

**TESTS AN DER GESCHLOSSENEN LÖSUNG DES
„TWIN P4P-PROBLEMS“:
DREIDIMENSIONALER
VORWÄRTS- UND RÜCKWÄRTSSCHNITT**

**STUDIENARBEIT VON
FRANZISKA WILD**

– Geodätisches Institut der Universität Stuttgart –

Betreuung

Prof. Dr.-Ing.habil. Dr.tech.h.c.mult Dr.-Ing.E.h.mult

Erik W. Grafarend

Dr.-Ing. Joseph L. Awange

2001

Inhalt:

1. Problemstellung	3
2. Problemlösung	3
2-1. Bündelblockausgleichung.....	3
2-2. Geschlossene Lösung des „twin P4P-Problems“	6
2-21. P4P.....	7
2-22. Möbius Baryzentrische Koordinaten	8
2-23. Rückwärtsschnitt	9
2-24. Vorwärtsschnitt.....	18
2-3. Programm-/Datenanalyse	23
3. Validierung zweier Verfahren	23
4. Ausblick	30
Literaturverzeichnis	
Anhang A Datensatz	
Anhang B Matlab-Programme	

1. Problemstellung

In der Geodäsie und Photogrammetrie sowie im Maschinen-/Computerbereich haben massenweise 3D-Punktbestimmungen eine große Bedeutung. Nämlich überall dort, wo Bilder aufgenommen wurden, aus denen die Orientierungselemente der Bilder bzw. die Koordinaten X , Y , Z diskreter Punkte mittels Passpunkten bestimmt werden sollen. Eine Alternative zur traditionellen linearisierten Methode der Aerotriangulation (photogrammetrische Triangulation mit Luftbildern) der Bündelblockausgleichung stellt das Verfahren von E. Grafarend, J. Shan (1997a, b) dar, das mittels Möbius baryzentrischer Koordinaten das Problem löst. Es hat den Vorteil, dass man ohne Linearisierung der äußeren Orientierungselemente auskommt sowie die Koordinaten der Projektionszentren nicht konkret bestimmen muss.

Diese Studienarbeit wendet den Algorithmus von E. Grafarend, J. Shan (1997a, b), der auch als geschlossene Lösung des „twin P4P“ (twin perspective 4 point) bezeichnet wird, am Beispiel eines Datensatzes an.

In den Grundzügen soll erläutert werden, wie das mathematische Modell der Bündelblockausgleichung aussieht, was unter dem „P4P-Problem“ zu verstehen ist und welche Bedeutung Möbius baryzentrische Koordinaten haben. Auch soll gezeigt werden, welche Daten zur Verfügung stehen. Des Weiteren soll ein Berechnungsschema angegeben werden, mit dessen Hilfe Schritt für Schritt der Weg der Berechnung der Objektkoordinaten, aufgeteilt in Rückwärtsschnitt und Vorwärtsschnitt, nachvollzogen werden kann. Anschließend sollen die Verfahren auf ihre Richtigkeit geprüft werden.

2. Problemlösung

2-1. Bündelblockausgleichung

Bei der Bündelblockausgleichung (zum Beispiel K. Kraus (1997), E. Grafarend (1983)) wird auf rechnerische Weise der Zusammenhang zwischen den Bildkoordinaten und den Objektkoordinaten für einen streifen- oder blockförmigen Bildverband mit mindestens 60% Längs- und 20% Querüberdeckung hergestellt.

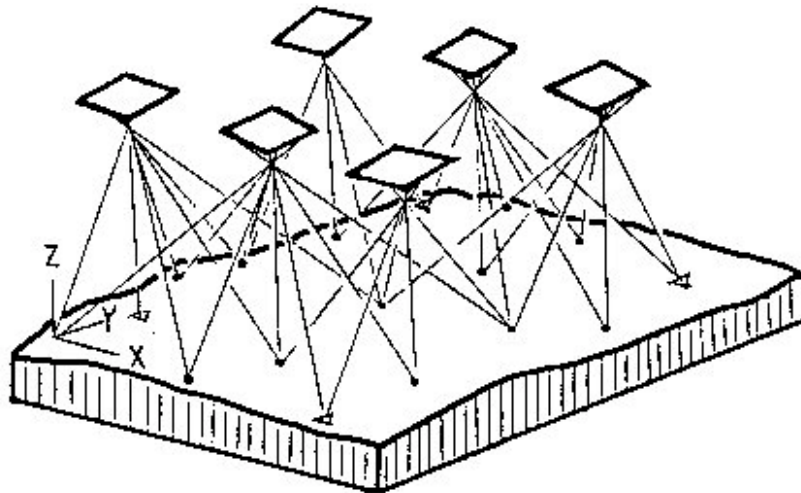


Abbildung 1: Grundprinzip der Bündelblockausgleichung, Kraus (1997)

Das Grundprinzip ist in Abbildung 1 veranschaulicht. Die Bildkoordinaten und die Projektionszentren definieren räumliche Strahlenbündel, deren äußere Orientierungselemente (Lage des Projektionszentrums, 3 Orientierungswinkel) für alle Bilder gleichzeitig bestimmt werden. Als Informationsquellen stehen die Bildkoordinaten der Verknüpfungspunkte und die Bildkoordinaten und terrestrischen Koordinaten der Passpunkte zur Verfügung. Das Ausgleichsprinzip kann deshalb wie folgt formuliert werden: Die Strahlenbündel werden solange verschoben und gedreht bis entsprechende Strahlen an Verknüpfungspunkten gut zum Schnitt kommen bzw. mit den Passpunkten gut zusammentreffen.

Der mathematische Zusammenhang zwischen den Bild- und den übergeordneten Objektkoordinaten (Landeskoordinaten) wird durch die Kollinearitätsbeziehung beschrieben, was in Abbildung 2 veranschaulicht ist.

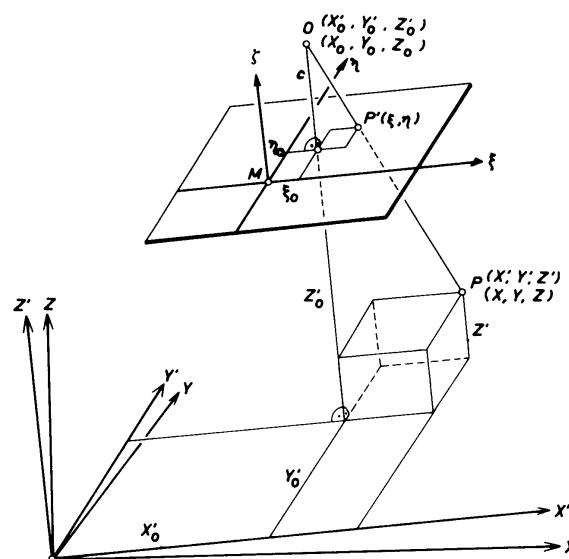


Abbildung 2: Kollinearitätsbeziehung, Kraus (1997)

Die Kollinearitätsgleichungen lauten:

$$\xi_i' = \xi_0' - c \cdot \frac{r_{11} \cdot (X_i - X_0) + r_{21} \cdot (Y_i - Y_0) + r_{31} \cdot (Z_i - Z_0)}{r_{13} \cdot (X_i - X_0) + r_{23} \cdot (Y_i - Y_0) + r_{33} \cdot (Z_i - Z_0)} = \xi_0' - c \cdot \frac{Z_{\xi_i}}{N_i}$$

$$\eta_i' = \eta_0' - c \cdot \frac{r_{12} \cdot (X_i - X_0) + r_{22} \cdot (Y_i - Y_0) + r_{32} \cdot (Z_i - Z_0)}{r_{13} \cdot (X_i - X_0) + r_{23} \cdot (Y_i - Y_0) + r_{33} \cdot (Z_i - Z_0)} = \eta_0' - c \cdot \frac{Z_{\eta_i}}{N_i}$$

, wobei die r_{ij} Elemente einer 3x3 Rotationsmatrix R sind:

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}_{\omega, \varphi, \kappa}$$

Um eine Kleinste-Quadrate-Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen von den nichtlinearen Gleichungen durchführen zu können, braucht man folgende Differentialquotienten, die hier in der Verbesserungs- bzw. Inkonsistenzgleichung aufgelistet sind:

$$i_{\xi j} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial X_{0j}} \right)_0 \cdot dX_{0j} + \left(\frac{\partial \xi}{\partial Y_{0j}} \right)_0 \cdot dY_{0j} + \left(\frac{\partial \xi}{\partial Z_{0j}} \right)_0 \cdot dZ_{0j}$$

$$+ \left(\frac{\partial \xi}{\partial \omega_j} \right)_0 \cdot d\omega_j + \left(\frac{\partial \xi}{\partial \varphi_j} \right)_0 \cdot d\varphi_j + \left(\frac{\partial \xi}{\partial \kappa_j} \right)_0 \cdot d\kappa_j$$

$$+ \left(\frac{\partial \xi}{\partial X_i} \right)_0 \cdot dX_i + \left(\frac{\partial \xi}{\partial Y_i} \right)_0 \cdot dY_i + \left(\frac{\partial \xi}{\partial Z_i} \right)_0 \cdot dZ_i - (\bar{\xi}_{ij} - \xi_{ij}^0)$$

Jeder gemessene Bildpunkt liefert zwei Verbesserungsgleichungen mit den unbekannt sechs Elementen der äußeren Orientierung des Bildes j und den drei Landeskoordinaten des Punktes i. Die Differentialquotienten sind mit Hilfe von Näherungswerten auszuwerten.

Die weitere Lösung erfolgt iterativ nach dem „linearisierten speziellen Gauß-Markov Modell“ (zum Beispiel: E. Grafarend, B. Schaffrin (1993, S. 92 f.)): Mit

$$E\{y\} = A \cdot \xi \quad \text{1. Moment}$$

$$D\{y\} = V \cdot \sigma^2 \quad \text{2. Moment}$$

und der Schätzung des Typs „V-BLUUE“

(i)	$\hat{\xi} = L \cdot y$	„linear“
(ii)	$E\left\{\hat{\xi}\right\} = \xi$	„gleichmäßig unverzerrt“ $\forall \xi \in R$
(iii)	$trD\left\{\hat{\xi}\right\} = \min_L$	„minimale Varianz“

gilt für den geschätzten Parametervektor $\hat{\xi}$

$$\hat{\xi} = (A^T V^{-1} \cdot A)^{-1} \cdot A^T V^{-1} \cdot y$$

In diesem Fall liefert die Ausgleichung Korrekturen zu den Näherungswerten der äußeren Orientierung sowie zu den Näherungskordinaten der zu bestimmenden Neupunkte.

2-2. Geschlossene Lösung des „twin P4P-Problems“

Ziel des „twin P4P-Problems“ ist die Bestimmung der kartesischen Koordinaten eines Objektpunktes mittels vier Referenzpunkten und einem Stereobildpaar mit Hilfe Möbius baryzentrischer Koordinaten (vgl. Abbildung 3). Erst werden das linke und rechte Projektionszentrum mittels eines Rückwärtsschnittes bestimmt, anschließend wird die Position des Objektpunktes über einen Vorwärtsschnitt mit Hilfe der bekannten Projektionszentren ermittelt.

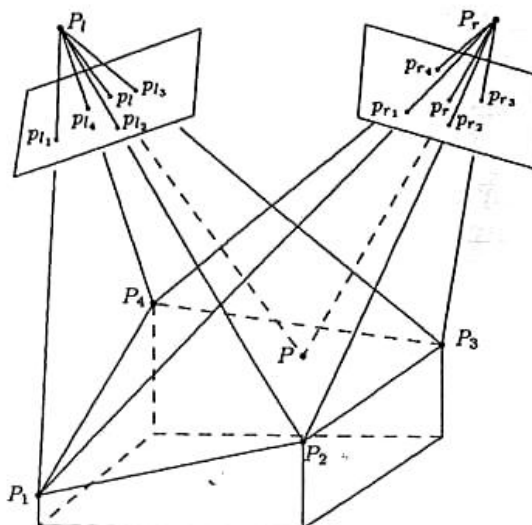


Abbildung 3: Twin P4P, Grafarend, Shan (1997b)

2-21. P4P

Als Ausgangssituation eines „P4P-Problems“ in einer 3-dimensionalen Euklidischen Mannigfaltigkeit $E^3 := \{R^3, g_{\mu\nu}\}$ mit einer Standardmetrik $g_{\mu\nu}$ mit $\mu, \nu \in \{1, 2, 3\}$ werden Richtungen zu einem unbekanntem Punkt $p \in E^3$ von mindestens 4 bekannten Punkten $p_i \in E^3$ mit $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ beobachtet. Das ist gleichbedeutend mit allen möglichen Winkelkombinationen zwischen zwei Einheitsvektoren $\frac{\overrightarrow{pp_i}}{\|\overrightarrow{pp_i}\|}$ und $\frac{\overrightarrow{pp_j}}{\|\overrightarrow{pp_j}\|}$,

deren Zentrum der Punkt p ist. Abbildung 4 zeigt den 5-dimensionalen Simplex.

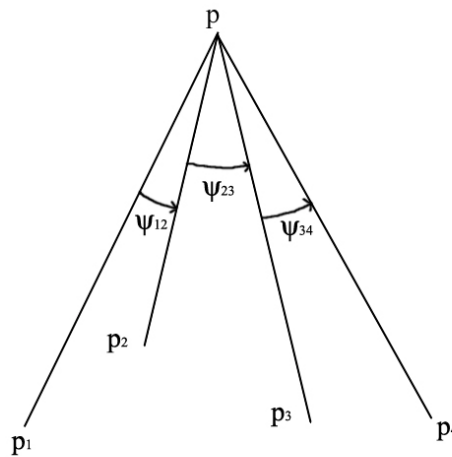


Abbildung 4: P4P, Grafarend, Shan (1997a)

Insgesamt gibt es sechs mögliche Messungen von Raumwinkeln, die als $\cos \Psi_{ij} = \frac{\langle \overrightarrow{pp_i} / \overrightarrow{pp_j} \rangle}{\|\overrightarrow{pp_i}\| \|\overrightarrow{pp_j}\|}$ definiert werden, abhängig von dem inneren Produkt $\langle \overrightarrow{pp_i} / \overrightarrow{pp_j} \rangle$ und der Norm $\|\overrightarrow{pp_i}\|, \|\overrightarrow{pp_j}\|$: $\Psi_{12}, \Psi_{13}, \Psi_{23}, \Psi_{24}, \Psi_{34}, \Psi_{41}$.

