



STUDIENGANG VERMESSUNGSWESEN
an der Universität Stuttgart

Selbständige Geodätische Arbeit

GERHARD JOOS

Pseudokonische und
Pseudoazimutale Abbildungen

Stuttgart 1989



Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Grundlagen	3
3	Hauptstreckungen	5
4	Kriterien zur Ableitung von Kartenprojektionen	9
4.1	Konformität	9
4.1.1	Einige Beispiele für konforme Abbildungen	12
4.2	Flächentreue	13
4.3	Äquidistanz	14
5	Abwickelbare Drehflächen	15
6	Klassifizierung von Kartenprojektionen	16
7	Pseudokegelabbildungen	17
7.1	Parametrisierung der Mannigfaltigkeiten	17
7.2	Abbildungsgleichungen	18
7.3	Flächentreue Pseudokonische Projektion	19
7.3.1	Der Nordpol fällt mit dem Ursprung des Koordinatensystems zusammen	21
7.3.2	Hauptparallelkreis wird mittabstandstreu abgebildet	23
7.3.3	Biographie der BONNEschen Abbildung	25
8	Pseudoazimutale Abbildungen	26
8.1	Parametrisierung der Mannigfaltigkeiten	26
8.2	Abbildungsvorschriften	27
8.3	Flächentreue pseudoazimutale Abbildung	28
8.4	Äquidistante pseudoazimutale Abbildung	30
9	Programm-Listing	33
10	Literatur	40



1 Einleitung

Die Kartenprojektionslehre ist ein Gebiet mit einer langen Geschichte, zu der Wissenschaftler verschiedenster Disziplinen wie Geodäsie, Mathematik oder Geographie beigetragen haben. Es gibt unendlich viele Möglichkeiten, eine gekrümmte Fläche, wie die Erdoberfläche eine darstellt, in die ebene Karte zu projizieren. John P. Snyder und Harry Steward haben zum Beispiel eine Liste mit 2551 Büchern und veröffentlichten Artikeln von vor dem 15. Jahrhundert bis heute zusammengestellt (J.P. Snyder & H. Steward [1988]).

In dieser Selbständigen Geodätischen Arbeit werde ich einige Vertreter der pseudokonischen und pseudoazimutalen Abbildungen ableiten, bei welchen die Meridiane gekrümmt abgebildet werden. Die Hin- und Rücktransformation von geographischer Länge und Breite in zweidimensionale, kartesische Koordinaten kann mit Abbildungsgleichungen beschrieben werden. Doch gleichzeitig kann dies auch als eine einfache Koordinatentransformation der ganzen Erdoberfläche oder von Teilen aufgefaßt werden, und kann dann, wie es bei Landeskoordinatensystemen getan wird, als zweidimensionale, euklidische Koordinaten behandelt werden. Dabei müssen allerdings gewisse Verzerrungen in Kauf genommen werden, deren Größe ein Maß für die Güte eines solchen Systems ist. Darum kann in einer Karte auch kein einheitlicher Maßstab gelten, und die Angaben bei den Abbildungen in dieser Arbeit beziehen sich auf die maßstäbliche Verkleinerung der Bezugskugel (als Bezugsfläche wird immer die Kugel gewählt) und nicht auf die Abbildung als solche.

Abstract

The theory of Map Projections is a subject with a long history, where scientists of several disciplines e.g. Geodesy, Mathematics or Geography were involved. There is an infinite number of ways to project a curved surface, like the Earth topography, onto a flat map. John P. Snyder and Harry Steward have already collected a list of 2551 books and published articles from pre 1500 until present (J.P. Snyder & H. Steward [1988]).

In this thesis I will derive some representatives of the Pseudoconical and Pseudoazimutal class, where the meridians are represented by concurrent, curved lines. The direct and inverse transformations of the geodetic latitude and longitude into two-dimensional Cartesian map coordinates, and vice versa, can be written in terms of mapping equations. But it can also be considered as a simple coordinate transformation of the entire Earth or a local area, and thus be treated as a two-dimensional, Euclidean manifold, as it is done in cadastral systems. You always have to take a certain stretching into account, and its magnitude is a measure of the quality of such a system. Therefore a map never has an unique scale, and the quantities given in the figures refer to the magnification of the sphere and not to the projection itself. In this thesis as the reference figure of the Earth only the sphere is used.



2 Grundlagen

Die Punkte eines Flächenstückes $\mathbf{X}(U^1, U^2)$ mit den Parametern $U := (U^1, U^2)$ sollen über eine Funktion $\varphi : U \mapsto u$ auf ein Flächenstück $\mathbf{x}(u^1, u^2)$ mit $u := (u^1, u^2)$ als Parameter abgebildet werden. Zu Ehren von C.F. GAUSS wird dessen Notation übernommen, die Größen, welche den Urbildbereich beschreiben, in Großbuchstaben darzustellen, entsprechend zur Unterscheidung den Bildbereich ausschließlich in kleinen Lettern.

