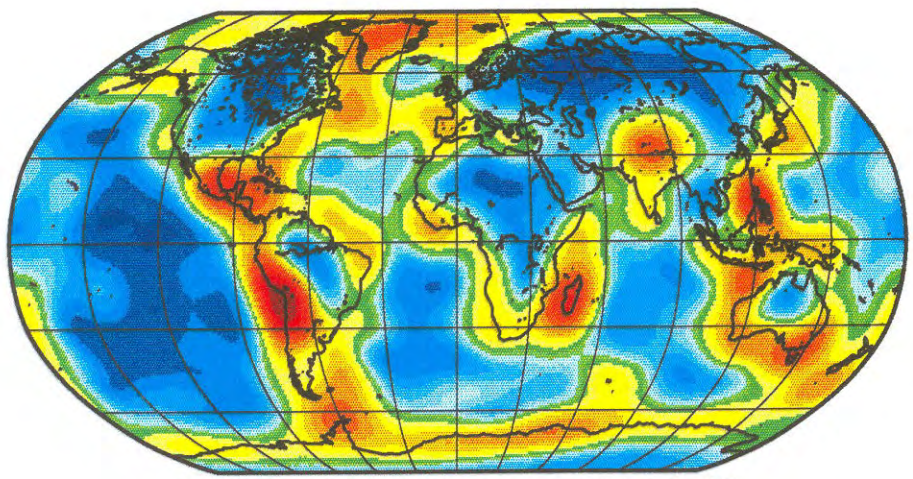
Korrelation: l=26

-1.0 -0.5 0.0 0.5 1.0



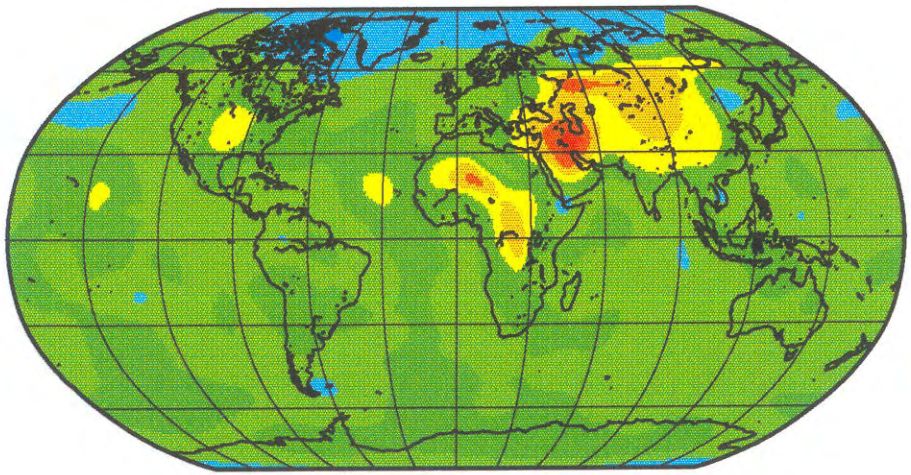
Lokalisation des Geoids: l=27

-12.6 0.0 12.6



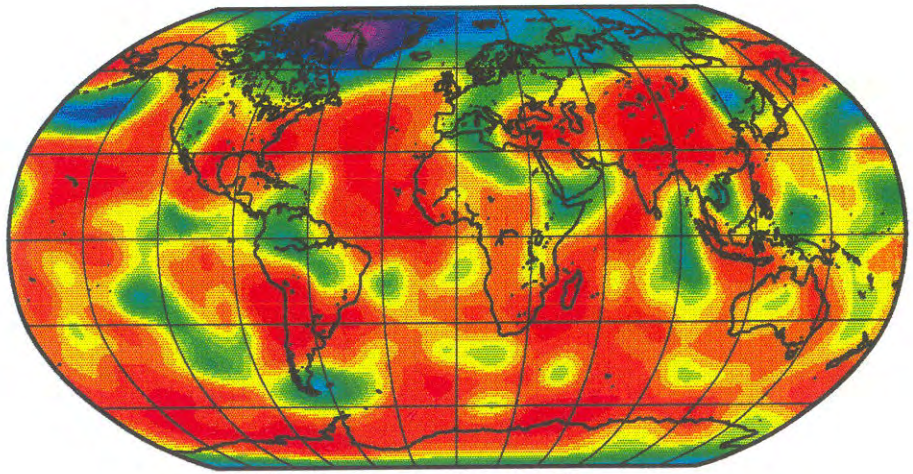
Lokalisation der Topographie: l=27

-1260 0 1260