Allgemein lässt sich das „P4P-Problem“ bei vier bekannten Punkten $p_i \in E^3$ durch einen unbekanntem Punkt $p \in E^3$ und 6 Winkelmessungen Ψ_{ij} definieren. In der Photogrammetrie entspricht dem Punkt p das Perspektivzentrum der Kamera oder des CCD-Sensors, die Originalmessungen sind die Bildkoordinaten der Punkte $p_i, p_j \in E^3$ mit $i \neq j$, welche in Raumwinkeln wie folgt ausgedrückt werden:

$$\cos \Psi_{ij} = \frac{\bar{x}_i \cdot \bar{x}_j + \bar{y}_i \cdot \bar{y}_j + \bar{z}_i \cdot \bar{z}_j}{\sqrt{\bar{x}_i^2 + \bar{y}_i^2 + \bar{z}_i^2} \cdot \sqrt{\bar{x}_j^2 + \bar{y}_j^2 + \bar{z}_j^2}}$$

$$\cos \Psi_{ij} = \frac{\bar{x}_i \cdot \bar{x}_j + \bar{y}_i \cdot \bar{y}_j + f^2}{\sqrt{\bar{x}_i^2 + \bar{y}_i^2 + f^2} \cdot \sqrt{\bar{x}_j^2 + \bar{y}_j^2 + f^2}}$$

$(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i), (\bar{x}_j, \bar{y}_j, \bar{z}_j)$ stellen die Bildkoordinaten der Punkte p_i und p_j dar, f mit $f = -\bar{z}_i = -\bar{z}_j$ ist die Kamerakonstante bzw. die Brennweite des CCD-Sensor.

2-22. Möbius baryzentrische Koordinaten

Um Möbius baryzentrische Koordinaten der Punkte p_i und p einzuführen, muss erst eine affine Basis $\{\overrightarrow{p_1p_2}, \overrightarrow{p_1p_3}, \overrightarrow{p_1p_4}\}$ oder $\{\underline{x}_2 - \underline{x}_1, \underline{x}_3 - \underline{x}_1, \underline{x}_4 - \underline{x}_1\}$ eingeführt werden, welche invariant gegenüber Translationen ist. In der affinen Basis gelten die Beziehungen $p_1 \sim \underline{x}_1, p_2 \sim \underline{x}_2, p_3 \sim \underline{x}_3, p_4 \sim \underline{x}_4$, wobei $\{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3, \underline{x}_4\}$ Ortsvektoren sind.

Relativ zum Punkt p_1 kann der Punkt p in der affinen Basis als

$$\begin{aligned} \underline{x} - \underline{x}_1 &= (\underline{x}_2 - \underline{x}_1) \cdot \lambda_2 + (\underline{x}_3 - \underline{x}_1) \cdot \lambda_3 + (\underline{x}_4 - \underline{x}_1) \cdot \lambda_4 \\ \underline{x} &= \underline{x}_1 \cdot (1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4) + \underline{x}_2 \cdot \lambda_2 + \underline{x}_3 \cdot \lambda_3 + \underline{x}_4 \cdot \lambda_4 \\ \underline{x} &= \underline{x}_1 \cdot \lambda_1 + \underline{x}_2 \cdot \lambda_2 + \underline{x}_3 \cdot \lambda_3 + \underline{x}_4 \cdot \lambda_4 \\ 1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \end{aligned}$$

dargestellt werden. $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}$ werden als Möbius baryzentrische Koordinaten des Punktes $p \sim \underline{x}$ bezeichnet.

In Matrixdarstellung ergibt sich der Zusammenhang zwischen den kartesischen Koordinaten und baryzentrischen Koordinaten wie folgt:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Die Koordinaten $\{x, y, z, 1\}$ werden auch als homogene Koordinaten bezeichnet.

Eine andere Möglichkeit, die baryzentrischen Koordinaten zu beschreiben, ist die Darstellung mittels Volumina, welche von dem jeweiligen Tetraeder $\{p, p_2, p_3, p_4\}, \{p_1, p, p_3, p_4\}, \dots, \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ aufgespannt werden.

$$\lambda_i = \frac{\Delta_i}{\Lambda} \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\begin{array}{l}
 \Delta_1 = \begin{vmatrix} x & x_2 & x_3 & x_4 \\ y & y_2 & y_3 & y_4 \\ z & z_2 & z_3 & z_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \pm 6 \text{vol}\{p, p_2, p_3, p_4\} \\
 \Delta_2 = \begin{vmatrix} x_1 & x & x_3 & x_4 \\ y_1 & y & y_3 & y_4 \\ z_1 & z & z_3 & z_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \pm 6 \text{vol}\{p_1, p, p_3, p_4\} \\
 \Delta_3 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x & x_4 \\ y_1 & y_2 & y & y_4 \\ z_1 & z_2 & z & z_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \pm 6 \text{vol}\{p_1, p_2, p, p_4\} \\
 \Delta_4 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x \\ y_1 & y_2 & y_3 & y \\ z_1 & z_2 & z_3 & z \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \pm 6 \text{vol}\{p_1, p_2, p_3, p\} \\
 \Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \pm 6 \text{vol}\{p_1, p_2, p_3, p_4\}
 \end{array}$$

2-23. Rückwärtsschnitt

Die unbekannte Position des Punktes $p \sim (x, y, z)$, der dem Projektionszentrum entspricht, ist hinsichtlich der affinen Basis $\{\underline{x}_2 - \underline{x}_1, \underline{x}_3 - \underline{x}_1, \underline{x}_4 - \underline{x}_1\}$ in Möbius baryzentrischen Koordinaten $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}$ mit der Nebenbedingung $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1$ darstellbar:

$$(x, y, z) \Rightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$$

Die Idee dieser Transformation besteht darin, die baryzentrischen Koordinaten

$\lambda_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$ in Form der beobachteten Raumwinkel Ψ_{ij} mit Hilfe der Techni-

ken der analytischen Geometrie auszudrücken, was jetzt im folgenden durchgeführt wird.

Das Volumenelement $\pm 6\text{vol}\{p, p_2, p_3, p_4\}$ lässt sich als Projektion des Vektorprodukts

$\overrightarrow{pp_3} \cdot \overrightarrow{pp_4}$ auf $\overrightarrow{pp_2}$ darstellen, was konkret bedeutet:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \pm 6\text{vol}\{p, p_2, p_3, p_4\} = \left\langle \overrightarrow{pp_2} \left| \overrightarrow{pp_3} * \overrightarrow{pp_4} \right. \right\rangle = \langle (\underline{x}_2 - \underline{x}) | (\underline{x}_3 - \underline{x}) * (\underline{x}_4 - \underline{x}) \rangle \\ \Delta_2 &= \pm 6\text{vol}\{p_1, p, p_3, p_4\} = \left\langle \overrightarrow{pp_1} \left| \overrightarrow{pp_3} * \overrightarrow{pp_4} \right. \right\rangle = \langle (\underline{x}_1 - \underline{x}) | (\underline{x}_3 - \underline{x}) * (\underline{x}_4 - \underline{x}) \rangle \\ \Delta_3 &= \pm 6\text{vol}\{p_1, p_2, p, p_4\} = \left\langle \overrightarrow{pp_1} \left| \overrightarrow{pp_2} * \overrightarrow{pp_4} \right. \right\rangle = \langle (\underline{x}_1 - \underline{x}) | (\underline{x}_2 - \underline{x}) * (\underline{x}_4 - \underline{x}) \rangle \\ \Delta_4 &= \pm 6\text{vol}\{p_1, p_2, p_3, p\} = \left\langle \overrightarrow{pp_1} \left| \overrightarrow{pp_2} * \overrightarrow{pp_3} \right. \right\rangle = \langle (\underline{x}_1 - \underline{x}) | (\underline{x}_2 - \underline{x}) * (\underline{x}_3 - \underline{x}) \rangle \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Lagrange'schen Identität, erhält man die Cramer Determinante für

$\Delta_1^2, \Delta_2^2, \Delta_3^2, \Delta_4^2$:

$$\begin{aligned} \Delta_1^2 &= (\pm 6\text{vol}\{p, p_2, p_3, p_4\})^2 = \begin{vmatrix} \langle (\underline{x}_2 - \underline{x}) | \underline{x}_2 - \underline{x} \rangle & \langle (\underline{x}_2 - \underline{x}) | \underline{x}_3 - \underline{x} \rangle & \langle (\underline{x}_2 - \underline{x}) | \underline{x}_4 - \underline{x} \rangle \\ \langle (\underline{x}_3 - \underline{x}) | \underline{x}_2 - \underline{x} \rangle & \langle (\underline{x}_3 - \underline{x}) | \underline{x}_3 - \underline{x} \rangle & \langle (\underline{x}_3 - \underline{x}) | \underline{x}_4 - \underline{x} \rangle \\ \langle (\underline{x}_4 - \underline{x}) | \underline{x}_2 - \underline{x} \rangle & \langle (\underline{x}_4 - \underline{x}) | \underline{x}_3 - \underline{x} \rangle & \langle (\underline{x}_4 - \underline{x}) | \underline{x}_4 - \underline{x} \rangle \end{vmatrix} \\ \Delta_2^2 &= (\pm 6\text{vol}\{p_1, p, p_3, p_4\})^2 = \begin{vmatrix} \langle (\underline{x}_1 - \underline{x}) | \underline{x}_1 - \underline{x} \rangle & \langle (\underline{x}_1 - \underline{x}) | \underline{x}_3 - \underline{x} \rangle & \langle (\underline{x}_1 - \underline{x}) | \underline{x}_4 - \underline{x} \rangle \\ \langle (\underline{x}_3 - \underline{x}) | \underline{x}_1 - \underline{x} \rangle & \langle (\underline{x}_3 - \underline{x}) | \underline{x}_3 - \underline{x} \rangle & \langle (\underline{x}_3 - \underline{x}) | \underline{x}_4 - \underline{x} \rangle \\ \langle (\underline{x}_4 - \underline{x}) | \underline{x}_1 - \underline{x} \rangle & \langle (\underline{x}_4 - \underline{x}) | \underline{x}_3 - \underline{x} \rangle & \langle (\underline{x}_4 - \underline{x}) | \underline{x}_4 - \underline{x} \rangle \end{vmatrix} \\ \Delta_3^2 &= (\pm 6\text{vol}\{p_1, p_2, p, p_4\})^2 = \begin{vmatrix} \langle (\underline{x}_1 - \underline{x}) | \underline{x}_1 - \underline{x} \rangle & \langle (\underline{x}_1 - \underline{x}) | \underline{x}_2 - \underline{x} \rangle & \langle (\underline{x}_1 - \underline{x}) | \underline{x}_4 - \underline{x} \rangle \\ \langle (\underline{x}_2 - \underline{x}) | \underline{x}_1 - \underline{x} \rangle & \langle (\underline{x}_2 - \underline{x}) | \underline{x}_2 - \underline{x} \rangle & \langle (\underline{x}_2 - \underline{x}) | \underline{x}_4 - \underline{x} \rangle \\ \langle (\underline{x}_4 - \underline{x}) | \underline{x}_1 - \underline{x} \rangle & \langle (\underline{x}_4 - \underline{x}) | \underline{x}_2 - \underline{x} \rangle & \langle (\underline{x}_4 - \underline{x}) | \underline{x}_4 - \underline{x} \rangle \end{vmatrix} \\ \Delta_4^2 &= (\pm 6\text{vol}\{p_1, p_2, p_3, p\})^2 = \begin{vmatrix} \langle (\underline{x}_1 - \underline{x}) | \underline{x}_1 - \underline{x} \rangle & \langle (\underline{x}_1 - \underline{x}) | \underline{x}_2 - \underline{x} \rangle & \langle (\underline{x}_1 - \underline{x}) | \underline{x}_3 - \underline{x} \rangle \\ \langle (\underline{x}_2 - \underline{x}) | \underline{x}_1 - \underline{x} \rangle & \langle (\underline{x}_2 - \underline{x}) | \underline{x}_2 - \underline{x} \rangle & \langle (\underline{x}_2 - \underline{x}) | \underline{x}_3 - \underline{x} \rangle \\ \langle (\underline{x}_3 - \underline{x}) | \underline{x}_1 - \underline{x} \rangle & \langle (\underline{x}_3 - \underline{x}) | \underline{x}_2 - \underline{x} \rangle & \langle (\underline{x}_3 - \underline{x}) | \underline{x}_3 - \underline{x} \rangle \end{vmatrix} \end{aligned}$$

bzw.