Unter den Flächen \mathbf{X} und \mathbf{x} versteht man die differenzierbare Abbildung $\mathbf{X} : U \mapsto \mathbb{R}^3$, bzw. $\mathbf{x} : u \mapsto \mathbb{R}^3$, so daß jedem Punkt dieser Flächen eindeutig ein Tangentialraum zugeordnet werden kann, der durch die Tangentialvektoren $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2$ bzw. $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$ aufgespannt wird.

$$\mathbf{G}_1 = \frac{\partial \mathbf{X}(U^1, U^2)}{\partial U^1}, \mathbf{G}_2 = \frac{\partial \mathbf{X}(U^1, U^2)}{\partial U^2} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{g}_1 = \frac{\partial \mathbf{x}(u^1, u^2)}{\partial u^1}, \mathbf{g}_2 = \frac{\partial \mathbf{x}(u^1, u^2)}{\partial u^2} \quad (1)$$

In diesen Tangentialräumen wird von dem Skalarprodukt im \mathbb{R}^3 eine quadratische Form induziert, die *erste Fundamentalform* genannt und mit I (römisch Eins) bezeichnet wird.

$$I(U^1, U^2) := G_{11}(dU^1)^2 + 2G_{12}dU^1dU^2 + G_{22}(dU^2)^2 \quad (2)$$

Die Elemente dieser ersten Fundamentalform G_{IJ} bilden die sogenannte Fundamentalmatrix und sind über das Skalarprodukt der Tangentialvektoren $\mathbf{G}_I, \mathbf{G}_J$ definiert:

$$G_{IJ} := \mathbf{G}_I \cdot \mathbf{G}_J \quad I, J = 1, 2 \quad (3)$$

Hieraus ist ersichtlich, daß $G_{12} = G_{21}$ ist, und somit die Matrix der ersten Fundamentalform immer symmetrisch ist. Da diese Fundamentalform eine Aussage über die differentiellen Längenverhältnisse auf einer Fläche macht, wird sie auch als die Metrik einer Fläche bezeichnet und mit dS^2 bzw. ds^2 abgekürzt, wobei dS ein Linienelement darstellt, das vom Ort und von der Richtung abhängt, also auch eine Funktion von dU^1 und dU^2 ist.

Es stehen nun also zwei metrische Informationen zur Verfügung, die verglichen werden müssen, um Eigenschaften der Abbildung φ angeben zu können. Noch beziehen sich allerdings die beiden Fundamentalgroßen auf verschiedene Parameter, d.h. eine der beiden muß auf die Parameter der anderen transformiert werden.

$$\tilde{\mathbf{x}} := \mathbf{x} \circ \varphi : U \mapsto \mathbb{R}^3 \quad (4)$$

Die Funktion $\varphi : U \mapsto u$, nimmt diese Transformation vor, und wird im weiteren Text als Abbildung oder Projektion bezeichnet. Diese Parametertransformation heißt orientierungstreu, falls $\det d\varphi > 0$ ist (W. Klingenberg [1973]). Zwischen den Fundamentelementen \tilde{g}_{ij} von $\tilde{\mathbf{x}} := \mathbf{x} \circ \varphi$, also in transformierter Form, und g_{ij} von \mathbf{x} besteht die Beziehung

$$\tilde{g}_{KL}(U) = \sum_{k,l} \frac{\partial u^k}{\partial U^K} \frac{\partial u^l}{\partial U^L} g_{kl}(\varphi(U)). \quad (5)$$

Der Beweis ist bei W. Klingenberg [1973] zu finden. Dieser neue, transformierte Metriktensor wird zu Ehren von G. Green GREEN-Deformationstensor genannt, und mit $c_{KL} := \tilde{g}_{KL}$ abgekürzt.

Mit der EINSTEINschen Summenkonvention, wie im Tensorkalkül üblich, kann auch vereinfachend geschrieben werden:

$$c_{KL} := g_{ki} u_K^k u_L^i \quad (6)$$



Mit diesen Größen kann nun ein Maßstab der Abbildung in einem Punkt abhängig von der Richtung errechnet werden. Dieser Maßstab, auch Streckung Λ genannt, ist der Quotient aus den Fundamentalförmern des Urbildes und des Bildbereiches über die Abbildung φ in den Parametern des Urbildes (U^1, U^2) . Der Term

$$\Lambda(U^1, U^2, dU^1, dU^2) = \frac{\sqrt{c_{11}(dU^1)^2 + 2c_{12}dU^1dU^2 + c_{22}(dU^2)^2}}{\sqrt{G_{11}(dU^1)^2 + 2G_{12}dU^1dU^2 + G_{22}(dU^2)^2}} \quad (7)$$

gibt somit die Streckung des Abbildes in einem Punkt U^1, U^2 in beliebige Richtung $\frac{dU^2}{dU^1}$ an. Für die Streckung entlang U -Parameterlinien gilt daher:

- $U^1 = \text{const} \implies dU^1 = 0 \quad \Lambda(dU^1 = 0) = \sqrt{\frac{c_{22}}{G_{22}}}$
- $U^2 = \text{const} \implies dU^2 = 0 \quad \Lambda(dU^2 = 0) = \sqrt{\frac{c_{11}}{G_{11}}}$

Zur Vereinfachung der Schreibweise sollen für die Streckungen der Parameterkurven nach H. Merkel [1956] die Abkürzungen h und k eingeführt werden:

$$h = \Lambda(dU^2 = 0) = \sqrt{\frac{c_{11}}{G_{11}}} \quad \text{und} \quad k = \Lambda(dU^1 = 0) = \sqrt{\frac{c_{22}}{G_{22}}} \quad (8)$$

Nun fallen aber die Richtungen mit den größten Verzerrungen nicht notwendigerweise mit den Richtungen der Parameterlinien zusammen. Deswegen muß nach den Richtungen gesucht werden, in denen die Streckungen den maximalen oder minimalen Wert annehmen. Diese Extremwerte werden *Hauptstreckungen* (Λ_1, Λ_2) genannt und die zugehörigen Richtungen *Hauptstreckungsrichtungen*. Sie können entweder im Sinne einer *Extremwertaufgabe* berechnet werden, oder wie im folgenden Kapitel über die *allgemeine Eigenwertaufgabe* abgeleitet werden.