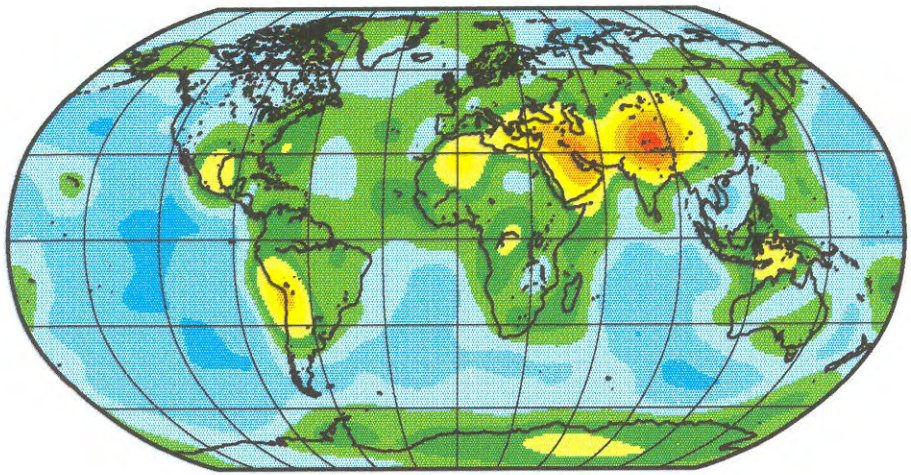
Admittanz: l=27

-18 -12 -6 0 6 12 18

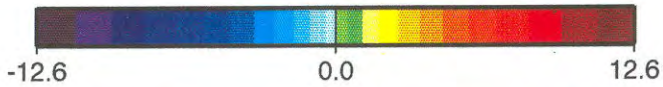


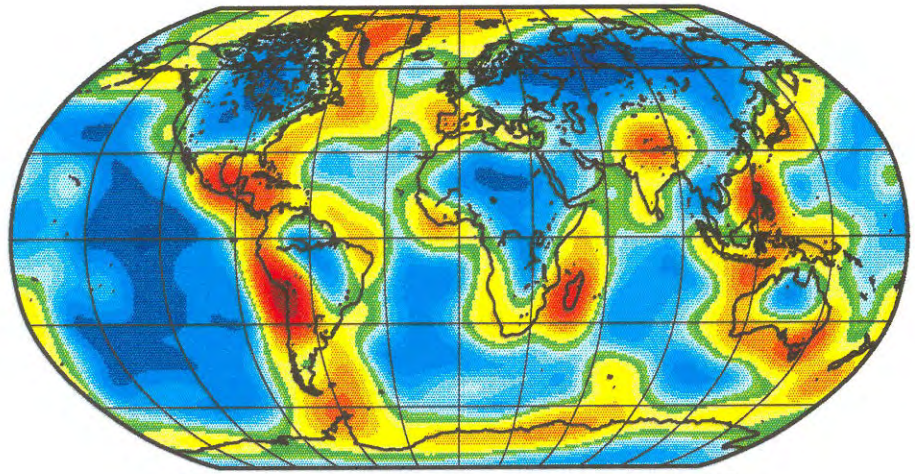
Korrelation: l=27

-1.0 -0.5 0.0 0.5 1.0

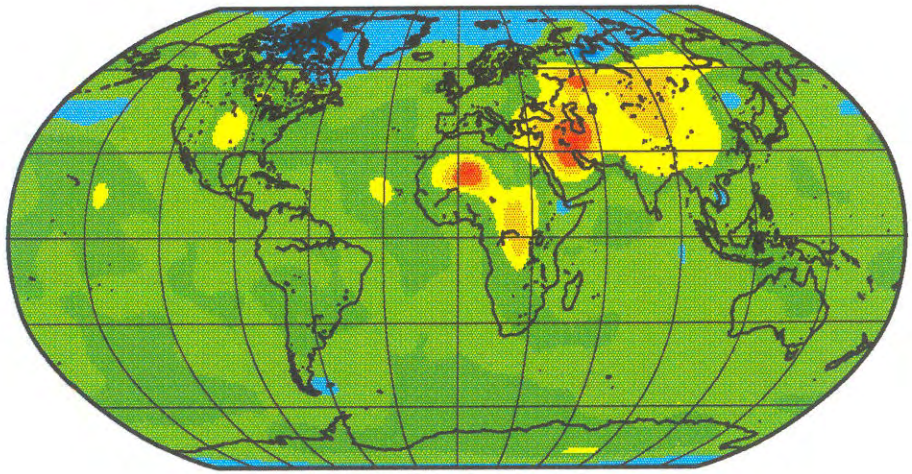


Lokalisation des Geoids: l=28