$$\Delta_1^2 = \begin{vmatrix} \overrightarrow{PP_2} \cdot \overrightarrow{PP_2} & \overrightarrow{PP_2} \cdot \overrightarrow{PP_3} & \overrightarrow{PP_2} \cdot \overrightarrow{PP_4} \\ \overrightarrow{PP_3} \cdot \overrightarrow{PP_2} & \overrightarrow{PP_3} \cdot \overrightarrow{PP_3} & \overrightarrow{PP_3} \cdot \overrightarrow{PP_4} \\ \overrightarrow{PP_4} \cdot \overrightarrow{PP_2} & \overrightarrow{PP_4} \cdot \overrightarrow{PP_3} & \overrightarrow{PP_4} \cdot \overrightarrow{PP_4} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2^2 = \begin{vmatrix} \overrightarrow{PP_1} \cdot \overrightarrow{PP_1} & \overrightarrow{PP_1} \cdot \overrightarrow{PP_3} & \overrightarrow{PP_1} \cdot \overrightarrow{PP_4} \\ \overrightarrow{PP_3} \cdot \overrightarrow{PP_1} & \overrightarrow{PP_3} \cdot \overrightarrow{PP_3} & \overrightarrow{PP_3} \cdot \overrightarrow{PP_4} \\ \overrightarrow{PP_4} \cdot \overrightarrow{PP_1} & \overrightarrow{PP_4} \cdot \overrightarrow{PP_3} & \overrightarrow{PP_4} \cdot \overrightarrow{PP_4} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3^2 = \begin{vmatrix} \overrightarrow{PP_1} \cdot \overrightarrow{PP_1} & \overrightarrow{PP_1} \cdot \overrightarrow{PP_2} & \overrightarrow{PP_1} \cdot \overrightarrow{PP_4} \\ \overrightarrow{PP_2} \cdot \overrightarrow{PP_1} & \overrightarrow{PP_2} \cdot \overrightarrow{PP_2} & \overrightarrow{PP_2} \cdot \overrightarrow{PP_4} \\ \overrightarrow{PP_4} \cdot \overrightarrow{PP_1} & \overrightarrow{PP_4} \cdot \overrightarrow{PP_2} & \overrightarrow{PP_4} \cdot \overrightarrow{PP_4} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_4^2 = \begin{vmatrix} \overrightarrow{PP_1} \cdot \overrightarrow{PP_1} & \overrightarrow{PP_1} \cdot \overrightarrow{PP_2} & \overrightarrow{PP_1} \cdot \overrightarrow{PP_3} \\ \overrightarrow{PP_2} \cdot \overrightarrow{PP_1} & \overrightarrow{PP_2} \cdot \overrightarrow{PP_2} & \overrightarrow{PP_2} \cdot \overrightarrow{PP_3} \\ \overrightarrow{PP_3} \cdot \overrightarrow{PP_1} & \overrightarrow{PP_3} \cdot \overrightarrow{PP_2} & \overrightarrow{PP_3} \cdot \overrightarrow{PP_3} \end{vmatrix}$$

Durch die Darstellung des inneren Produkts (Skalarprodukt) zweier Vektoren zum Beispiel $\overrightarrow{PP_2}$ und $\overrightarrow{PP_3}$, welches durch die Gleichung $\langle \overrightarrow{PP_2} | \overrightarrow{PP_3} \rangle = \|\overrightarrow{PP_2}\| \cdot \|\overrightarrow{PP_3}\| \cdot \cos \Psi_{23}$

bzw. $\langle \overrightarrow{PP_2} | \overrightarrow{PP_2} \rangle = \|\overrightarrow{PP_2}\|^2$ definiert ist (Ψ_{23} ist der eingeschlossene Winkel zwischen den beiden Vektoren), lassen sich obige quadrierte Volumenelemente vereinfachen:

$$\Delta_1^2 = \|\underline{x}_2 - \underline{x}\|^2 \cdot \|\underline{x}_3 - \underline{x}\|^2 \cdot \|\underline{x}_4 - \underline{x}\|^2 \times \left(1 + 2 \cdot \cos \Psi_{23} \cdot \cos \Psi_{34} \cdot \cos \Psi_{42} - \cos \Psi_{23}^2 - \cos \Psi_{34}^2 - \cos \Psi_{42}^2 \right)$$

$$\Delta_2^2 = \|\underline{x}_1 - \underline{x}\|^2 \cdot \|\underline{x}_3 - \underline{x}\|^2 \cdot \|\underline{x}_4 - \underline{x}\|^2 \times \left(1 + 2 \cdot \cos \Psi_{13} \cdot \cos \Psi_{34} \cdot \cos \Psi_{41} - \cos \Psi_{13}^2 - \cos \Psi_{34}^2 - \cos \Psi_{41}^2 \right)$$

$$\Delta_3^2 = \|\underline{x}_1 - \underline{x}\|^2 \cdot \|\underline{x}_2 - \underline{x}\|^2 \cdot \|\underline{x}_4 - \underline{x}\|^2 \times \left(1 + 2 \cdot \cos \Psi_{41} \cdot \cos \Psi_{12} \cdot \cos \Psi_{24} - \cos \Psi_{41}^2 - \cos \Psi_{12}^2 - \cos \Psi_{24}^2 \right)$$

$$\Delta_4^2 = \|\underline{x}_1 - \underline{x}\|^2 \cdot \|\underline{x}_2 - \underline{x}\|^2 \cdot \|\underline{x}_3 - \underline{x}\|^2 \times \left(1 + 2 \cdot \cos \Psi_{12} \cdot \cos \Psi_{23} \cdot \cos \Psi_{31} - \cos \Psi_{12}^2 - \cos \Psi_{23}^2 - \cos \Psi_{31}^2 \right)$$

Wenn die Wurzeln der in Klammern stehenden Terme als (234), (341), (412) und (123)

$$(234) = \pm \sqrt{1 + 2 \cdot \cos \Psi_{23} \cdot \cos \Psi_{34} \cdot \cos \Psi_{42} - \cos \Psi_{23}^2 - \cos \Psi_{34}^2 - \cos \Psi_{42}^2}$$

$$(341) = \pm \sqrt{1 + 2 \cdot \cos \Psi_{13} \cdot \cos \Psi_{34} \cdot \cos \Psi_{41} - \cos \Psi_{13}^2 - \cos \Psi_{34}^2 - \cos \Psi_{41}^2}$$

$$(412) = \pm \sqrt{1 + 2 \cdot \cos \Psi_{41} \cdot \cos \Psi_{12} \cdot \cos \Psi_{24} - \cos \Psi_{41}^2 - \cos \Psi_{12}^2 - \cos \Psi_{24}^2}$$

$$(123) = \pm \sqrt{1 + 2 \cdot \cos \Psi_{12} \cdot \cos \Psi_{23} \cdot \cos \Psi_{31} - \cos \Psi_{12}^2 - \cos \Psi_{23}^2 - \cos \Psi_{31}^2}$$

bezeichnet werden, ergibt sich die folgende Darstellung der Möbius baryzentrischen Koordinaten:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \Delta_1/\Delta = (234) \cdot \|\underline{x}_2 - \underline{x}\| \cdot \|\underline{x}_3 - \underline{x}\| \cdot \|\underline{x}_4 - \underline{x}\|/\Delta \\ \lambda_2 &= \Delta_2/\Delta = (341) \cdot \|\underline{x}_3 - \underline{x}\| \cdot \|\underline{x}_4 - \underline{x}\| \cdot \|\underline{x}_1 - \underline{x}\|/\Delta \\ \lambda_3 &= \Delta_3/\Delta = (412) \cdot \|\underline{x}_4 - \underline{x}\| \cdot \|\underline{x}_1 - \underline{x}\| \cdot \|\underline{x}_2 - \underline{x}\|/\Delta \\ \lambda_4 &= \Delta_4/\Delta = (123) \cdot \|\underline{x}_1 - \underline{x}\| \cdot \|\underline{x}_2 - \underline{x}\| \cdot \|\underline{x}_3 - \underline{x}\|/\Delta\end{aligned}$$

Mit der Substitution $\delta = \|\underline{x}_1 - \underline{x}\| \cdot \|\underline{x}_2 - \underline{x}\| \cdot \|\underline{x}_3 - \underline{x}\| \cdot \|\underline{x}_4 - \underline{x}\|/\Delta$ gilt:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \Delta_1/\Delta = (234) \cdot \delta / \|\underline{x}_1 - \underline{x}\| \\ \lambda_2 &= \Delta_2/\Delta = (341) \cdot \delta / \|\underline{x}_2 - \underline{x}\| \\ \lambda_3 &= \Delta_3/\Delta = (412) \cdot \delta / \|\underline{x}_3 - \underline{x}\| \\ \lambda_4 &= \Delta_4/\Delta = (123) \cdot \delta / \|\underline{x}_4 - \underline{x}\|\end{aligned}$$

Ingesamt erhält man für die Transformation von P4P-Beobachtungen des Typs „Raumwinkel“ in kartesische Koordinaten des unbekannten Punktes p:

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 + \lambda_3 \cdot x_3 + \lambda_4 \cdot x_4}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4} = \lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 + \lambda_3 \cdot x_3 + \lambda_4 \cdot x_4 \\
 &= \frac{(234) \cdot x_1 / \|\underline{x}_1 - \underline{x}\| + (341) \cdot x_2 / \|\underline{x}_2 - \underline{x}\| + (412) \cdot x_3 / \|\underline{x}_3 - \underline{x}\| + (123) \cdot x_4 / \|\underline{x}_4 - \underline{x}\|}{(234) / \|\underline{x}_1 - \underline{x}\| + (341) / \|\underline{x}_2 - \underline{x}\| + (412) / \|\underline{x}_3 - \underline{x}\| + (123) / \|\underline{x}_4 - \underline{x}\|} \\
 &= \frac{\|\underline{x}_1 - \underline{x}\| \cdot \|\underline{x}_1 - \underline{x}\| \cdot \|\underline{x}_1 - \underline{x}\| \cdot \|\underline{x}_1 - \underline{x}\|}{\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ x_1 - x_3 & y_1 - y_3 & z_1 - z_3 \\ x_1 - x_4 & y_1 - y_4 & z_1 - z_4 \end{vmatrix}} \\
 &\quad \times (234) \cdot x_1 / \|\underline{x}_1 - \underline{x}\| + (341) \cdot x_2 / \|\underline{x}_2 - \underline{x}\| + (412) \cdot x_3 / \|\underline{x}_3 - \underline{x}\| + (123) \cdot x_4 / \|\underline{x}_4 - \underline{x}\| \\
 y &= \frac{\lambda_1 \cdot y_1 + \lambda_2 \cdot y_2 + \lambda_3 \cdot y_3 + \lambda_4 \cdot y_4}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4} = \lambda_1 \cdot y_1 + \lambda_2 \cdot y_2 + \lambda_3 \cdot y_3 + \lambda_4 \cdot y_4 \\
 &= \frac{(234) \cdot y_1 / \|\underline{x}_1 - \underline{x}\| + (341) \cdot y_2 / \|\underline{x}_2 - \underline{x}\| + (412) \cdot y_3 / \|\underline{x}_3 - \underline{x}\| + (123) \cdot y_4 / \|\underline{x}_4 - \underline{x}\|}{(234) / \|\underline{x}_1 - \underline{x}\| + (341) / \|\underline{x}_2 - \underline{x}\| + (412) / \|\underline{x}_3 - \underline{x}\| + (123) / \|\underline{x}_4 - \underline{x}\|} \\
 &= \frac{\|\underline{x}_1 - \underline{x}\| \cdot \|\underline{x}_1 - \underline{x}\| \cdot \|\underline{x}_1 - \underline{x}\| \cdot \|\underline{x}_1 - \underline{x}\|}{\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ x_1 - x_3 & y_1 - y_3 & z_1 - z_3 \\ x_1 - x_4 & y_1 - y_4 & z_1 - z_4 \end{vmatrix}} \\
 &\quad \times (234) \cdot y_1 / \|\underline{x}_1 - \underline{x}\| + (341) \cdot y_2 / \|\underline{x}_2 - \underline{x}\| + (412) \cdot y_3 / \|\underline{x}_3 - \underline{x}\| + (123) \cdot y_4 / \|\underline{x}_4 - \underline{x}\| \\
 z &= \frac{\lambda_1 \cdot z_1 + \lambda_2 \cdot z_2 + \lambda_3 \cdot z_3 + \lambda_4 \cdot z_4}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4} = \lambda_1 \cdot z_1 + \lambda_2 \cdot z_2 + \lambda_3 \cdot z_3 + \lambda_4 \cdot z_4 \\
 &= \frac{(234) \cdot z_1 / \|\underline{x}_1 - \underline{x}\| + (341) \cdot z_2 / \|\underline{x}_2 - \underline{x}\| + (412) \cdot z_3 / \|\underline{x}_3 - \underline{x}\| + (123) \cdot z_4 / \|\underline{x}_4 - \underline{x}\|}{(234) / \|\underline{x}_1 - \underline{x}\| + (341) / \|\underline{x}_2 - \underline{x}\| + (412) / \|\underline{x}_3 - \underline{x}\| + (123) / \|\underline{x}_4 - \underline{x}\|} \\
 &= \frac{\|\underline{x}_1 - \underline{x}\| \cdot \|\underline{x}_1 - \underline{x}\| \cdot \|\underline{x}_1 - \underline{x}\| \cdot \|\underline{x}_1 - \underline{x}\|}{\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ x_1 - x_3 & y_1 - y_3 & z_1 - z_3 \\ x_1 - x_4 & y_1 - y_4 & z_1 - z_4 \end{vmatrix}} \\
 &\quad \times (234) \cdot z_1 / \|\underline{x}_1 - \underline{x}\| + (341) \cdot z_2 / \|\underline{x}_2 - \underline{x}\| + (412) \cdot z_3 / \|\underline{x}_3 - \underline{x}\| + (123) \cdot z_4 / \|\underline{x}_4 - \underline{x}\|
 \end{aligned}$$

Die kartesischen Koordinaten $\{x, y, z\}$ hängen nach obigen Formeln von den Raumwinkeln Ψ_{ij} sowie von den Distanzen $\overrightarrow{pp_i} \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$ ab, die aber noch unbekannt sind. Die Bestimmung dieser Distanzen findet in den folgenden Abschnitten statt.