3 Hauptstreckungen

Die Elemente u_j^i stellen die partiellen Ableitungen von u^i nach U^j dar und bilden die Jacobimatrix dieser Transformation $d\varphi = (\frac{\partial u^i}{\partial U^j})$. Möchte man (c_{KL}) mit Matrizen berechnen, so gilt die Rechenregel

$$(c_{KL}) = (u_K^k)^T (g_{ki}) (u_L^i) \quad (9)$$

Bei hermiteschem (reell symmetrischem) (g_{ki}) und nicht singulärer Transformation (u_K^k) führt dies wiederum zu einer hermiteschen Matrix (c_{KL}) .

$$(c_{KL}) = \begin{bmatrix} g_{11}(u_1^1)^2 + 2g_{12}u_1^1u_1^2 + g_{22}(u_1^2)^2 & g_{11}(u_1^1)(u_2^1) + g_{12}(u_1^1u_2^2 + u_1^2u_2^1) + g_{22}u_1^2u_2^2 \\ g_{11}(u_1^1)(u_2^1) + g_{12}(u_1^1u_2^2 + u_1^2u_2^1) + g_{22}u_1^2u_2^2 & g_{11}(u_2^1)^2 + 2g_{12}u_2^1u_2^2 + g_{22}(u_2^2)^2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Dadurch sind die Voraussetzungen für den Satz über unitäre Eigenvektoren (Zurmühl [1964]) erfüllt: Ein Paar hermitescher (reell symmetrischer) Matrizen, von denen A beliebig und B positiv definit ist, läßt sich durch eine gemeinsame Hermitesche (bzw Reelle) Kongruenztransformation $\mathbf{x} = X\mathbf{y}$ gleichzeitig auf Diagonalform überführen nach

$$\begin{array}{l} X^T A X = \Lambda \\ X^T B X = I \end{array}, \quad (11)$$

wobei A in die Diagonalmatrix Λ der reellen Eigenwerte, B in die Einheitsmatrix übergeht. Transformationsmatrix X ist die Matrix der bezüglich B unitären (bzw reell orthogonalen) Eigenvektoren des Matrizenpaares.

Dies führt zu dem Normalformenproblem für lineare Operatoren (Bronstein-Semendjajew [1985]):

$$A\mathbf{x} = \lambda B\mathbf{x} \quad \Leftrightarrow \quad (A - \lambda B)\mathbf{x} = 0 \quad (12)$$

ist ein homogenes lineares Gleichungssystem, dessen nichttriviale Lösungen die gesuchten Eigenvektoren sind. Dieses Gleichungssystem hat genau dann nichttriviale Lösungen, wenn der Rang $\text{rk}(A - \lambda B) < 2$ ist, oder anders ausgedrückt, wenn die Matrix $(A - \lambda B)$ singulär ist, also die Determinante dieser Matrix $\det(A - \lambda B)$ verschwindet.

Für die Fundamentalförmeln bedeutet dies

$$\det((c_{KL}) - \Lambda^2(G_{KL})) = 0 \quad (13)$$

und die Eigenwerte entsprechen den Hauptstreckungen, die Eigenvektoren den Hauptstreckungsrichtungen. Die Eigenwertaufgabe wurde mit Λ^2 formuliert und nicht mit Λ , damit die Eigenwerte direkt als Hauptstreckungen interpretiert werden können.

Angenommen der G. GREEN - Deformationstensor c_{KL} und der C. F. GAUSS Metrikstensor des Urbildes G_{KL} seien gegeben, dann lassen sich die Hauptstreckungen Λ_1 und Λ_2 aus der allgemeinen Eigenwertaufgabe bzw. aus der charakteristischen Gleichung $|c_{KL} - \Lambda^2 G_{KL}| = 0$ bestimmen.

$$(c_{KL}) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad (G_{KL}) = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{12} & G_{22} \end{bmatrix} \quad (14)$$



Durch Einsetzen der Tensorelemente in Indexschreibweise nimmt die Determinante folgende Form an

$$|c_{KL} - \Lambda^2 G_{KL}| = 0 \quad (15)$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} c_{11} - \Lambda^2 G_{11} & c_{12} - \Lambda^2 G_{12} \\ c_{12} - \Lambda^2 G_{12} & c_{22} - \Lambda^2 G_{22} \end{vmatrix} = 0 \quad (16)$$

$$\Leftrightarrow (c_{11} - \Lambda^2 G_{11})(c_{22} - \Lambda^2 G_{22}) - (c_{12} - \Lambda^2 G_{12})^2 = 0 \quad (17)$$

$$\Leftrightarrow (G_{11}G_{22} - G_{12}^2)(\Lambda^2)^2 - (c_{11}G_{22} + c_{22}G_{11} - 2c_{12}G_{12})\Lambda^2 + (c_{11}c_{22} - c_{12}^2) = 0 \quad (18)$$

Diese Gleichung wird als das *charakteristische Polynom* bezeichnet.