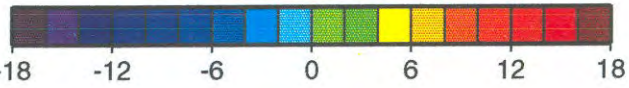


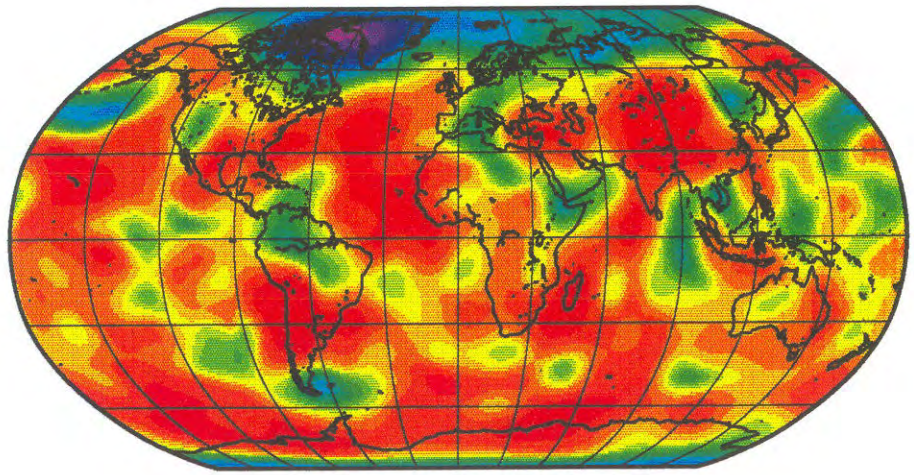


Lokalisation der Topographie: l=28

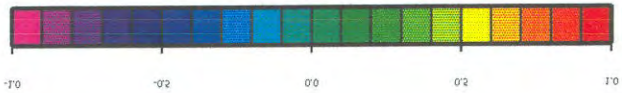


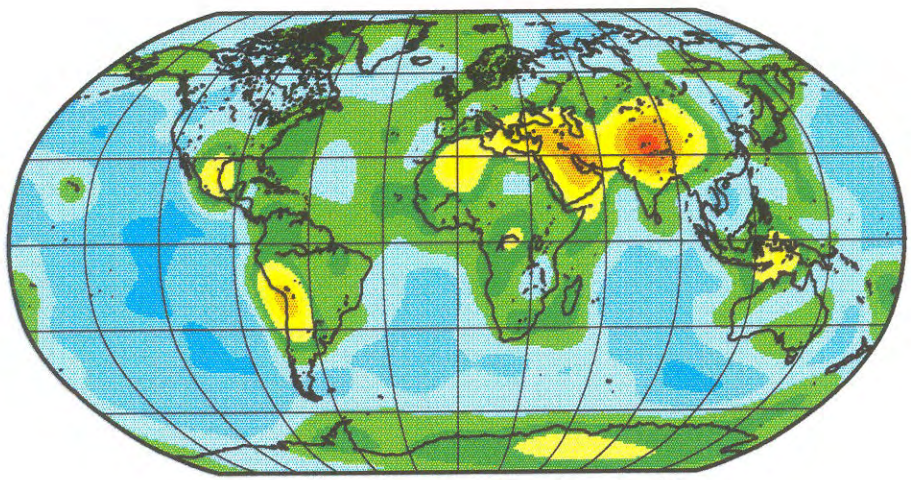
Admittanz: l=28





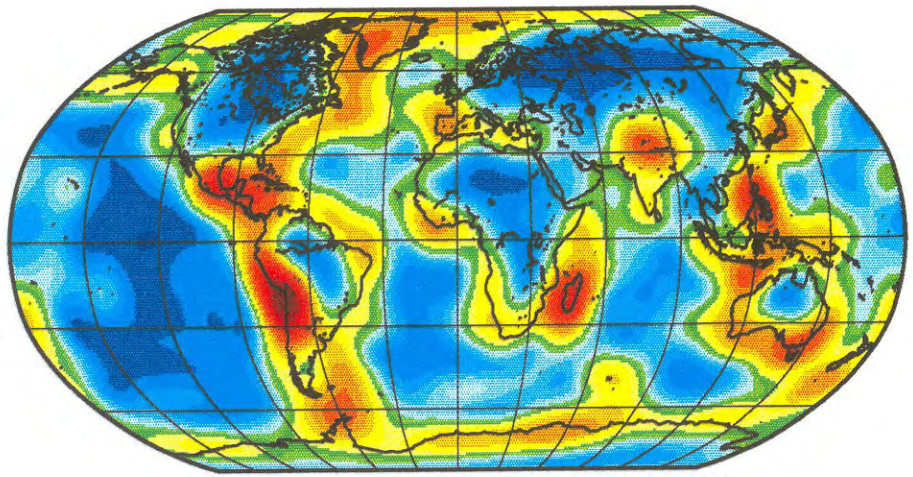