Innerhalb des 5-dimensionalen Simplex $\{p, p_1, p_2, p_3, p_4\}$ haben die möglichen sechs Raumwinkel Ψ_{ij} der Flächen $\{p_i p_j\}$, $i \neq j$, die im Punkt p zentriert sind, nach dem Kosinussatz folgende Beziehung zu den Strecken $\|\overrightarrow{pp_i}\|$, $\|\overrightarrow{pp_j}\|$ und $\|\overrightarrow{p_i p_j}\|$:

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{p_1 p_2}\|^2 &= \|\overrightarrow{pp_1}\|^2 + \|\overrightarrow{pp_2}\|^2 - 2 \cdot \|\overrightarrow{pp_1}\| \cdot \|\overrightarrow{pp_2}\| \cdot \cos \Psi_{12} \\ \|\overrightarrow{p_2 p_3}\|^2 &= \|\overrightarrow{pp_2}\|^2 + \|\overrightarrow{pp_3}\|^2 - 2 \cdot \|\overrightarrow{pp_2}\| \cdot \|\overrightarrow{pp_3}\| \cdot \cos \Psi_{23} \\ \|\overrightarrow{p_3 p_4}\|^2 &= \|\overrightarrow{pp_3}\|^2 + \|\overrightarrow{pp_4}\|^2 - 2 \cdot \|\overrightarrow{pp_3}\| \cdot \|\overrightarrow{pp_4}\| \cdot \cos \Psi_{34} \\ \|\overrightarrow{p_4 p_1}\|^2 &= \|\overrightarrow{pp_4}\|^2 + \|\overrightarrow{pp_1}\|^2 - 2 \cdot \|\overrightarrow{pp_4}\| \cdot \|\overrightarrow{pp_1}\| \cdot \cos \Psi_{41} \\ \|\overrightarrow{p_1 p_3}\|^2 &= \|\overrightarrow{pp_1}\|^2 + \|\overrightarrow{pp_3}\|^2 - 2 \cdot \|\overrightarrow{pp_1}\| \cdot \|\overrightarrow{pp_3}\| \cdot \cos \Psi_{13} \\ \|\overrightarrow{p_2 p_4}\|^2 &= \|\overrightarrow{pp_2}\|^2 + \|\overrightarrow{pp_4}\|^2 - 2 \cdot \|\overrightarrow{pp_2}\| \cdot \|\overrightarrow{pp_4}\| \cdot \cos \Psi_{24} \end{aligned}$$

Diese Gleichungen werden auch als Grunert-Gleichungen bezeichnet. Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} b_{12} &= \|\overrightarrow{p_1 p_2}\|^2 & b_{23} &= \|\overrightarrow{p_2 p_3}\|^2 & b_{34} &= \|\overrightarrow{p_3 p_4}\|^2 \\ b_{41} &= \|\overrightarrow{p_4 p_1}\|^2 & b_{13} &= \|\overrightarrow{p_1 p_3}\|^2 & b_{24} &= \|\overrightarrow{p_2 p_4}\|^2 \\ a_{12} &= -2 \cdot \cos \Psi_{12} & a_{23} &= -2 \cdot \cos \Psi_{23} & a_{34} &= -2 \cdot \cos \Psi_{34} \\ a_{41} &= -2 \cdot \cos \Psi_{41} & a_{13} &= -2 \cdot \cos \Psi_{13} & a_{24} &= -2 \cdot \cos \Psi_{24} \\ x_1 &= \|\overrightarrow{pp_1}\| & x_2 &= \|\overrightarrow{pp_2}\| & x_3 &= \|\overrightarrow{pp_3}\| & x_4 &= \|\overrightarrow{pp_4}\| \end{aligned}$$

erhält man die äquivalente Darstellung:

$$\begin{aligned} b_{12} &= x_1^2 + x_2^2 + a_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 \\ b_{23} &= x_3^2 + x_2^2 + a_{23} \cdot x_3 \cdot x_2 \\ b_{34} &= x_3^2 + x_4^2 + a_{34} \cdot x_3 \cdot x_4 \\ b_{41} &= x_4^2 + x_1^2 + a_{41} \cdot x_4 \cdot x_1 \\ b_{13} &= x_1^2 + x_3^2 + a_{13} \cdot x_1 \cdot x_3 \\ b_{24} &= x_4^2 + x_2^2 + a_{24} \cdot x_4 \cdot x_2 \end{aligned}$$

Der geometrische Hintergrund dieser quadratischen Formen zum Beispiel in $\{x_2, x_3\}, \{x_3, x_4\}, \{x_2, x_4\}$ wird in E. Grafarend, et al (1989) beschrieben. Dort wird ein Punkt des $\{R^{+3}, g_{\mu\nu}\}$ mittels einer Projektionslinie unter Einführung der homogenen Koordinaten $y_3 = x_3/x_2, y_4 = x_4/x_2$ auf die Grassmansche Mannigfaltigkeit $G_{3,2}(x_2 = 1)$ projiziert.

Um die gesuchten vier unbekanntnen Strecken der Basispunkte $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ zum gesuchten Punkt p zu bestimmen, werden zwei Sätze der Grunert-Gleichungen gelöst. Der erste Satz besteht aus den Gleichungen $(b_{12}, b_{23}, b_{13}) \Rightarrow (x_1, x_2, x_3)$, der zweite Satz aus $(b_{34}, b_{41}, b_{13}) \Rightarrow ((x_3), x_4, (x_1))$. Exemplarisch wird hier die Lösung des ersten Satzes der Grunert-Gleichungen vorgestellt.

Ausgangsgleichungen sind

$$\begin{aligned} b_{12} &= x_1^2 + x_2^2 + a_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 \\ b_{23} &= x_3^2 + x_2^2 + a_{23} \cdot x_3 \cdot x_2 \\ b_{13} &= x_1^2 + x_3^2 + a_{13} \cdot x_1 \cdot x_3 \end{aligned}$$

Diese drei inhomogenen quadratischen Gleichungen werden im ersten Schritt zu homogenen Gleichungen umgeformt:

$$\begin{aligned} b_{12} &= x_1^2 \cdot \left(1 + x_2^2/x_1^2 + a_{12} \cdot x_2/x_1\right) \\ b_{23} &= x_1^2 \cdot \left(x_3^2/x_1^2 + x_2^2/x_1^2 + a_{23} \cdot x_3 \cdot x_2/x_1^2\right) \\ b_{13} &= x_1^2 \cdot \left(1 + x_3^2/x_1^2 + a_{13} \cdot x_3/x_1\right) \end{aligned}$$

Mit den homogenen Koordinaten $y_3 := \frac{x_2}{x_1}, y_4 := \frac{x_3}{x_1}$ gilt

$$\begin{aligned} b_{12} &= x_1^2 \cdot \left(1 + y_3^2 + a_{12} \cdot y_3\right) \\ b_{23} &= x_1^2 \cdot \left(y_4^2 + y_3^2 + a_{23} \cdot y_3 \cdot y_4\right) \\ b_{13} &= x_1^2 \cdot \left(1 + y_4^2 + a_{13} \cdot y_4\right) \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} x_1^2 &= (1 + y_3^2 + a_{12} \cdot y_{31}) / b_{12} \\ &= (y_4^2 + y_3^2 + a_{23} \cdot y_3 \cdot y_4) / b_{23} \\ &= (1 + y_4^2 + a_{13} \cdot y_4) / b_{13} \end{aligned}$$

Im zweiten Schritt wird die zweite durch die erste bzw. die dritte durch die erste Gleichung dividiert. Man erhält folgende Darstellung:

$$\begin{aligned} b_{23} \cdot (1 + y_3^2 + a_{12} \cdot y_{31}) &= b_{12} \cdot (y_4^2 + y_3^2 + a_{23} \cdot y_3 \cdot y_4) \\ b_{13} \cdot (1 + y_3^2 + a_{12} \cdot y_{31}) &= b_{12} \cdot (1 + y_4^2 + a_{13} \cdot y_4) \end{aligned}$$

Im dritten Schritt werden diese beiden Gleichungen von einander subtrahiert und es ergibt sich die Lösung für y_4 in Abhängigkeit von y_3 :

$$y_4(y_3) = \frac{(b_{23} - b_{12} - b_{13}) \cdot y_3^2 + a_{12} \cdot (b_{23} - b_{13}) \cdot y_3}{a_{23} \cdot b_{12} \cdot y_3 - a_{13} \cdot b_{12}} + \frac{(b_{12} + b_{23} - b_{13})}{a_{23} \cdot b_{12} \cdot y_3 - a_{13} \cdot b_{12}}$$

Im vierten Schritt liefert das Einsetzen von $y_4(y_3)$ in die zweite Gleichung des zweiten Schrittes eine Gleichung 4. Grades in y_3 mit den Koeffizienten $C_i \forall i = 0..4$:

$$C_4 \cdot y_3^4 + C_3 \cdot y_3^3 + C_2 \cdot y_3^2 + C_1 \cdot y_3 + C_0 = 0$$

$$\begin{aligned} C_4 &= b_{12} \cdot (b_{23} - b_{12} - b_{13})^2 - a_{23}^2 \cdot b_{12}^2 \cdot b_{13} \\ C_3 &= (b_{23} - b_{12} - b_{13}) \cdot (a_{13} \cdot a_{23} \cdot b_{12}^2 + 2 \cdot a_{12} \cdot b_{12} \cdot (b_{23} - b_{13})) + a_{23} \cdot b_{12}^2 \cdot b_{13} \cdot (2 \cdot a_{13} - a_{12} \cdot a_{23}) \\ C_2 &= b_{12} \cdot (a_{12}^2 \cdot (b_{23} - b_{13})^2 + 2 \cdot (b_{23} - b_{12} - b_{13}) \cdot (b_{12} + b_{23} - b_{13})) + a_{12} \cdot a_{13} \cdot a_{23} \cdot b_{12}^2 \cdot (b_{13} + b_{23}) \\ &\quad + a_{23}^2 \cdot b_{12}^2 \cdot (b_{12} - b_{13}) + b_{12}^2 \cdot a_{13}^2 \cdot (b_{12} - b_{23}) \\ C_1 &= 2 \cdot a_{12} \cdot b_{12} \cdot (b_{23} - b_{13}) \cdot (b_{12} + b_{23} - b_{13}) + a_{13} \cdot a_{23} \cdot b_{12}^2 \cdot (b_{23} + b_{13} - b_{12}) - a_{12} \cdot a_{13}^2 \cdot b_{12}^2 \cdot b_{23} \\ C_0 &= b_{12} \cdot (b_{12} + b_{23} - b_{13})^2 - a_{13}^2 \cdot b_{12}^2 \cdot b_{23} \end{aligned}$$

Das Lösen dieser Gleichung ergibt 4 mögliche positive Wurzeln $y_{31}, y_{32}, y_{33}, y_{34}$, die im fünften Schritt in

$$y_4(y_3) = \frac{(b_{23} - b_{12} - b_{13}) \cdot y_3^2 + a_{12} \cdot (b_{23} - b_{13}) \cdot y_3}{a_{23} \cdot b_{12} \cdot y_3 - a_{13} \cdot b_{12}} + \frac{(b_{12} + b_{23} - b_{13})}{a_{23} \cdot b_{12} \cdot y_3 - a_{13} \cdot b_{12}}$$

eingesetzt werden. Damit erhält man mit

$$\begin{aligned} x_1^2 &= (1 + y_3^2 + a_{12} \cdot y_3) / b_{12} \\ &= (y_4^2 + y_3^2 + a_{23} \cdot y_3 \cdot y_4) / b_{23} \\ &= (1 + y_4^2 + a_{13} \cdot y_4) / b_{13} \end{aligned}$$

die Lösung für x_1 und damit $x_2 = x_1 \cdot y_3$ bzw. $x_3 = x_1 \cdot y_4$.

Durch Betrachtung des zweiten Satzes der Grunert Gleichungen erhält man – ergänzend zu den Lösungen des ersten Satzes (s_1, s_2, s_3) – die Lösung für x_4 (s_4). Die richtige Kombination der Strecken ergibt sich aus der Bedingung, dass die Werte y_3 und y_4 positiv sind und unter Einbeziehung weiterer Hintergrundinformationen (zum Beispiel aus Karten), durch die die Konfiguration festgelegt ist.

Der „P4P-Algorithmus“ bzw. der Rückwärtsschnitt lässt sich somit grob in vier Schritte zusammenfassen:

- Schritt 1: Berechnung der Raumwinkel Ψ_{ij} des 5-dimensionalen Simplex $\{p, p_1, p_2, p_3, p_4\}$ aus den Originalbeobachtungen, den Bildkoordinaten.
- Schritt 2: Berechnung der Distanzen $\|\underline{x}_i - \underline{x}_j\|$ zwischen den bekannten kartesischen Koordinaten der Punkte p_i, p_j .
- Schritt 3: Lösen der Grunert-Gleichungen: $\|\underline{x}_i - \underline{x}_p\|$
- Schritt 4: Berechnung der kartesischen Koordinaten des Projektionszentrums p

2-24. Vorwärtsschnitt

Die Berechnung der Objektkoordinaten des unbekanntes Punktes mittels der Projektionszentren P_l und P_r erfolgt mit Hilfe des Vorwärtsschnittes (siehe Abbildung 3.).

In den folgenden Abschnitten wird hierzu ein Berechnungsschema angegeben. Ausgangsgleichungen stellen die perspektivischen Gleichungen dar, die die kartesischen Koordinatendifferenzen des unbekanntes Punktes durch die linken und rechten Bildkoordinaten des Punktes P darstellen.

$$\begin{array}{l}
 \begin{bmatrix} x - x_l \\ y - y_l \\ z - z_l \end{bmatrix} = s_l \cdot R_l \cdot \begin{bmatrix} \bar{x}_l \\ \bar{y}_l \\ -f \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = s_l \cdot R_l \cdot \begin{bmatrix} \bar{x}_l \\ \bar{y}_l \\ -f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_l \\ y_l \\ z_l \end{bmatrix} \\
 \text{bzw.} \\
 \begin{bmatrix} x - x_r \\ y - y_r \\ z - z_r \end{bmatrix} = s_r \cdot R_r \cdot \begin{bmatrix} \bar{x}_r \\ \bar{y}_r \\ -f \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = s_r \cdot R_r \cdot \begin{bmatrix} \bar{x}_r \\ \bar{y}_r \\ -f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \end{bmatrix}
 \end{array}$$

mit

$$\begin{array}{l}
 s_l = \frac{\sqrt{(x - x_l)^2 + (y - y_l)^2 + (z - z_l)^2}}{\sqrt{\bar{x}_l^2 + \bar{y}_l^2 + f^2}} \\
 s_r = \frac{\sqrt{(x - x_r)^2 + (y - y_r)^2 + (z - z_r)^2}}{\sqrt{\bar{x}_r^2 + \bar{y}_r^2 + f^2}}
 \end{array}$$

R_l, R_r stellen die linke und rechte 3-dimensionale Rotationsmatrix dar; s_l, s_r den

Maßstab in Bezug auf die euklidische Norm von $\overrightarrow{PP_l}, \overrightarrow{PP_r}, \overrightarrow{PP_l}, \overrightarrow{PP_r}$.