Durch die Substitutionen

$$\begin{aligned} A &:= \det G = G_{11}G_{22} - G_{12}^2 \\ B &:= \det G \cdot \text{tr}(CG^{-1}) = c_{11}G_{22} + c_{22}G_{11} - 2c_{12}G_{12} \\ D &:= \det C = c_{11}c_{22} - c_{12}^2 \end{aligned} \quad (19)$$

$$\text{und } x := \Lambda^2$$

hat das charakteristische Polynom die Form

$$Ax^2 - Bx + D = 0 \quad (20)$$

Die beiden reellen Lösungen dieser Parabelgleichung geben die Quadrate der Hauptstreckungen an.

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{B + \sqrt{B^2 - 4AD}}{2A} & x_2 &= \frac{B - \sqrt{B^2 - 4AD}}{2A} \\ \Rightarrow \Lambda_{1/3} &= +\sqrt{x_1} = + \left[\frac{B + \sqrt{B^2 - 4AD}}{2A} \right]^{1/2} & \Lambda_{2/4} &= \pm\sqrt{x_2} = \left[\frac{B - \sqrt{B^2 - 4AD}}{2A} \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (21)$$

Da die Verzerrungen nur für positive Werte Λ definiert sind, können die negativen Lösungen Λ_3 und Λ_4 in der weiteren Berechnung vernachlässigt werden, die allgemeine Form der Hauptstreckungen als Funktion der Elemente des Metrikensors G_{KL} und des Deformationstensors c_{KL} lauten somit

$$\Lambda_1 = \left[\frac{c_{11}G_{22} + c_{22}G_{11} - 2c_{12}G_{12} + \sqrt{(c_{11}G_{22} + c_{22}G_{11} - 2c_{12}G_{12})^2 - 4(G_{11}G_{22} - G_{12}^2)(c_{11}c_{22} - c_{12}^2)}}{2(G_{11}G_{22} - G_{12}^2)} \right]^{1/2}$$

und

$$\Lambda_2 = \left[\frac{c_{11}G_{22} + c_{22}G_{11} - 2c_{12}G_{12} - \sqrt{(c_{11}G_{22} + c_{22}G_{11} - 2c_{12}G_{12})^2 - 4(G_{11}G_{22} - G_{12}^2)(c_{11}c_{22} - c_{12}^2)}}{2(G_{11}G_{22} - G_{12}^2)} \right]^{1/2}$$

Die Formulierung der allgemeinen Eigenwertaufgabe $|c_{KL} - \Lambda^2 G_{KL}| = 0$ läßt sich für den Fall, daß (G_{KL}) nicht singular ist, durch Linksmultiplikation mit $(G_{KL})^{-1}$ auf das spezielle Eigenwertproblem zurückführen (Zurmühl [1964]):

$$|c_{KL} - \Lambda^2 G_{KL}| = 0 \Leftrightarrow |(G_{KL})^{-1}c_{KL} - \Lambda^2 I| = 0. \quad (22)$$

Diese Aussage läßt sich mit einem Satz aus der Determinantentheorie beweisen (Zurmühl [1964]). Die Determinante $\det(AB)$ eines Matrizenproduktes AB zweier quadratischer Matrizen ist gleich dem Produkt der Determinanten der beiden Faktoren:



$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) \quad (23)$$

und es gilt daher auch $\det(AB) = \det(BA)$. Voraussetzung ist allerdings, es existiert die Inverse $(G_{KL})^{-1}$ der Matrix (G_{KL}) , d.h. (G_{KL}) ist nicht singulär, aber ein Metriktensor ist nach seiner Definition sogar positiv definit, also kann das Eigenwertproblem des Matrizenpaares (G_{KL}) und (c_{KL}) auf das spezielle Eigenwertproblem einer Matrix, nämlich $(G_{KL})^{-1}(c_{KL})$, zurückgeführt werden. Die beiden Determinantengleichungen sind äquivalent und führen auf das selbe charakteristische Polynom.

Um wiederum Zurmühl zu zitieren, so läßt sich mit den Wurzelsätzen von VIETA zeigen, daß die Spur einer Matrix der Summe ihrer Eigenwerte und die Determinante deren Produkt entspricht. Da C und G symmetrische 2×2 Matrizen sind gilt $G^{-1}C = (CG^{-1})^T$, Beweis durch Einsetzen. Auf dieses Problem übertragen bedeutet das:

$$\text{tr}(G^{-1}C) = \text{tr}(CG^{-1}) = \Lambda_1^2 + \Lambda_2^2 \quad (24)$$

$$\det(G^{-1}C) = \det(CG^{-1}) = \Lambda_1^2 \cdot \Lambda_2^2 = \frac{\det C}{\det G} \quad (25)$$

Die Quadrate der Hauptstreckungen entstehen dadurch, daß das Problem nicht mit $|A - \Lambda I| = 0$, wie in der Matrizenrechnung üblich, sondern mit $|A - \Lambda^2 I| = 0$ formuliert wurde. Der Grund hierfür ist, daß die Hauptverzerrungen sich auf das Verhältnis der Bogenelemente und nicht deren Quadrate beziehen sollen. Welche Bedingungen an die Matrizen (c_{KL}) und (G_{KL}) gestellt werden, daß Λ_1^2 oder Λ_2^2 nicht negativ und damit Λ_1 oder Λ_2 komplex würden, ist am Anfang dieses Kapitels diskutiert.