Korrelation: l=28





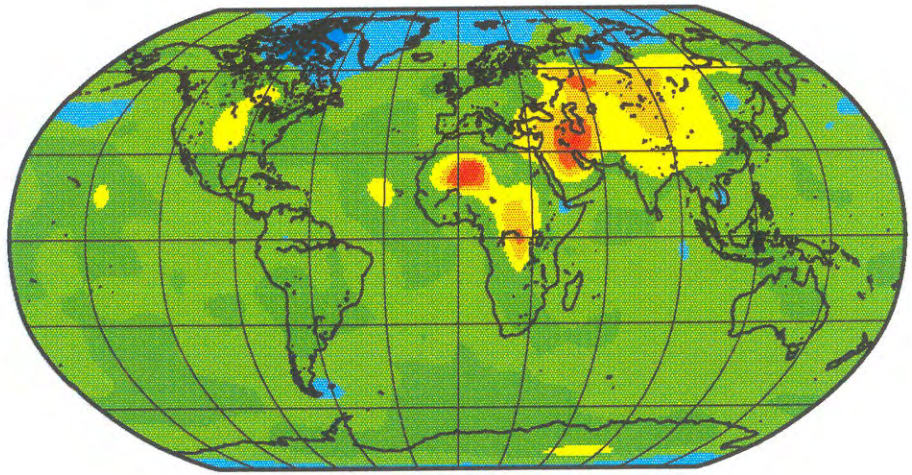
Lokalisation des Geoids: l=29

-12.6 0.0 12.6



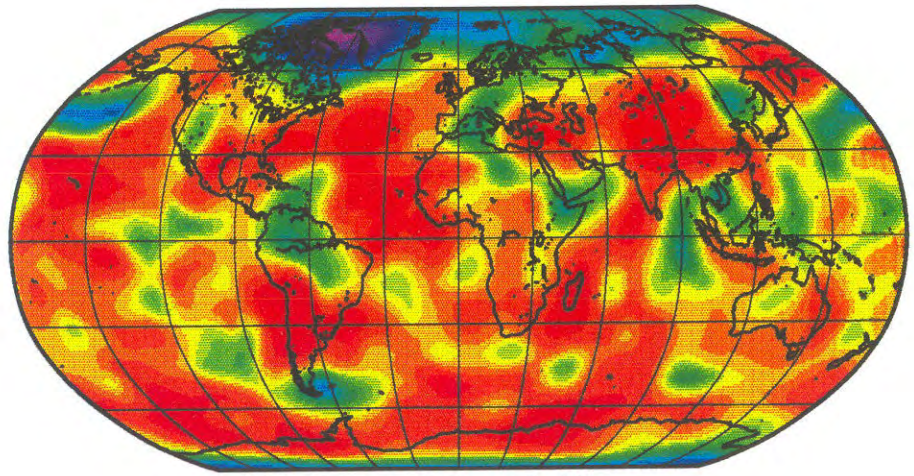
Lokalisation der Topographie: l=29

-1260 0 1260



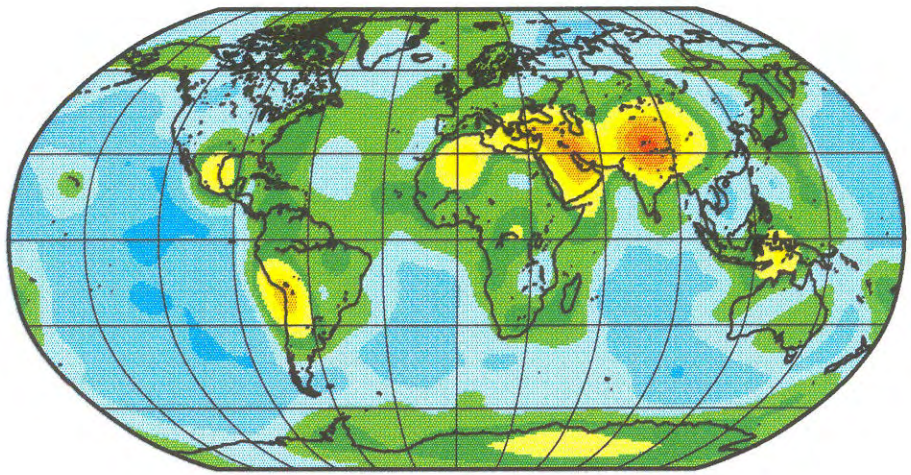
Admittanz: l=29