Diese Standardtransformation von Bildkoordinaten in Objektkoordinaten kann auch in homogenen Koordinaten dargestellt werden, was in der nächsten Formel veranschaulicht ist:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} &= s_l \cdot \left[\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} x_l \\ y_l \\ z_l \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} & 1 \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} \bar{x}_l \\ \bar{y}_l \\ -f \\ s_l^{-1} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} &= s_r \cdot \left[\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} x_r \\ y_r \\ z_r \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} & 1 \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} \bar{x}_r \\ \bar{y}_r \\ -f \\ s_r^{-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

In baryzentrischen Koordinaten ausgedrückt ergibt sich folgende Darstellung:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta_1/\Delta \\ \Delta_2/\Delta \\ \Delta_3/\Delta \\ \Delta_4/\Delta \end{bmatrix}$$

Die Volumenelemente Δ_i lassen sich mittels der Perspektivgeometrie in Flächenelemente aufteilen, was hier am Beispiel von Δ_2 geschieht:

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \begin{vmatrix} x_1 & x & x_3 & x_4 \\ y_1 & y & y_3 & y_4 \\ z_1 & z & z_3 & z_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \Delta_{2(l)} &= s_{l_1} \cdot s_l \cdot s_{l_3} \cdot s_{l_4} \cdot \left[\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} x_l \\ y_l \\ z_l \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} & 1 \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} \bar{x}_{l_1} & \bar{x}_l & \bar{x}_{l_3} & \bar{x}_{l_4} \\ \bar{y}_{l_1} & \bar{y}_l & \bar{y}_{l_3} & \bar{y}_{l_4} \\ -f & -f & -f & -f \\ s_{l_1}^{-1} & s_l^{-1} & s_{l_3}^{-1} & s_{l_4}^{-1} \end{bmatrix} \\ \Delta_{2(r)} &= s_{r_1} \cdot s_r \cdot s_{r_3} \cdot s_{r_4} \cdot \left[\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} x_r \\ y_r \\ z_r \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} & 1 \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} \bar{x}_{r_1} & \bar{x}_r & \bar{x}_{r_3} & \bar{x}_{r_4} \\ \bar{y}_{r_1} & \bar{y}_r & \bar{y}_{r_3} & \bar{y}_{r_4} \\ -f & -f & -f & -f \\ s_{r_1}^{-1} & s_r^{-1} & s_{r_3}^{-1} & s_{r_4}^{-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Mit

$$s_{l_1} = \frac{\sqrt{(x_1 - x_l)^2 + (y_1 - y_l)^2 + (z_1 - z_l)^2}}{\sqrt{x_{l_1}^{-2} + y_{l_1}^{-2} + f^2}}, \dots$$

$$s_{r_4} = \frac{\sqrt{(x_4 - x_r)^2 + (y_4 - y_r)^2 + (z_4 - z_r)^2}}{\sqrt{x_{r_4}^{-2} + y_{r_4}^{-2} + f^2}}$$

$$R_l \begin{vmatrix} x_l \\ y_l \\ z_l \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} = |R_l| = 1$$

$$R_r \begin{vmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} = |R_r| = 1$$

folgt für Δ_2

$$\Delta_{2(l)} = s_{l_1} \cdot s_l \cdot s_{l_3} \cdot s_{l_4} \cdot \begin{vmatrix} \bar{x}_{l_1} & \bar{x}_l & \bar{x}_{l_3} & \bar{x}_{l_4} \\ \bar{y}_{l_1} & \bar{y}_l & \bar{y}_{l_3} & \bar{y}_{l_4} \\ -f & -f & -f & -f \\ s_{l_1}^{-1} & s_l^{-1} & s_{l_3}^{-1} & s_{l_4}^{-1} \end{vmatrix}$$

$$= s_{l_1} \cdot s_l \cdot s_{l_3} \cdot s_{l_4} \times \left\{ \begin{array}{l} -s_{l_1}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} \bar{x}_l & \bar{x}_{l_3} & \bar{x}_{l_4} \\ \bar{y}_l & \bar{y}_{l_3} & \bar{y}_{l_4} \\ -f & -f & -f \end{vmatrix} + s_{l_1}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} \bar{x}_{l_1} & \bar{x}_{l_3} & \bar{x}_{l_4} \\ \bar{y}_{l_1} & \bar{y}_{l_3} & \bar{y}_{l_4} \\ -f & -f & -f \end{vmatrix} \\ -s_{l_3}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} \bar{x}_{l_1} & \bar{x}_l & \bar{x}_{l_4} \\ \bar{y}_{l_1} & \bar{y}_l & \bar{y}_{l_4} \\ -f & -f & -f \end{vmatrix} + s_{l_4}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} \bar{x}_{l_1} & \bar{x}_l & \bar{x}_{l_3} \\ \bar{y}_{l_1} & \bar{y}_l & \bar{y}_{l_3} \\ -f & -f & -f \end{vmatrix} \end{array} \right\}$$

$$= s_{l_1} \cdot s_l \cdot s_{l_3} \cdot s_{l_4} \times \left\{ \begin{array}{l} s_{l_1}^{-1} \cdot f \cdot \begin{vmatrix} \bar{x}_l & \bar{x}_{l_3} & \bar{x}_{l_4} \\ \bar{y}_l & \bar{y}_{l_3} & \bar{y}_{l_4} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - s_{l_1}^{-1} \cdot f \cdot \begin{vmatrix} \bar{x}_{l_1} & \bar{x}_{l_3} & \bar{x}_{l_4} \\ \bar{y}_{l_1} & \bar{y}_{l_3} & \bar{y}_{l_4} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ + s_{l_3}^{-1} \cdot f \cdot \begin{vmatrix} \bar{x}_{l_1} & \bar{x}_l & \bar{x}_{l_4} \\ \bar{y}_{l_1} & \bar{y}_l & \bar{y}_{l_4} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - s_{l_4}^{-1} \cdot f \cdot \begin{vmatrix} \bar{x}_{l_1} & \bar{x}_l & \bar{x}_{l_3} \\ \bar{y}_{l_1} & \bar{y}_l & \bar{y}_{l_3} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \end{array} \right\}$$

$$= 2 \cdot f \cdot s_{l_1} \cdot s_{l_3} \cdot s_{l_4} \cdot \text{area}_l \{p_1, p_3, p_4\}$$

$$+ 2 \cdot f \cdot s_l \cdot [-s_{l_3} \cdot s_{l_4} \cdot \text{area}_l \{p, p_3, p_4\} + s_{l_1} \cdot s_{l_4} \cdot \text{area}_l \{p_1, p, p_4\} - s_{l_1} \cdot s_{l_3} \cdot \text{area}_l \{p_1, p, p_3\}]$$

$$\begin{aligned}
 \Delta_{2(r)} &= s_{r_1} \cdot s_r \cdot s_{r_3} \cdot s_{r_4} \cdot \begin{vmatrix} \bar{x}_{r_1} & \bar{x}_r & \bar{x}_{r_3} & \bar{x}_{r_4} \\ \bar{y}_{r_1} & \bar{y}_r & \bar{y}_{r_3} & \bar{y}_{r_4} \\ -f & -f & -f & -f \\ s_{r_1}^{-1} & s_r^{-1} & s_{r_3}^{-1} & s_{r_4}^{-1} \end{vmatrix} \\
 &= s_{r_1} \cdot s_r \cdot s_{r_3} \cdot s_{r_4} \times \left\{ \begin{array}{l} -s_{r_1}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} \bar{x}_r & \bar{x}_{r_3} & \bar{x}_{r_4} \\ \bar{y}_r & \bar{y}_{r_3} & \bar{y}_{r_4} \\ -f & -f & -f \end{vmatrix} + s_r^{-1} \cdot \begin{vmatrix} \bar{x}_{r_1} & \bar{x}_{r_3} & \bar{x}_{r_4} \\ \bar{y}_{r_1} & \bar{y}_{r_3} & \bar{y}_{r_4} \\ -f & -f & -f \end{vmatrix} \\ -s_{r_3}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} \bar{x}_{r_1} & \bar{x}_r & \bar{x}_{r_4} \\ \bar{y}_{r_1} & \bar{y}_r & \bar{y}_{r_4} \\ -f & -f & -f \end{vmatrix} + s_{r_4}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} \bar{x}_{r_1} & \bar{x}_r & \bar{x}_{r_3} \\ \bar{y}_{r_1} & \bar{y}_r & \bar{y}_{r_3} \\ -f & -f & -f \end{vmatrix} \end{array} \right\} \\
 &= s_{r_1} \cdot s_r \cdot s_{r_3} \cdot s_{r_4} \times \left\{ \begin{array}{l} s_{r_1}^{-1} \cdot f \cdot \begin{vmatrix} \bar{x}_r & \bar{x}_{r_3} & \bar{x}_{r_4} \\ \bar{y}_r & \bar{y}_{r_3} & \bar{y}_{r_4} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - s_r^{-1} \cdot f \cdot \begin{vmatrix} \bar{x}_{r_1} & \bar{x}_{r_3} & \bar{x}_{r_4} \\ \bar{y}_{r_1} & \bar{y}_{r_3} & \bar{y}_{r_4} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ + s_{r_3}^{-1} \cdot f \cdot \begin{vmatrix} \bar{x}_{r_1} & \bar{x}_r & \bar{x}_{r_4} \\ \bar{y}_{r_1} & \bar{y}_r & \bar{y}_{r_4} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - s_{r_4}^{-1} \cdot f \cdot \begin{vmatrix} \bar{x}_{r_1} & \bar{x}_r & \bar{x}_{r_3} \\ \bar{y}_{r_1} & \bar{y}_r & \bar{y}_{r_3} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \end{array} \right\} \\
 &= 2 \cdot f \cdot s_{r_1} \cdot s_{r_3} \cdot s_{r_4} \cdot \text{area}_r \{p_1, p_3, p_4\} \\
 &\quad + 2 \cdot f \cdot s_r \left[-s_{r_3} \cdot s_{r_4} \cdot \text{area}_r \{p, p_3, p_4\} + s_{r_1} \cdot s_{r_4} \cdot \text{area}_r \{p_1, p, p_4\} - s_{r_1} \cdot s_{r_3} \cdot \text{area}_r \{p_1, p, p_3\} \right]
 \end{aligned}$$

In den Gleichungen von Δ_2 sind nur die Streckenverhältnisse s_i, s_r unbekannt. Diese können in einem zweiten Schritt mittels zweier linearer Gleichungen bestimmt werden, zum Beispiel durch Gleichsetzen von $\Delta_{1(l)} = \Delta_{1(r)}, \Delta_{2(r)} = \Delta_{2(r)}$. Die zwei Gleichungen haben (mit vereinfachter Koeffizientendarstellung) die Form

$$\begin{array}{l}
 a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 = y_1 \\
 a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 = y_2
 \end{array} \quad \sim A \cdot x = y$$

,wobei $x_1 = s_i$ und $x_r = s_r$. Für die Koeffizienten $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ gelten die im Anhang B4 im 2. Schritt stehenden Gleichungen. Aufgelöst wird dieses System durch $x = A^{-1} \cdot y$.

Durch die Bestimmung dieser beiden Streckenverhältnisse der Projektionszentren zum zu bestimmenden Objektpunkt können nun die baryzentrischen Koordinaten berechnet werden, was in der nächsten Formel vollständig dargestellt ist.

$$\lambda_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{s \cdot \begin{vmatrix} \bar{x} & \bar{x}_2 & \bar{x}_3 & \bar{x}_4 \\ \bar{y} & \bar{y}_2 & \bar{y}_3 & \bar{y}_4 \\ -f & -f & -f & -f \\ s^{-2} & s_2^{-1} & s_3^{-1} & s_4^{-1} \end{vmatrix}}{s_1 \cdot \begin{vmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \bar{x}_3 & \bar{x}_4 \\ \bar{y}_1 & \bar{y}_2 & \bar{y}_3 & \bar{y}_4 \\ -f & -f & -f & -f \\ s_1^{-1} & s_2^{-1} & s_3^{-1} & s_4^{-1} \end{vmatrix}}, \lambda_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{s \cdot \begin{vmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x} & \bar{x}_3 & \bar{x}_4 \\ \bar{y}_1 & \bar{y} & \bar{y}_3 & \bar{y}_4 \\ -f & -f & -f & -f \\ s_1^{-1} & s^{-1} & s_3^{-1} & s_4^{-1} \end{vmatrix}}{s_2 \cdot \begin{vmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \bar{x}_3 & \bar{x}_4 \\ \bar{y}_1 & \bar{y}_2 & \bar{y}_3 & \bar{y}_4 \\ -f & -f & -f & -f \\ s_1^{-1} & s_2^{-1} & s_3^{-1} & s_4^{-1} \end{vmatrix}}$$

$$\lambda_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{s \cdot \begin{vmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \bar{x} & \bar{x}_4 \\ \bar{y}_1 & \bar{y}_2 & \bar{y} & \bar{y}_4 \\ -f & -f & -f & -f \\ s_1^{-1} & s_2^{-1} & s^{-1} & s_4^{-1} \end{vmatrix}}{s_3 \cdot \begin{vmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \bar{x}_3 & \bar{x}_4 \\ \bar{y}_1 & \bar{y}_2 & \bar{y}_3 & \bar{y}_4 \\ -f & -f & -f & -f \\ s_1^{-1} & s_2^{-1} & s_3^{-1} & s_4^{-1} \end{vmatrix}}, \lambda_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = \frac{s \cdot \begin{vmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \bar{x}_3 & \bar{x} \\ \bar{y}_1 & \bar{y}_2 & \bar{y}_3 & \bar{y} \\ -f & -f & -f & -f \\ s_1^{-1} & s_2^{-1} & s_3^{-1} & s^{-1} \end{vmatrix}}{s_4 \cdot \begin{vmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \bar{x}_3 & \bar{x}_4 \\ \bar{y}_1 & \bar{y}_2 & \bar{y}_3 & \bar{y}_4 \\ -f & -f & -f & -f \\ s_1^{-1} & s_2^{-1} & s_3^{-1} & s_4^{-1} \end{vmatrix}}$$

Diese λ_i -Koordinaten sind abhängig von den Bildkoordinaten der vier Referenzpunkte und dem unbekanntem Punkt entweder des linken oder rechten Bildes.