Ausgeschrieben in den Elementen von C und G hat die Matrix CG^{-1} folgende Gestalt:

$$CG^{-1} = \frac{1}{G_{11}G_{22} - G_{12}^2} \begin{bmatrix} c_{11}G_{22} - c_{12}G_{12} & c_{12}G_{11} - c_{11}G_{12} \\ c_{12}G_{22} - c_{22}G_{12} & c_{22}G_{11} - c_{12}G_{12} \end{bmatrix} \quad (26)$$

Damit berechnet sich deren Spur und Determinante zu

$$\text{tr}(CG^{-1}) = \frac{c_{11}G_{22} - 2c_{12}G_{12} + c_{22}G_{11}}{G_{11}G_{22} - G_{12}^2} \quad (27)$$

$$\det(CG^{-1}) = \frac{\det C}{\det G} = \frac{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}{G_{11}G_{22} - G_{12}^2}$$

Setzt man einmal voraus, daß $G_{12} \equiv 0$ ist, dies bedeutet, daß die Urbildmannigfaltigkeit orthogonal parametrisiert wurde, so ergibt sich für die Spur des Matrizenproduktes

$$\text{tr}(CG^{-1}) = \frac{c_{11}G_{22} + c_{22}G_{11}}{G_{11}G_{22}} \quad (28)$$

Dies ist genau die Quadratsumme der Streckungen entlang der Parameterlinien, wie sie im Kapitel 2 abgeleitet wurden:

$$(\Lambda(dU^1 = 0))^2 + (\Lambda(dU^2 = 0))^2 = \frac{c_{22}}{G_{22}} + \frac{c_{11}}{G_{11}} = \frac{c_{11}G_{22} + c_{22}G_{11}}{G_{11}G_{22}} \quad (29)$$

$$\Rightarrow \text{tr}(CG^{-1}) = (\Lambda(dU^1 = 0))^2 + (\Lambda(dU^2 = 0))^2 \quad (30)$$

Mit den in Grundlagen eingeführten Größen h und k läßt sich daher für Flächen mit $G_{12} = 0$ schreiben:

$$\boxed{(\Lambda_1)^2 + (\Lambda_2)^2 = h^2 + k^2} \quad (31)$$



Bildet man nun die Summe und Differenz der Eigenwerte, so ergibt sich durch einfache polynomische Umformungen

$$\Lambda_1 + \Lambda_2 = \sqrt{\Lambda_1^2 + \Lambda_2^2 + 2\Lambda_1\Lambda_2} = \sqrt{h^2 + k^2 + 2\sqrt{\det CG^{-1}}} \quad (32)$$

$$\Lambda_1 - \Lambda_2 = \sqrt{\Lambda_1^2 + \Lambda_2^2 - 2\Lambda_1\Lambda_2} = \sqrt{h^2 + k^2 - 2\sqrt{\det CG^{-1}}} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} 32+33: \quad \Lambda_1 &= \frac{1}{2} \left[\sqrt{h^2 + k^2 + 2\sqrt{\det CG^{-1}}} + \sqrt{h^2 + k^2 - 2\sqrt{\det CG^{-1}}} \right] \\ 32-33: \quad \Lambda_2 &= \frac{1}{2} \left[\sqrt{h^2 + k^2 + 2\sqrt{\det CG^{-1}}} - \sqrt{h^2 + k^2 - 2\sqrt{\det CG^{-1}}} \right] \end{aligned} \quad (34)$$

Diese Formeln sind nützlich, wenn die Hauptstreckungen von gegebenen Abbildungen berechnet werden sollen, denn damit kann die Lösung des charakteristischen Polynoms vermieden werden, und die Größen h und k sind ohnehin von Interesse.



4 Kriterien zur Ableitung von Kartenprojektionen

In diesem Abschnitt werden Kriterien diskutiert, nach denen beliebige Flächen auf andere Flächen abgebildet werden können. Außerdem wird der Zusammenhang dieser Bedingungen und den Größen G_{KL} und c_{KL} abgeleitet. Es werden drei Kriterien unterschieden:

1. Konformität
2. Flächentreue
3. Äquidistanz

Die Reihenfolge spiegelt deren Bedeutung wieder, welche sie z.B. als Grundlage für ein Landeskoordinatensystem haben.