-18 -12 -6 0 6 12 18



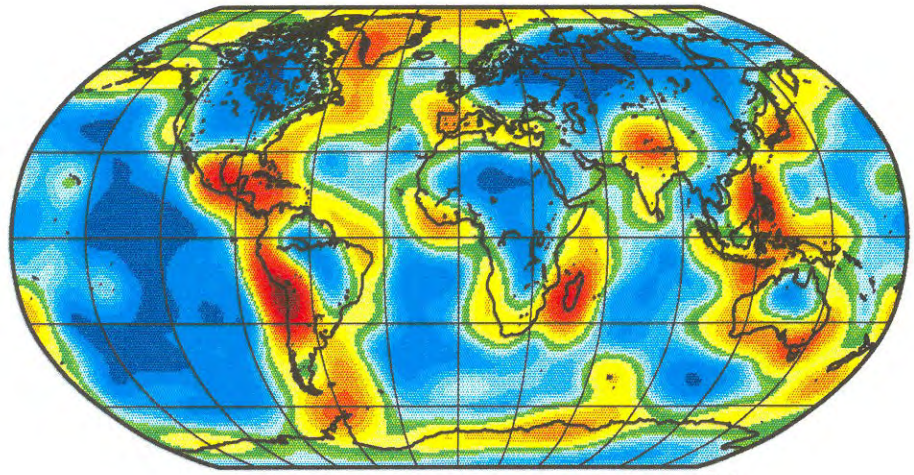
Korrelation: l=29

-1.0 -0.5 0.0 0.5 1.0



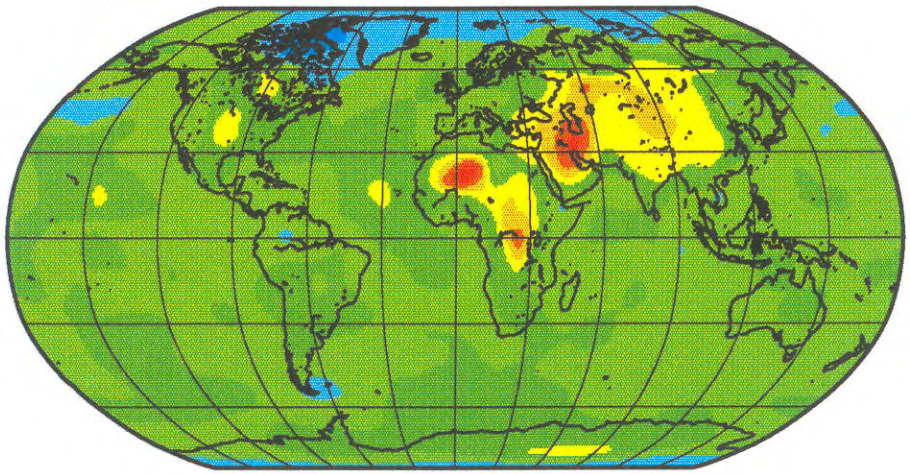
Lokalisation des Geoids: l=30

-12.6 0.0 12.6



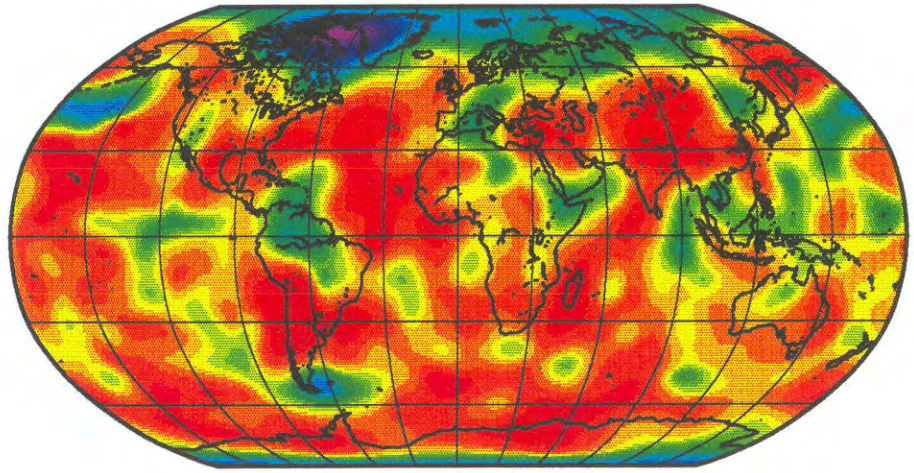
Lokalisation der Topographie: l=30