In einem letzten Schritt können nun die homogenen Koordinaten $\{x, y, z, 1\}$ bzw. kartesischen Koordinaten bestimmt werden

Zusammenfassend lässt sich der „twin P4P-Algorithmus“ somit grob in drei Schritte einteilen:

Schritt 1: Übernahme der Strecken $\|\underline{x}_i - \underline{x}_p\|$ aus den Grunert-Gleichungen für beide Perspektivzentren; Berechnung der Distanzverhältnisse (Maßstäbe).

Schritt 2: Berechnung der Flächenelemente bzw. Distanzverhältnisse Neupunkt (Objektraum)-Projektionszentrum.

Schritt 3: Berechnung der Möbius baryzentrischen Koordinaten und kartesischen Koordinaten des Neupunktes.

2-3. Programm-/Datenanalyse

Wie in Kapitel 2-2. dargestellt, wurden die Programme für den Rückwärtsschnitt und den Vorwärtsschnitt getrennt programmiert. Das Programm für den Rückwärtsschnitt (vgl. Anhang B1-B3) ist grundsätzlich wie in der Zusammenfassung auf S. 17 aufgebaut. Jedoch ist es in drei Unterprogramme unterteilt, da während der Berechnung Untersuchungen gemacht werden müssen. Nach dem ersten Teilprogramm muss festgelegt werden, welche Streckenkombination die „richtige“ ist. Dies geschieht durch Prüfen der Variablen y_3 und y_4 aus den Grunert-Gleichungen, welche positiv sein müssen und durch Vorinformation aus Karten oder Bildern. Die „richtige“ Kombination der Strecken wird in das zweite Teilprogramm eingesetzt, das die Möbius baryzentrischen Koordinaten berechnet. Da die Summe dieser Koordinaten eins ergeben muss, wird in diesem Teilprogramm die richtige der möglichen $2^4 = 16$ Kombinationen der λ_i ermittelt. Die „richtige“ Kombination der Möbius baryzentrischen Koordinaten wird in das dritte Teilprogramm eingesetzt, welches die kartesischen Koordinaten des Projektionszentrums berechnet. Das Programm für den Vorwärtsschnitt (siehe Anhang B4) ist analog zur Zusammenfassung auf S.23 aufgebaut. Die Eingangsgrößen sind hier die im Rückwärtsschnitt ermittelten Strecken aus den gelösten Grunert-Gleichungen. Das Ergebnis sind die Objektkoordinaten eines zu bestimmenden Neupunktes.

Zur Berechnung dieses „twin P4P“ dient ein Testdatensatz, der mit dem Bündelprogramm PAT-B generiert wurde (vgl. Anhang A). Er besteht aus einem Stereobildpaar, das 6 identische Punkte aufweist und dessen innere Orientierung bekannt ist (Lage des Bildhauptpunktes $[x_0 = 0, y_0 = 0]$, Kammerkonstante f).

3. Validierung zweier Verfahren

Um das Verfahren von E. Grafarend, J. Shan (1997a, b) mit der klassischen Methode der Bündelblockausgleichung vergleichen zu können, wurden 4 Punkte {100201 (1), 100301 (2), 200301 (3), 300201 (4)} des Datensatzes (vgl. Anhang A) als Referenz festgelegt; die zwei weiteren Punkte {200301, 300301} stellten zu bestimmende Neupunkte (N) dar.

Als erstes erfolgte die Berechnung der beiden Projektionszentren des Bildes 1010 und 1020 durch einen Rückwärtsschnitt. Das Ergebnis lautete wie folgt:

Kombination {100201 (1), 100301 (2), 200201 (3), 300201 (4)}

Bild 1010:

1. Teilprogramm: Strecken

(1,2,3)

s1z =

1.0e+003 *
 1.36952677826963
 1.91804297291498
 1.94295068547419
 1.77976645592521

s2z =

1.0e+003 *
 1.90465209798213
 2.00840732937509
 1.99517437982117
 1.13247867362269

s3z =

1.0e+003 *
 1.86373532999483
 1.52999985287154
 1.66902811758979
 1.93723212571573

(3,4,1)

s4d =

1.0e+010 *
 1.07170164089693 + 0.54778015819401i
 1.07170164089693 - 0.54778015819401i
 0.00000019180430
 0.00000019180430

→ erste und zweite Lösung: komplex

→ dritte und vierte Lösung: möglich!

2. Teilprogramm:

Baryzentrische Koordinaten für dritte Lösung:

lambda1p = 5.41840274147105
 lambda2p = 0
 lambda3p = 11.06942803563050
 lambda4p = 5.48876614011949
 lambda1m = -5.41840274147105
 lambda2m = 0
 lambda3m = -11.06942803563050
 lambda4m = -5.48876614011949

Kombinationen der baryzentrischen Koordinaten:

k01 = 21.97659691722105
 k02 = 10.99906463698206
 k03 = -0.16225915403996
 k04 = -11.13979143427894

k05 = 21.97659691722105
 k06 = 10.99906463698206
 k07 = -0.16225915403996
 k08 = -11.13979143427894
 k09 = 11.13979143427894
 k10 = 0.16225915403996
 k11 = -10.99906463698206
 k12 = -21.97659691722105
 k13 = 11.13979143427894
 k14 = 0.16225915403996
 k15 = -10.99906463698206
 k16 = -21.97659691722105

→ NEB. (Summe == 1) nicht erfüllt!

Baryzentrische Koordinaten für vierte Lösung:

lambda1p = 3.56975544400771
 lambda2p = 0
 lambda3p = 5.75540107388033
 lambda4p = 3.31240284363851
 lambda1m = -3.56975544400771
 lambda2m = 0
 lambda3m = -5.75540107388033
 lambda4m = -3.31240284363851

Kombinationen der baryzentrischen Koordinaten:

k01 = 12.63755936152655
 k02 = 6.01275367424952
 k03 = 1.12675721376590
 k04 = -5.49804847351113
 k05 = 12.63755936152655
 k06 = 6.01275367424952
 k07 = 1.12675721376590
 k08 = -5.49804847351113
 k09 = 5.49804847351113
 k10 = -1.12675721376590
 k11 = -6.01275367424952
 k12 = -12.63755936152655
 k13 = 5.49804847351113
 k14 = -1.12675721376590
 k15 = -6.01275367424952
 k16 = -12.63755936152655

→ NEB. (Summe ==1)nicht erfüllt!

Kombination {100201 (1), 100301 (2), 200201 (3), 300201 (4)}

Bild 1020:

1. Teilprogramm: Strecken

(1,2,3)

s1z =

1.0e+003 *

1.08941888689449

2.43960504658519 + 0.00000000163714i

2.43960504658519 - 0.00000000163714i

2.12727267278890

s2z =

1.0e+003 *
 1.78530110244132
 2.19779647929837 + 0.50155200507233i
 2.19779647929837 - 0.50155200507233i
 1.78530110582903

s3z =
 1.0e+003 *
 1.78530110296367
 2.19779648282575 - 0.50155199981469i
 2.19779648282575 + 0.50155199981469i
 1.78530109957596

(3,4,1)
 s4d =
 1.0e+003 *
 -4.46909223060770 + 9.07120133838203i
 -4.46909223060770 - 9.07120133838203i
 2.12727266681536
 2.12727266372724

→ erste, zweite und dritte Lösung: komplex
 → vierte Lösung: möglich!

2. Teilprogramm:

Baryzentrische Koordinaten für vierte Lösung:

lambda1p = 5.50000004160935
 lambda2p = 1.0000000486179
 lambda3p = 10.0000006327505
 lambda4p = 4.5000003957518
 lambda1m = -5.50000004160935
 lambda2m = -1.0000000486179
 lambda3m = -10.0000006327505
 lambda4m = -4.5000003957518

Kombinationen der baryzentrischen Koordinaten:

k01 = 21.00000014932137
 k02 = 12.00000007017102
 k03 = 1.00000002277127
 k04 = -8.00000005637908
 k05 = 19.00000013959778
 k06 = 10.00000006044743
 k07 = -0.99999998695231
 k08 = -10.00000006610267
 k09 = 10.00000006610267
 k10 = 0.99999998695231
 k11 = -10.00000006044743
 k12 = -19.00000013959778
 k13 = 8.00000005637908
 k14 = -1.00000002277127
 k15 = -12.00000007017102
 k16 = -21.00000014932137

→ NEB. (Summe == 1) erfüllt (k03, k10) → lambda: (1p, 2p, 3m, 4p), (1m, 2p, 3p, 4m)

3- Teilprogramm:

kartesische Koordinaten (k03):

xPO = 4.599999939980858e+002
 yPO = -1.840000006344283e+003
 zPO = -1.530000012421233e+003

kartesische Koordinaten (k10):

xPO = 4.600000104747846e+002
yPO = -2.601410415081773e-006
zPO = 1.530000012421233e+003

Die Projektionszentrumskordinaten von Bild 1020 lauten:

X = 460.000
Y = 0.000
Z = 1530.000

Es konnte nur für das Bild 1020 das Projektionszentrum ermittelt werden, welches exakt den Koordinaten aus der Bündelblockausgleichung entspricht; nicht jedoch für das Bild 1010. Um die Richtigkeit meiner Ergebnisse zu untermauern, habe ich die Strecken der Referenzpunkte zum jeweiligen Projektionszentrum mit Strecken, die mittels der Gröbner Basis nach Awange (2001, Kapitel 3.2.1) ermittelten wurden, verglichen. Awange kam bei Bild 1010 auf folgendes Ergebnis:

Kombination {(1), (2), (3)}

d3 = **1937.23212568193**
 -1937.23212568193
1863.73533004167
 -1863.73533004167
1669.02811756977
 -1669.02811756977
1529.99985287897
 -1529.99985287897

mit dem Wert d3(5,1) ergibt sich

d1 = **1942.95068547243**
 986.04965713407

, mit dem Wert d1(1,1)

d2 = **1995.17437982681**

Kombination {(1), (3), (4)}

d4 = -2872218.51983222 + 2872217.25665147i
 -2872218.51983222 - 2872217.25665147i
 2872218.51983222 + 2872217.25665147i
 2872218.51983222 - 2872217.25665147i
 -1918.04356413625
1918.04356414279
 -1918.0424938989
1918.04249389237

mit dem Wert $d_3(6,1)$ ergibt sich

$$d_1 = \mathbf{1918.04247536289}$$

$$152.911688722691$$

, mit dem Wert $d_1(1,1)$

$$d_3 = 2176.13992924643$$

Bei Bild 1020 erhielt er folgendes Ergebnis:

Kombination $\{(1), (2), (4)\}$

$$d_4 = 2315.74791615453$$

$$-2315.74791615453$$

$$2228.2367083256$$

$$-2228.2367083256$$

$$\mathbf{2127.2726640135}$$

$$-2127.2726640135$$

$$204.198654434977$$

$$-204.198654434977$$

mit dem Wert $d_4(5,1)$ ergibt sich

$$d_1 = \mathbf{2127.27267520458}$$

$$535.751246346218$$

, mit dem Wert $d_1(1,1)$

$$d_2 = \mathbf{1785.30111538557}$$

Kombination $\{(2), (3), (4)\}$

$$d_4 = -1746.15025266832 + 1378.56246565832i$$

$$-1746.15025266832 - 1378.56246565832i$$

$$1746.15025266832 + 1378.56246565832i$$

$$1746.15025266832 - 1378.56246565832i$$

$$\mathbf{2127.2726653137}$$

$$-2127.2726653137$$

$$2041.57572809072$$

$$-2041.57572809072$$

mit dem Wert $d_4(5,1)$ ergibt sich

$$d_2 = \mathbf{1785.30111329289}$$

$$151.167772529465$$

, mit dem Wert $d_1(1,1)$

$$d_3 = \mathbf{1785.30109211041}$$

Awange erzielte demnach durch sein Verfahren die gleichen Streckenergebnisse wie mit dem Verfahren von E. Grafarend, J. Shan (1997a, b).

Damit ist also anzumerken, dass der Rückwärtsschnitt in einem Fall funktioniert, im anderen Fall zu einem falschen Ergebnis führt. Es wäre also in Zukunft zu untersu-

chen, woher das falsche Ergebnis rührt; eine mögliche Schwachstelle des Algorithmus stellt dabei vermutlich die Definition der Raumwinkel dar.

Da die Projektionszentrumskordinaten nur in einem Fall übereinstimmten, habe ich die in der Bündelblockausgleichung ermittelten Koordinaten in das Vorwärtsschnittprogramm als Eingangsgrößen für die dort benötigten Streckenwerte eingesetzt und für die zwei zu bestimmenden Neupunkte folgendes Ergebnis erhalten:

Kombination {100201 (1), 100301 (2), 200201 (3), 300201(4), N: 200301}

XNPsoll = 460
XNPist = 4.599999863013899e+002

YNPsoll = 0
YNPist = -6.609026005797448e-006

ZNPsoll = 153
ZNPist = 1.530000070825242e+002

Kombination {100201 (1), 100301 (2), 200201 (3), 300201 (4), N:300301}

XNPsoll = 460
XNPist = 4.599999863912833e+002

YNPsoll = 920
YNPist = 9.200000041448697e+002

ZNPsoll = 0
ZNPist = 5.386512981431224e-006

Für die obigen Punktfigurationen erhielt man folglich mit den übernommenen Projektionszentrumskordinaten die richtigen Neupunktkoordinaten.

Bei einer anderen Wahl der Punktfiguration wie zum Beispiel {100201 (1), 100301(2), 200201 (3), 200301(4), 300201 (N), 300301 (N)} oder {100201 (1), 100301(2), 300201 (3), 300301(4), 200201 (N), 200301 (N)} musste ich jedoch feststellen, dass keine korrekten Neupunktkoordinaten zu erzielen sind. Eine nötige weitere Untersuchung müsste klären, woran es liegt, dass manche Punktfigurationen das richtige Ergebnis liefern und manche nicht.