4.1 Konformität

Die notwendige Bedingung für eine winkeltreue Abbildung sagt, daß die Streckungen in allen Richtungen gleich groß sein müssen, insbesondere müssen die Hauptstreckungen gleich sein, d.h.

$$\Lambda_1 = \Lambda_2 \quad (35)$$

Setzt man die Größen, wie sie in Kapitel 1.1. abgeleitet wurden, in diese Gleichung ein, so erhält man

$$\left[\frac{B + \sqrt{B^2 - 4AD}}{2A} \right]^{1/2} = \left[\frac{B - \sqrt{B^2 - 4AD}}{2A} \right]^{1/2} \quad (36)$$

$$\Leftrightarrow B^2 - 4AD = 0 \quad (37)$$

$$\Leftrightarrow (c_{11}G_{22} + c_{22}G_{11} - 2c_{12}G_{12})^2 - 4(G_{11}G_{22} - G_{12}^2)(c_{11}c_{22} - c_{12}^2) = 0 \quad (38)$$

$$\Leftrightarrow (c_{11}G_{22} - c_{22}G_{11})^2 + 4(G_{11}G_{22}c_{12} - [c_{11}G_{22} + c_{22}G_{11}]c_{12}G_{12} + c_{11}c_{22}G_{12}^2) = 0 \quad (39)$$

Diese Gleichung gilt für alle zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten in beliebiger Parametrisierung, sie verdeutlicht insbesondere, daß auch nicht orthogonal parametrisierte Flächen winkeltreu abgebildet werden können.

Sollen bei einer Abbildung die Schnittwinkel zwischen Kurven erhalten bleiben, so müssen, wie schon zu Beginn dieses Kapitels formuliert, die Hauptstreckungen identisch sein: $\Lambda_1 = \Lambda_2 =: \Lambda$. Macht man sich nun die speziellen Eigenwerteigenschaften aus Gleichung 24 und 25 zu Nutze, so kann diese Konformitätsbedingung über die Matrizenoperatoren Spur und Determinante wie in Kapitel 3 umgeschrieben werden:

$$\text{tr}(CG^{-1}) = 2\Lambda^2 \Leftrightarrow \Lambda^4 = \left(\frac{1}{2}\text{tr}(CG^{-1})\right)^2 \quad (40)$$

$$\det(CG^{-1}) = \Lambda^4 \quad (41)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\det(CG^{-1}) = \left(\frac{1}{2}\text{tr}(CG^{-1})\right)^2} \quad (42)$$

Dies ist die allgemeinste Form in der die Konformitätsbedingung geschrieben werden kann, weil sie außer einer Nichtsingularität von G keine Einschränkungen an die Metriken stellt.

Setzt man nun die Terme von Gleichung 27 in die allgemeine Form der Konformitätsbedingung ein, so lautet diese

$$\frac{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}{G_{11}G_{22} - G_{12}^2} = \frac{(c_{11}G_{22} - 2c_{12}G_{12} + c_{22}G_{11})^2}{4(G_{11}G_{22} - G_{12}^2)^2} \quad (43)$$



$$\Leftrightarrow 4(c_{11}c_{22} - c_{12}^2)(G_{11}G_{22} - G_{12}^2) = (c_{11}G_{22} - 2c_{12}G_{12} + c_{22}G_{11})^2 \quad (44)$$

Diese Gleichung wurde auch schon am Anfang dieses Kapitels auf andere Weise abgeleitet, die Schlussfolgerungen bleiben die selben.

In der weiteren Betrachtung sollen nur Flächen herangezogen werden, deren Parameterlinien senkrecht aufeinander stehen, d.h. für die $G_{12} \equiv 0$ gilt. Dies kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit vorausgesetzt werden, da nach W. Klingenberg [1973] gezeigt werden kann, daß alle Flächen in dieser Weise darstellbar sind. W. Klingenberg verweist für den Beweis dieser Aussage auf L. Lichtenstein [1911]. Für Flächen, die in der Landesvermessung von besonderer Bedeutung sind, also Sphäre und Rotationsellipsoid in flächennormalen Koordinaten, ist dies automatisch erfüllt.

Im folgenden soll also vorausgesetzt werden : $G_{12} = G_{21} \equiv 0$.

Dadurch vereinfacht sich Gleichung 44 zu

$$(c_{11}G_{22} - c_{22}G_{11})^2 + 4G_{11}G_{22}c_{12}^2 = 0 \quad (45)$$

Da G_{11} und G_{22} aufgrund ihrer Definition, Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst, größer als Null sind, und für reguläre Flächen in keinem Punkt verschwinden dürfen, kann Gleichung 45 nur erfüllt werden, wenn die beiden Bedingungen gelten:

<ol style="list-style-type: none"> 1. $c_{12} = 0$ 2. $c_{11}G_{22} - c_{22}G_{11} = 0 \iff \frac{c_{11}}{c_{22}} = \frac{G_{11}}{G_{22}}$ 	(46)
--	------

Diese Bedingungen lassen sich anschaulich folgendermaßen interpretieren:

1. Sind die Parameterlinien im Urbild orthogonal ($G_{12} = 0$), so muß auch ihre Projektion im Bildbereich orthogonal aufeinander stehen.
2. Das Verhältnis der Fundamentalgrößen muß bei der Projektion erhalten bleiben.