-1260 0 1260



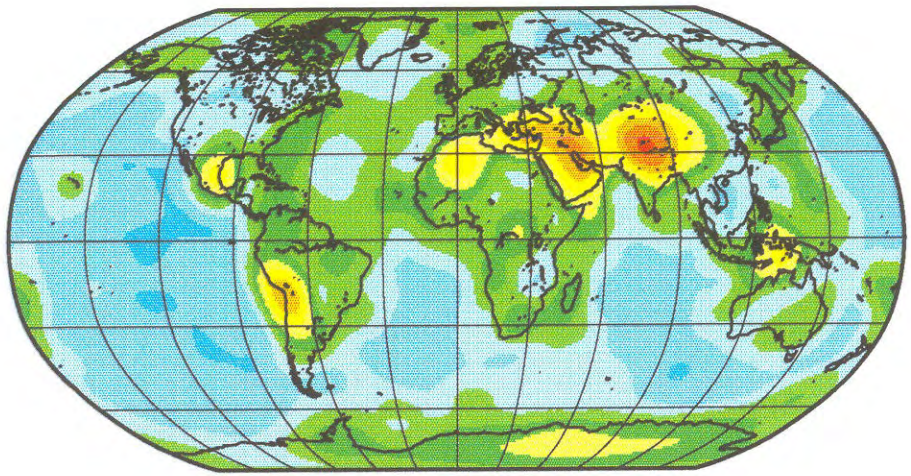
Admittanz: l=30

-18 -12 -6 0 6 12 18



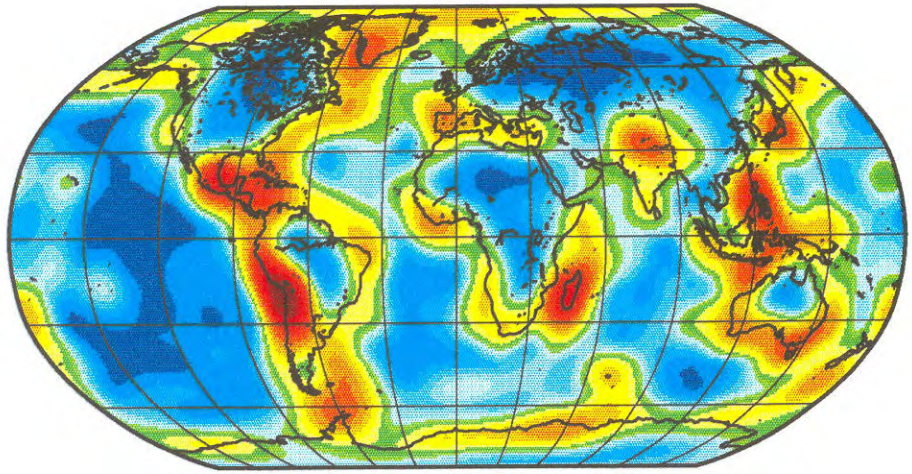
Korrelation: l=30

-1.0 -0.5 0.0 0.5 1.0



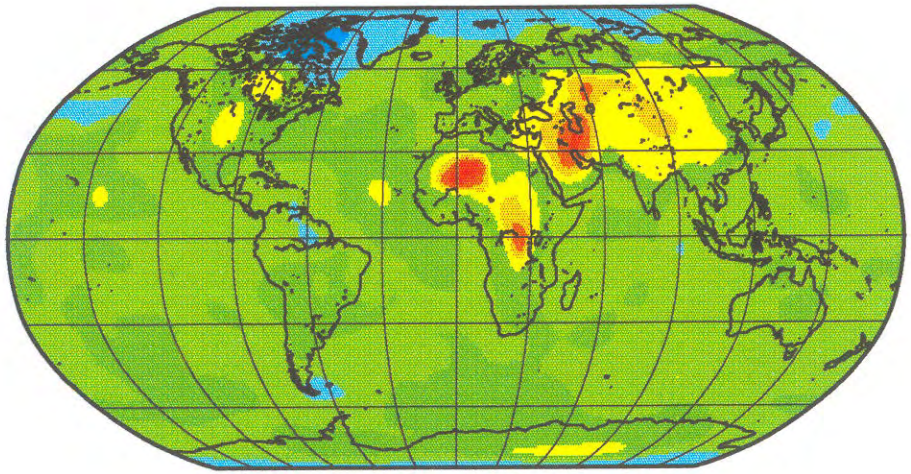
Lokalisation des Geoids: l=31