4. Ausblick

Aufgabe dieser Studienarbeit war es, den Algorithmus von E. Grafarend, J. Shan (1997a, b) zu implementieren und mit der klassischen Methode der Bündelblockausgleichung zu vergleichen.

Durch die Berechnungen mit Hilfe des Beispieldatensatzes wurden zwei Probleme deutlich. Es war erstens unmöglich, für ein Bild des Stereobildpaares den Rückwärtsschnitt zu berechnen bzw. die Projektionszentrumskoordinaten zu ermitteln. Zweitens konnte zwar der Vorwärtsschnitt mit der Übernahme der bekannten Projektionszentrumskoordinaten aus der PAT-B-Ausgleichung berechnet werden; dieser lieferte aber nur für bestimmte Punktkonfigurationen die korrekten Neupunktkoordinaten.

In Zukunft wäre also zu untersuchen, woher die Probleme bei der Rückwärtsschnittberechnung kommen bzw. warum der Vorwärtsschnitt nur für einige und nicht für alle Punktkonfigurationen das richtige Ergebnis ergibt. Vielleicht würde sich hier auch eine Systematik erkennen lassen.

Ergebnis dieser Studienarbeit ist es demzufolge, dass die implementierten Algorithmen von E. Grafarend, J. Shan (1997a, b) nicht uneingeschränkt verwendbar sind bzw. eine weitere Untersuchung erforderlich machen.

Literaturverzeichnis

- Ansermet, A. (1910): Eine Auflösung des Rückwärtseinschneidens, Zeitschrift des Vereins Schweiz 8 (1910) 88-91
- Awange, J.L. (2001): Gröbner Bases, Multipolynomial Resultants and the Gauss-Jacobi combinatorial algorithms -adjustment of nonlinear GPS/LPS observations-, Dissertation, Universität Stuttgart, Stuttgart 2001
- Grafarend, E.W. (1983): Stochastic models for point manifolds, Mathematical models of geodetic/photogrammetric point determination with regard to outliers und systematic errors, ed. F.E. Ackermann, Report A 98, 29-52, Deutsche Geodätische Kommission, Bayrische Akademie der Wissenschaften, München 1983
- Grafarend, E.W., Lohse, P., Schaffrin, B. (1989): Dreidimensionaler Rückwärtsschnitt, Zeitschrift für Vermessungswesen 114 61-67, 127-137, 172-175, 225-234, 278-287
- Grafarend, E.W., Schaffrin, B. (1993): Ausgleichsrechnung in linearen Modellen, BI Wissenschaftsverlag, Mannheim, Leipzig, Wien, Zürich
- Grafarend, E.W., Shan, J. (1996): A closed-form solution of the nonlinear pseudo-ranging equations (GPS), ARTIFICIAL SATELLITES, Planetary Geodesy No 28, Vol. 31 No3, pp.133-147, Warszawa 1996
- Grafarend, E.W., Shan, J. (1997a): Closed-form solution of P4P or the three-dimensional resection in terms of Möbius barycentric coordinates, Journal of Geodesy 71 (1997) 217-231
- Grafarend, E.W., Shan, J. (1997b): Closed-form solution to the twin P4P or the combined three-dimensional resection-intersection problem in terms of Möbius barycentric coordinates, Journal of Geodesy 71 (1997) 232-239

Kraus, K. (1997): Photogrammetrie – Grundlagen und Standardverfahren – (Band 1),
Dümmler, Bonn 1997

Möbius, A.F. (1827): Der Barycentrische Calcul, A.F. Möbius Gesammelte Werke,
Band I, Wiesbaden, Dr. Martin Sändig oHG., 1967

Pachelski, W. (1994): Possible use of natural (barycentric) coordinates for position-
ing, Technical reports 1994.2, Stuttgart University, Stuttgart 1994

Anhang A Datensatz

Bild 1010 Kammerkonstante: 153000.000 [Angaben in μm]

Pkt.Nr.	x	y
100201	18996.171	- 64147.679
100301	113471.749	- 73694.266
200201	16504.609	16331.646
200301	128830.826	21085.172
300201	13716.588	106386.802
300301	120577.473	128214.823

Bild 1020 Kammerkonstante: 153000.000 [Angaben in μm]

Pkt.Nr.	x	y
100201	- 74705.936	- 71895.580
100301	5436.953	- 78524.687
200201	- 87764.035	7895.436
200301	3212.790	10311.144
300201	- 84849.923	94110.338
300301	802.388	106585.613

Objektkoordinaten [Angaben in m]

Pkt.Nr.	X	Y	Z
100201	-460.000	-920.000	-153.000
100301	460.000	-920.000	0.000
200201	-460.000	0.000	0.000
200301	460.000	0.000	153.000
300201	-460.000	920.000	-153.000
300301	460.000	920.000	0.000

Projektionszentrumskoordinaten [Angaben in m]

Pkt.Nr.	X	Y	Z
1010	-460.000	0.000	1530.000
1020	460.000	0.000	1530.000

Anhang B Matlab-Programme

B1: Rückwärtsschnitt (Teil1)

```

% Grafarend, E.W., Shan, J. (1997a)
% Closed-form solution of P4P or the three-dimensional resection problem
% in terms of Möbius barycentric coordinates
% Journal of Geodesy 71 (1997) 217-231

% Kammerkonstante
f=;

% gegebene Größen
% Bildkoordinaten der 4 Basispunkte
% x-Wert
xb(1,1)=;
xb(1,2)=;
xb(1,3)=;
xb(1,4)=;

% y-Wert
yb(1,1)=;
yb(1,2)=;
yb(1,3)=;
yb(1,4)=;

% z-Wert (für alle Bildkoordinaten gleich)
zb=-f;

% Objektkoordinaten der 4 Basispunkte
% X-Wert
xO(1,1)=;
xO(1,2)=;
xO(1,3)=;
xO(1,4)=;

% Y-Wert
yO(1,1)=;
yO(1,2)=;
yO(1,3)=;
yO(1,4)=;

% Z-Wert
zO(1,1)=;
zO(1,2)=;
zO(1,3)=;
zO(1,4)=;

% 1. Schritt
% Berechnung des Cosinus des Raumwinkels in Form von Bildkoordinaten
for i=1:4
    for j=1:4
        sb(1,j)=sqrt(xb(1,j)^2+yb(1,j)^2+zb^2);
        phi(i,j)=(xb(1,i)*xb(1,j)+yb(1,i)*yb(1,j)+zb^2)/(sb(1,i)*sb(1,j));
    end
end

phi12=phi(1,2)
phi13=phi(1,3)
phi41=phi(1,4)

```

```

phi23=phi(2,3)
phi24=phi(2,4)
phi34=phi(3,4)

% 2. Schritt
% Berechnung der Distanzen zwischen den Basispunkten
for i=1:4
    for j=1:4
        s(i,j)=sqrt((x0(1,i)-x0(1,j))^2+(y0(1,i)-y0(1,j))^2+(z0(1,i)-
            z0(1,j))^2);
    end
end

s12=s(1,2)
s13=s(1,3)
s41=s(4,1)
s23=s(2,3)
s24=s(2,4)
s34=s(3,4)

% 3. Schritt
% Berechnung der Distanzen zwischen den Basispunkten und dem Neupunkt
% Grunert-Gleichungen
% Koeffizienten
b12=s12^2
b13=s13^2
b23=s23^2
b24=s24^2
b34=s34^2
b41=s41^2

a12=-2*phi12
a13=-2*phi13
a23=-2*phi23
a24=-2*phi24
a34=-2*phi34
a41=-2*phi41

% Lösen des zweiten Satzes der Grunert-Gleichungen (b12,b23,b13)
c4z=b12*(b23-b12-b13)^2-a23^2*b12^2*b13
c3z=(b23-b12-b13)*(a13*a23*b12^2+2*a12*b12*(b23-b13))+a23*b12^2*b13*(2*a13-
    a12*a23)
c21z=b12*(a12^2*(b23-b13)^2+2*(b23-b12-b13)*(b12+b23-b13));
c22z=a12*a13*a23*b12^2*(b13+b23)+a23^2*b12^2*(b12-b13)+a13^2*b12^2*(b12-
    b23);
c2z=c21z+c22z
c1z=2*a12*b12*(b23-b13)*(b12+b23-b13)+a13*a23*b12^2*(b23+b13-b12)-
    a12*a13^2*b12^2*b23
c0z=b12*(b12+b23-b13)^2-a13^2*b12^2*b23

% Lösen der Gleichung vierten Grades
cz=[c4z c3z c2z c1z c0z];
y3z=roots(cz);

y31z=y3z(1,1)
y32z=y3z(2,1)
y33z=y3z(3,1)
y23z=y3z(4,1)

```

```

for i=1:4
    x1z(i,1)=sqrt(b12/(1+y3z(i,1)^2+a12*y3z(i,1)));
    x2z(i,1)=x1z(i,1)*y3z(i,1);
    y41z(i,1)=( (b23-b12-b13)*y3z(i,1)^2+a12*(b23-
                b13)*y3z(i,1) ) / (a23*b12*y3z(i,1)-a13*b12);
    y42z(i,1)=(b12+b23-b13) / (a23*b12*y3z(i,1)-a13*b12);
    y4z(i,1)=y41z(i,1)+y42z(i,1);
    x3z(i,1)=y4z(i,1)*x1z(i,1);
    s1z(i,1)=x1z(i,1);
    s2z(i,1)=x2z(i,1);
    s3z(i,1)=x3z(i,1);
end

s1z
s2z
s3z

% Lösen des dritten Satzes der Grunert-Gleichungen (b34,b41,b13)
c4d=b34*(b41-b34-b13)^2-a41^2*b34^2*b13
c3d=(b41-b34-b13)*(a13*a41*b34^2+2*a34*b34*(b41-b13))+a41*b34^2*b13*(2*a13-
    a34*a41)
c21d=b34*(a34^2*(b41-b13)^2+2*(b41-b34-b13)*(b34+b41-b13));
c22d=a34*a13*a41*b34^2*(b13+b41)+a41^2*b34^2*(b34-b13)+a13^2*b34^2*(b34-
    b41);
c2d=c21d+c22d
c1d=2*a34*b34*(b41-b13)*(b34+b41-b13)+a13*a41*b34^2*(b41+b13-b34)-
    a34*a13^2*b34^2*b41
c0d=b34*(b34+b41-b13)^2-a13^2*b34^2*b41

% Lösen der Gleichung vierten Grades
cd=[c4d c3d c2d c1d c0d];
y3d=roots(cd);

y31d=y3d(1,1)
y32d=y3d(2,1)
y33d=y3d(3,1)
y41d=y3d(4,1)

for i=1:4
    x3d(i,1)=sqrt(b34/(1+y3d(i,1)^2+a34*y3d(i,1)));
    x4d(i,1)=x3d(i,1)*y3d(i,1);
    y41d(i,1)=( (b41-b34-b13)*y3d(i,1)^2+a34*(b41-
                b13)*y3d(i,1) ) / (a41*b34*y3d(i,1)-a13*b34);
    y42d(i,1)=(b34+b41-b13) / (a41*b34*y3d(i,1)-a13*b34);
    y4d(i,1)=y41d(i,1)+y42d(i,1);
    x1d(i,1)=y4d(i,1)*x3d(i,1);
    s3d(i,1)=x3d(i,1);
    s4d(i,1)=x4d(i,1);
    s1d(i,1)=x1d(i,1);
end

s4d

% mögliche Strecken
s1z
s2z
s3z
s4d

% Untersuchungen,welche der jeweils 4 möglichen Strecken richtig ist
% y3 (positiv!)
y3z
y3d

```

```
% y4 (positiv!)
y4z
y4d

% alternativ (abgesehen von komplexen Lösungen): Konfiguration
```

B2: Rückwärtsschnitt (Teil2)

```
sp(1,1)=;
sp(2,1)=;
sp(3,1)=;
sp(4,1)=;

% 4. Schritt
% Berechnung der baryzentrischen Koordinaten
w234p=sqrt(1+2*phi23*phi34*phi24-phi23^2-phi34^2-phi24^2)
w412p=sqrt(1+2*phi41*phi12*phi24-phi41^2-phi12^2-phi24^2)
w123p=sqrt(1+2*phi12*phi23*phi13-phi12^2-phi23^2-phi13^2)
w341p=sqrt(1+2*phi34*phi41*phi13-phi34^2-phi41^2-phi13^2)

w234m=-sqrt(1+2*phi23*phi34*phi24-phi23^2-phi34^2-phi24^2)
w412m=-sqrt(1+2*phi41*phi12*phi24-phi41^2-phi12^2-phi24^2)
w123m=-sqrt(1+2*phi12*phi23*phi13-phi12^2-phi23^2-phi13^2)
w341m=-sqrt(1+2*phi34*phi41*phi13-phi34^2-phi41^2-phi13^2)

% Matrix delta
delta(1,1)=x0(1,1);
delta(1,2)=x0(1,2);
delta(1,3)=x0(1,3);
delta(1,4)=x0(1,4);

delta(2,1)=y0(1,1);
delta(2,2)=y0(1,2);
delta(2,3)=y0(1,3);
delta(2,4)=y0(1,4);

delta(3,1)=z0(1,1);
delta(3,2)=z0(1,2);
delta(3,3)=z0(1,3);
delta(3,4)=z0(1,4);

delta(4,1)=1;
delta(4,2)=1;
delta(4,3)=1;
delta(4,4)=1;

gdelta=det(delta);

kdelta=sp(1,1)*sp(2,1)*sp(3,1)*sp(4,1)/gdelta

% baryzentrische Koordinaten des Projektionszentrums
lambda1p=w234p*kdelta/sp(1,1)
lambda2p=w341p*kdelta/sp(2,1)
lambda3p=w412p*kdelta/sp(3,1)
lambda4p=w123p*kdelta/sp(4,1)

lambda1m=w234m*kdelta/sp(1,1)
lambda2m=w341m*kdelta/sp(2,1)
lambda3m=w412m*kdelta/sp(3,1)
lambda4m=w123m*kdelta/sp(4,1)
```

```

% Auswahl der "richtigen" von 2^4=16 lambda-Konfiguration (Bed.:Summe==1)
k01=lambda1p+lambda2p+lambda3p+lambda4p
k02=lambda1p+lambda2p+lambda3p+lambda4m
k03=lambda1p+lambda2p+lambda3m+lambda4p
k04=lambda1p+lambda2p+lambda3m+lambda4m
k05=lambda1p+lambda3p+lambda2m+lambda4p
k06=lambda1p+lambda3p+lambda2m+lambda4m
k07=lambda1p+lambda4p+lambda2m+lambda3m
k08=lambda1p+lambda2m+lambda3m+lambda4m
k09=lambda1m+lambda2p+lambda3p+lambda4p
k10=lambda1m+lambda2p+lambda3p+lambda4m
k11=lambda1m+lambda2p+lambda3m+lambda4p
k12=lambda1m+lambda2p+lambda3m+lambda4m
k13=lambda1m+lambda3p+lambda2m+lambda4p
k14=lambda1m+lambda3p+lambda2m+lambda4m
k15=lambda1m+lambda4p+lambda2m+lambda3m
k16=lambda1m+lambda2m+lambda3m+lambda4m