Bis jetzt wurde nur ein orthogonales Parameternetz im Urbildbereich vorausgesetzt, wählt man nun noch für die Bildmannigfaltigkeit eine orthogonale Parametrisierung ($g_{12} = g_{21} \equiv 0$) und setzt die Elemente des GREEN - Deformationstensors wie in Kapitel 2 angegeben ein, so ergeben diese neu formulierten Konformitätsbedingungen folgendes Aussehen:

<ol style="list-style-type: none"> 1. $u_1^1 u_2^1 g_{11} + u_1^2 u_2^2 g_{22} = 0$ 2. $\frac{(u_1^1)^2 g_{11} + (u_1^2)^2 g_{22}}{(u_2^1)^2 g_{11} + (u_2^2)^2 g_{22}} = \frac{G_{11}}{G_{22}}$ 	(47)
--	------

Diese Gleichungen können dann als CAUCHY-RIEMANNsche Differentialgleichungen (CR) für die Abbildungen von gekrümmten Flächen auf gekrümmte Flächen jeweils in orthogonaler Parametrisierung aufgefaßt werden. Die eigentlichen CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen gelten in ihrer strengen Form nur für Flächen, die isometrisch parametrisiert sind, dies soll im folgenden gezeigt werden.

Ist im Bildbereich als auch im Urbild Isometrie gewährleistet, d.h. $g_{12} = 0, g_{11} = g_{22} = m$ und synonym $G_{12} = 0, G_{11} = G_{22} = M$, so kann in den CR-Gleichungen mit m bzw M gekürzt werden, da $m, M \neq 0$.

1. $u_1^1 u_2^1 = -u_1^2 u_2^2 \implies (u_1^1)^2 (u_2^1)^2 = (u_1^2)^2 (u_2^2)^2$
2. $(u_1^1)^2 + (u_1^2)^2 = (u_2^1)^2 + (u_2^2)^2$

(48)



und somit (1.) umgeformt $(u_1^1)^2 = \frac{(u_1^2)^2(u_2^2)^2}{(u_2^1)^2}$ und in (2.) eingesetzt, ergibt

$$(u_1^2)^2((u_2^2)^2 + (u_2^1)^2) = (u_2^1)^2((u_2^2)^2 + (u_2^1)^2) \quad (49)$$

dies ist $\forall u_2^1 \neq 0 \wedge u_2^2 \neq 0$ äquivalent mit $(u_1^2)^2 = (u_2^1)^2$. Diese Gleichung hat allerdings zwei Lösungen, die unterschieden werden müssen

$$u_1^2 = u_2^1 \quad (\text{Fall II}) \quad \vee \quad u_1^2 = -u_2^1 \quad (\text{Fall I}) \quad (50)$$

Setzt man die beiden Fälle wieder getrennt in Gleichung (1.) ein, so entsteht eine zweite unabhängige Bedingung für die partiellen Ableitungen der Abbildungsgleichungen

$$u_1^1 = -u_2^2 \quad (\text{Fall II}) \quad \vee \quad u_1^1 = u_2^2 \quad (\text{Fall I}) \quad (51)$$

Zusammenfassend können also aus der Konformitätsbedingung $\Lambda_1 = \Lambda_2$ für isometrische Parametrisierungen die beiden Fälle gefolgert werden:

$$\text{Fall I: } \frac{\partial u^1}{\partial U^1} = \frac{\partial u^2}{\partial U^2} \quad \wedge \quad \frac{\partial u^2}{\partial U^1} = -\frac{\partial u^1}{\partial U^2} \quad (52)$$

$$\text{Fall II: } \frac{\partial u^1}{\partial U^1} = -\frac{\partial u^2}{\partial U^2} \quad \wedge \quad \frac{\partial u^2}{\partial U^1} = \frac{\partial u^1}{\partial U^2} \quad (53)$$

Wie läßt sich anschaulich interpretieren, daß hier zwei Fälle auftauchen, die unterschieden werden müssen? Tatsächlich wurde nur gefordert, daß der Betrag eines Winkels zwischen zwei beliebigen Kurven zu erhalten sei, über die Orientierung wurde dabei nichts ausgesagt, denn diese Bedingung ist auch im Falle einer Spiegelung erfüllt. Bei Vertauschung der unteren Indizes geht Fall I in Fall II über, d.h. einer der beiden Fälle beinhaltet noch eine Vertauschung der Koordinatenachsen, die nicht erwünscht ist. Es muß also noch ein weiteres Kriterium gefunden werden, um endgültig entscheiden zu können, welcher Fall der gewünschte ist.

Wie schon in der Einführung erwähnt, steuert das Vorzeichen der Funktionaldeterminante einer Abbildung die Orientierung. Soll die Orientierung erhalten bleiben, so muß gelten

$$\det\left(\frac{\partial u^k}{\partial U^k}\right) > 0, \quad \text{bzw. } u_1^1 u_2^2 - u_2^1 u_1^2 > 0 \quad (54)$$

Setzt man Fall I in diese Gleichung ein, so folgt $(u_1^1)^2 > -(u_2^1)^2$. Da $(u_1^1)^2$ und $(u_2^1)^2$ stets positive reelle Zahlen sind, ist die Ungleichung für diese Abbildung erfüllt. Setzt man allerdings Fall II in die Ungleichung ein, so folgt $-(u_1^1)^2 > (u_2^1)^2$. Dies ist widersprüchlich, also ist Fall I für orientierungserhaltende, konforme Abbildungen eindeutig festgelegt.