-12.6 0.0 12.6



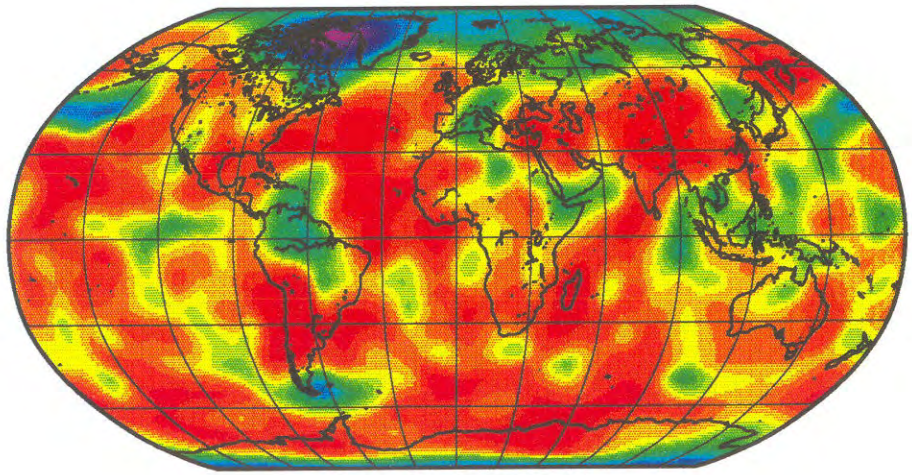
Lokalisation der Topographie: l=31

-1260 0 1260



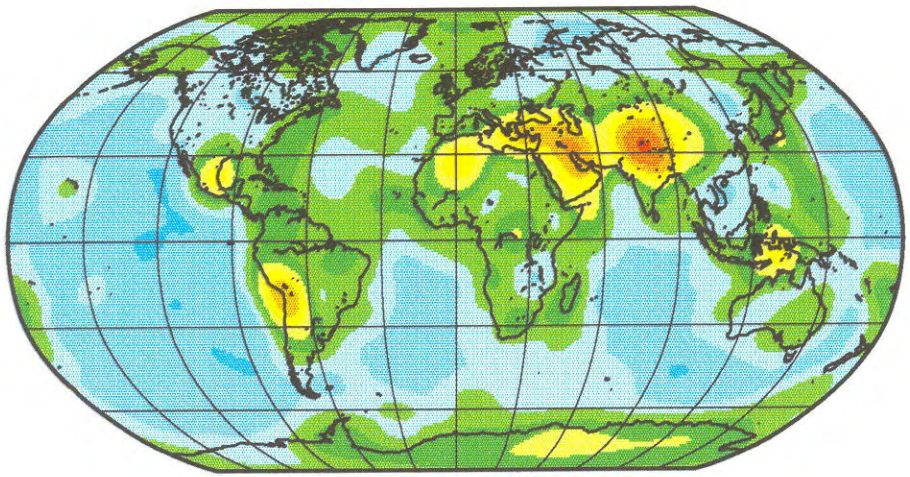
Admittanz: l=31

-18 -12 -6 0 6 12 18



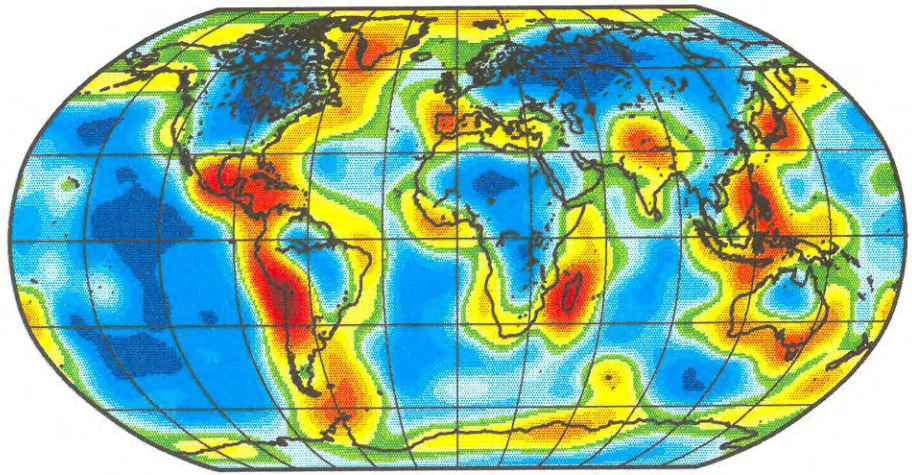
Korrelation: l=31

-1.0 -0.5 0.0 0.5 1.0