```

B3: Rückwärtsschnitt (Teil3)

```

lambda1=;      % :=lambda1
lambda2=;      % :=lambda2
lambda3=;      % :=lambda3
lambda4=;      % :=lambda4

% Berechnung der kartesischen Koordinaten
vx(1,1)=lambda1;
vx(1,2)=lambda2;
vx(1,3)=lambda3;
vx(1,4)=lambda4;

a(1,1)=xO(1,1);
a(1,2)=xO(1,2);
a(1,3)=xO(1,3);
a(1,4)=xO(1,4);

a(2,1)=yO(1,1);
a(2,2)=yO(1,2);
a(2,3)=yO(1,3);
a(2,4)=yO(1,4);

a(3,1)=zO(1,1);
a(3,2)=zO(1,2);
a(3,3)=zO(1,3);
a(3,4)=zO(1,4);

a(4,1)=1;
a(4,2)=1;
a(4,3)=1;
a(4,4)=1;

x=a*vx';

% kartesische Koordinaten des Projektionszentrums
xPO=x(1,1)
yPO=x(2,1)
zPO=x(3,1)

```

B4 : Vorwärtsschnitt

```
% Grafarend, E.W.,Shan, J. (1997b)
% Closed-form solution to the twin P4P or the combined three dimensional
% resection-intersection problem in terms of Möbius barycentric coordinates
% Journal of Geodesy 71 (1997) 232-239

% Kammerkonstante
f=;

% gegebene Größen
% Bildkoordinaten der 4 Basispunkte im linken Bild
% x-Wert
xbl(1,1)=;
xbl(1,2)=;
xbl(1,3)=;
xbl(1,4)=;

% y-Wert
ybl(1,1)=;
ybl(1,2)=;
ybl(1,3)=;
ybl(1,4)=;

% z-Wert (für alle Bildkoordinaten gleich)
zbl=-f;

% Bildkoordinaten der 4 Basispunkte im rechten Bild
% x-Wert
xbr(1,1)=;
xbr(1,2)=;
xbr(1,3)=;
xbr(1,4)=;

% y-Wert
ybr(1,1)=;
ybr(1,2)=;
ybr(1,3)=;
ybr(1,4)=;

% z-Wert (für alle Bildkoordinaten gleich)
zbr=-f;

% Bildkoordinaten des zu bestimmenden Neupunktes im linken Bild
% x-Wert
xbln=;
ybln=;
zbln=-f;

% Bildkoordinaten des zu bestimmenden Neupunktes im rechten Bild
% x-Wert
xbrn=;
ybrn=;
zbrn=-f;

% Objektkoordinaten der 4 Basispunkte
% X-Wert
xO(1,1)=;
xO(1,2)=;
xO(1,3)=;
xO(1,4)=;

% Y-Wert
```

```

yO(1,1)=;
yO(1,2)=;
yO(1,3)=;
yO(1,4)=;

% Z-Wert
zO(1,1)=;
zO(1,2)=;
zO(1,3)=;
zO(1,4)=;

% Strecken der Basispunkte zu den Projektionszentren
% aus Rückwärtsschnitt: Grunert-Gleichungen!
% linkes Projektionszentrum
sPl(1,1)=;
sPl(1,2)=;
sPl(1,3)=;
sPl(1,4)=;

% rechtes Projektionszentrum
sPr(1,1)=;
sPr(1,2)=;
sPr(1,3)=;
sPr(1,4)=;

sPl
sPr

% 1. Schritt
% Berechnung der Streckenverhältnisse (Maßstab)
for i=1:4
    sbl(1,i)=sqrt(xbl(1,i)^2+ybl(1,i)^2+zbl^2);
    sbr(1,i)=sqrt(xbr(1,i)^2+ybr(1,i)^2+zbr^2);
end

sbl
sbr

for i=1:4
    sl(1,i)=sPl(1,i)/sbl(1,i);
    sr(1,i)=sPr(1,i)/sbr(1,i);
end

sl
sr

% 2. Schritt
% Berechnung der Flächenelemente (bezüglich delta1l=delta1r und del-
ta2l=delta2r)
% bezüglich linkem Bild
p=0.5;
al234=p*(((xbl(1,2)-xbl(1,3))*(ybl(1,2)-ybl(1,4))-(ybl(1,2)-
ybl(1,3))*(xbl(1,2)-xbl(1,4))))
alp34=p*(((xbln-xbl(1,3))*(ybln-ybl(1,4))-(ybln-ybl(1,3))*(xbln-xbl(1,4))))
alp24=p*(((xbln-xbl(1,2))*(ybln-ybl(1,4))-(ybln-ybl(1,2))*(xbln-xbl(1,4))))
alp23=p*(((xbln-xbl(1,2))*(ybln-ybl(1,3))-(ybln-ybl(1,2))*(xbln-xbl(1,3))))
al134=p*(((xbl(1,1)-xbl(1,3))*(ybl(1,1)-ybl(1,4))-(ybl(1,1)-
ybl(1,3))*(xbl(1,1)-xbl(1,4))))
al1p4=p*(((xbl(1,1)-xbln)*(ybl(1,1)-ybl(1,4))-(ybl(1,1)-ybln)*(xbl(1,1)-
xbl(1,4))))
al1p3=p*(((xbl(1,1)-xbln)*(ybl(1,1)-ybl(1,3))-(ybl(1,1)-ybln)*(xbl(1,1)-
xbl(1,3))))

```



```

% bezüglich rechtem Bild
ar234=p*((xbr(1,2)-xbr(1,3))*(ybr(1,2)-ybr(1,4))-(ybr(1,2)-
ybr(1,3))*(xbr(1,2)-xbr(1,4))))
arp34=p*((xbrn-xbr(1,3))*(ybrn-ybr(1,4))-(ybrn-ybr(1,3))*(xbrn-xbr(1,4)))
arp24=p*((xbrn-xbr(1,2))*(ybrn-ybr(1,4))-(ybrn-ybr(1,2))*(xbrn-xbr(1,4)))
arp23=p*((xbrn-xbr(1,2))*(ybrn-ybr(1,3))-(ybrn-ybr(1,2))*(xbrn-xbr(1,3)))
ar134=p*((xbr(1,1)-xbr(1,3))*(ybr(1,1)-ybr(1,4))-(ybr(1,1)-
ybr(1,3))*(xbr(1,1)-xbr(1,4))))
ar1p4=p*((xbr(1,1)-xbrn)*(ybr(1,1)-ybr(1,4))-(ybr(1,1)-ybrn)*(xbr(1,1)-
xbr(1,4))))
ar1p3=p*((xbr(1,1)-xbrn)*(ybr(1,1)-ybr(1,3))-(ybr(1,1)-ybrn)*(xbr(1,1)-
xbr(1,3))))

% Aufstellen der A-Matrix und des y-Vektors; Berechnung des x-Vektors
% mit x:= Streckenverhältnisse Neupunkt-Projektionszentren
a(1,1)=sl(1,2)*sl(1,3)*sl(1,4)*(sl(1,2)^-1*alp34-sl(1,3)^-
1*alp24+sl(1,4)^-1*alp23);
a(1,2)=-sr(1,2)*sr(1,3)*sr(1,4)*(sr(1,2)^-1*arp34-sr(1,3)^-
1*arp24+sr(1,4)^-1*arp23);
a(2,1)=sl(1,1)*sl(1,3)*sl(1,4)*(sl(1,1)^-1*alp34+sl(1,3)^-1*al1p4-
sl(1,4)^-1*al1p3);
a(2,2)=-sr(1,1)*sr(1,3)*sr(1,4)*(sr(1,1)^-1*arp34+sr(1,3)^-1*ar1p4-
sr(1,4)^-1*ar1p3);

y(1,1)=sl(1,2)*sl(1,3)*sl(1,4)*al234-sr(1,2)*sr(1,3)*sr(1,4)*ar234;
y(1,2)=sl(1,1)*sl(1,3)*sl(1,4)*al134-sr(1,1)*sr(1,3)*sr(1,4)*ar134;

a
y

x=(a^-1)*y'
ssl=x(1,1)
ssr=x(2,1)

% 3. Schritt
% Berechnung der Möbius baryzent. Koordinaten (hier: Bildkoordinaten des
li. Bildes)
% Matrix delta
delta(1,1)=xbl(1,1);
delta(1,2)=xbl(1,2);
delta(1,3)=xbl(1,3);
delta(1,4)=xbl(1,4);

delta(2,1)=ybl(1,1);
delta(2,2)=ybl(1,2);
delta(2,3)=ybl(1,3);
delta(2,4)=ybl(1,4);

delta(3,1)=zbl;
delta(3,2)=zbl;
delta(3,3)=zbl;
delta(3,4)=zbl;

delta(4,1)=sl(1,1)^-1;
delta(4,2)=sl(1,2)^-1;
delta(4,3)=sl(1,3)^-1;
delta(4,4)=sl(1,4)^-1;

% Matrix delta1
delta1(1,1)=xbln;
delta1(1,2)=xbl(1,2);
delta1(1,3)=xbl(1,3);
delta1(1,4)=xbl(1,4);

```

```
delta1(2,1)=ybln;
delta1(2,2)=ybl(1,2);
delta1(2,3)=ybl(1,3);
delta1(2,4)=ybl(1,4);

delta1(3,1)=zbln;
delta1(3,2)=zbl;
delta1(3,3)=zbl;
delta1(3,4)=zbl;

delta1(4,1)=ssl^-1;
delta1(4,2)=s1(1,2)^-1;
delta1(4,3)=s1(1,3)^-1;
delta1(4,4)=s1(1,4)^-1;

% Matrix delta2
delta2(1,1)=xbl(1,1);
delta2(1,2)=xbln;
delta2(1,3)=xbl(1,3);
delta2(1,4)=xbl(1,4);

delta2(2,1)=ybl(1,1);
delta2(2,2)=ybln;
delta2(2,3)=ybl(1,3);
delta2(2,4)=ybl(1,4);

delta2(3,1)=zbl;
delta2(3,2)=zbl;
delta2(3,3)=zbl;
delta2(3,4)=zbl;

delta2(4,1)=s1(1,1)^-1;
delta2(4,2)=ssl^-1;
delta2(4,3)=s1(1,3)^-1;
delta2(4,4)=s1(1,4)^-1;

% Matrix delta3
delta3(1,1)=xbl(1,1);
delta3(1,2)=xbl(1,2);
delta3(1,3)=xbln;
delta3(1,4)=xbl(1,4);

delta3(2,1)=ybl(1,1);
delta3(2,2)=ybl(1,2);
delta3(2,3)=ybln;
delta3(2,4)=ybl(1,4);

delta3(3,1)=zbl;
delta3(3,2)=zbl;
delta3(3,3)=zbln;
delta3(3,4)=zbl;

delta3(4,1)=s1(1,1)^-1;
delta3(4,2)=s1(1,2)^-1;
delta3(4,3)=ssl^-1;
delta3(4,4)=s1(1,4)^-1;

% Matrix delta4
delta4(1,1)=xbl(1,1);
delta4(1,2)=xbl(1,2);
delta4(1,3)=xbl(1,3);
delta4(1,4)=xbln;
```

```
delta4(2,1)=yb1(1,1);
delta4(2,2)=yb1(1,2);
delta4(2,3)=yb1(1,3);
delta4(2,4)=yb1n;

delta4(3,1)=zbl;
delta4(3,2)=zbl;
delta4(3,3)=zbl;
delta4(3,4)=zbln;

delta4(4,1)=sl(1,1)^-1;
delta4(4,2)=sl(1,2)^-1;
delta4(4,3)=sl(1,3)^-1;
delta4(4,4)=ssl^-1;

% Determinanten der "delta"-Matrizen
ddelta=det(delta)
ddelta1=det(delta1)
ddelta2=det(delta2)
ddelta3=det(delta3)
ddelta4=det(delta4)

lambda1=(ssl*ddelta1)/(sl(1,1)*ddelta)
lambda2=(ssl*ddelta2)/(sl(1,2)*ddelta)
lambda3=(ssl*ddelta3)/(sl(1,3)*ddelta)
lambda4=(ssl*ddelta4)/(sl(1,4)*ddelta)

% Berechnung der Objektkoordinaten des Neupunktes
lambda(1,1)=lambda1;
lambda(1,2)=lambda2;
lambda(1,3)=lambda3;
lambda(1,4)=lambda4;

aO(1,1)=xO(1,1);
aO(1,2)=xO(1,2);
aO(1,3)=xO(1,3);
aO(1,4)=xO(1,4);

aO(2,1)=yO(1,1);
aO(2,2)=yO(1,2);
aO(2,3)=yO(1,3);
aO(2,4)=yO(1,4);

aO(3,1)=zO(1,1);
aO(3,2)=zO(1,2);
aO(3,3)=zO(1,3);
aO(3,4)=zO(1,4);

aO(4,1)=1;
aO(4,2)=1;
aO(4,3)=1;
aO(4,4)=1;

XN=aO*lambda'

% Objektkoordinaten des Neupunktes
XNP=XN(1,1)
YNP=XN(2,1)
ZNP=XN(3,1)
```