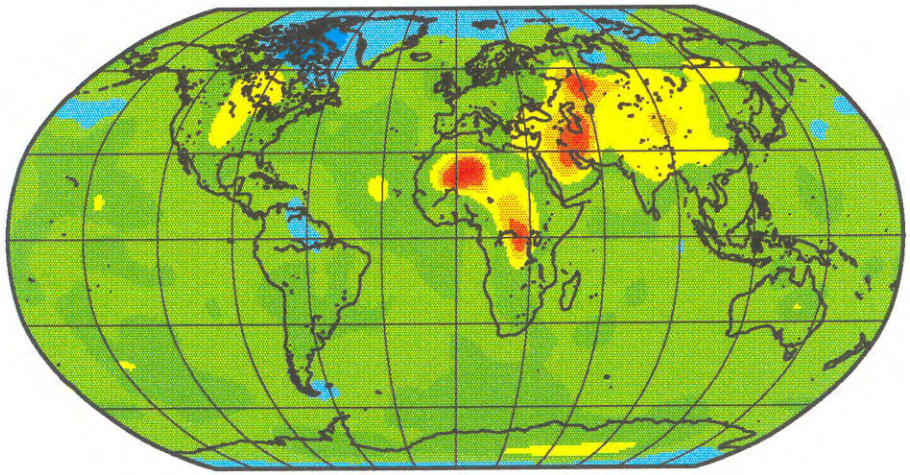
Lokalisation des Geoids: l=32

-12.6 0.0 12.6



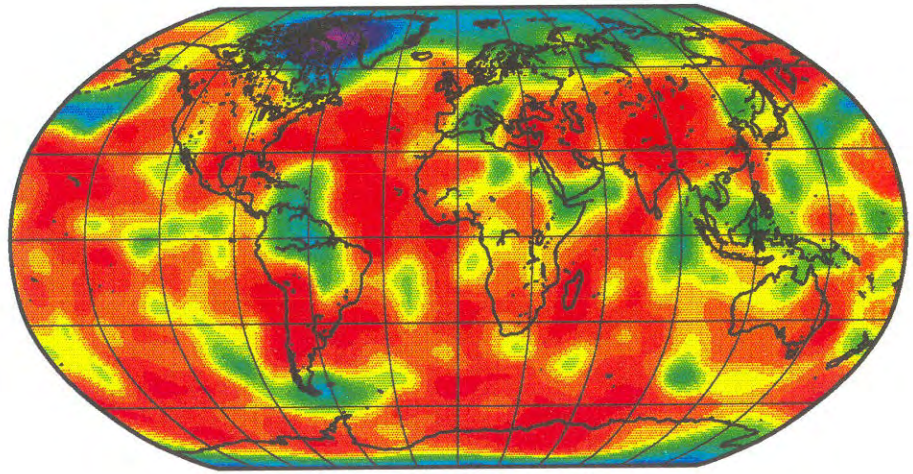
Lokalisation der Topographie: l=32

-1260 0 1260



Admittanz: l=32

-18 -12 -6 0 6 12 18



Korrelation: l=32

-1.0 -0.5 0.0 0.5 1.0