Sofern also keine Spiegelung erfolgen soll, sondern nur eine konforme Abbildung, müssen die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen entsprechend Fall I konstruiert werden:

$$\boxed{\frac{\partial u^1}{\partial U^1} = \frac{\partial u^2}{\partial U^2} \quad \wedge \quad \frac{\partial u^2}{\partial U^1} = -\frac{\partial u^1}{\partial U^2}} \quad (55)$$

Der erste Term korrespondiert mit einer Konformitätsbedingung, der zweite mit einer Integrabilitätsbedingung. Daraus läßt sich folgern, daß wenn eine Abbildung über die Gleichheit der Hauptstreckungen abgeleitet wird, dann ist zwar schon Konformität im weiteren Sinne und die Integrabilität gewährleistet, aber es muß noch nachgeprüft werden, ob die Orientierung erhalten bleibt.



4.1.1 Einige Beispiele für konforme Abbildungen

Urbild- und Bildbereich sollen die Ebene sein ($(G_{KL}) = (g_{kl}) = I$).

Beispiel: Translation

$$\begin{aligned} u^1 &= U^1 + A \\ u^2 &= U^2 + B \end{aligned} \quad \text{mit } (u_K^k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und } \det(u_K^k) = 1 > 0$$

$$\frac{\partial u^1}{\partial U^1} = 1 = \frac{\partial u^2}{\partial U^2} \quad \wedge \quad \frac{\partial u^2}{\partial U^1} = 0 = -\frac{\partial u^1}{\partial U^2}$$

Die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen sind erfüllt.

$$(c_{KL}) = I \implies |I - \Lambda^2 I| = 0 \implies (1 - \Lambda^2)(1 - \Lambda^2) = 0 \implies \Lambda_1 = \Lambda_2 = 1$$

Beispiel: Rotation

$$\begin{aligned} u^1 &= \cos \alpha U^1 + \sin \alpha U^2 \\ u^2 &= -\sin \alpha U^1 + \cos \alpha U^2 \end{aligned} \quad \text{mit } (u_K^k) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad \text{und } \det(u_K^k) = 1 > 0$$

$$\frac{\partial u^1}{\partial U^1} = \cos \alpha = \frac{\partial u^2}{\partial U^2} \quad \wedge \quad \frac{\partial u^2}{\partial U^1} = -\sin \alpha = -\frac{\partial u^1}{\partial U^2}$$

Die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen sind erfüllt.

$$(c_{KL}) = I \implies |I - \Lambda^2 I| = 0 \implies (1 - \Lambda^2)(1 - \Lambda^2) = 0 \implies \Lambda_1 = \Lambda_2 = 1$$

Beispiel: Streckung

$$\begin{aligned} u^1 &= M U^1 \\ u^2 &= M U^2 \end{aligned} \quad \text{mit } (u_K^k) = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \quad \text{und } \det(u_K^k) = M^2 > 0$$

$$\frac{\partial u^1}{\partial U^1} = M = \frac{\partial u^2}{\partial U^2} \quad \wedge \quad \frac{\partial u^2}{\partial U^1} = 0 = -\frac{\partial u^1}{\partial U^2}$$

Die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen sind erfüllt.

$$(c_{KL}) = M^2 I \implies |M^2 I - \Lambda^2 I| = 0 \implies (M - \Lambda^2)(M - \Lambda^2) = 0 \implies \Lambda_1 = \Lambda_2 = M$$

Beispiel: Spiegelung

$$\begin{aligned} u^1 &= U^2 \\ u^2 &= U^1 \end{aligned} \quad \text{mit } (u_K^k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und } \det(u_K^k) = -1 < 0$$

$$\frac{\partial u^1}{\partial U^1} = 0 = \frac{\partial u^2}{\partial U^2} \quad \wedge \quad \frac{\partial u^2}{\partial U^1} = 1 \neq -\frac{\partial u^1}{\partial U^2}$$

Die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen sind nicht erfüllt, dafür aber die Gleichungen nach Fall II.

$$(c_{KL}) = I \implies |I - \Lambda^2 I| = 0 \implies (1 - \Lambda^2)(1 - \Lambda^2) = 0 \implies \Lambda_1 = \Lambda_2 = 1$$

Diese Beispiele zeigen, daß obwohl die CR-Differentialgleichungen nicht immer erfüllt sind, die Eigenwertaufgabe zu identischen Hauptstreckungen führen kann.



4.2 Flächentreue

Die Bedingung für eine flächeninhaltenstreue Kartenprojektion lautet:

$$\Lambda_1 \cdot \Lambda_2 = 1 \quad \text{oder} \quad \Lambda_1 = \Lambda_2^{-1} \quad (56)$$

Anschaulich läßt sich diese Bedingung so interpretieren, daß die Streckung des Maßstabes in eine Hauptverzerrungsrichtung durch eine Verkürzung in die andere Richtung kompensiert werden muß, um eine Inhaltstreue in infinitesimaler Umgebung zu gewährleisten.

$$\left[\frac{B + \sqrt{B^2 - 4AD}}{2A} \cdot \frac{B - \sqrt{B^2 - 4AD}}{2A} \right]^{1/2} = 1 \quad (57)$$

$$\Leftrightarrow B^2 - B^2 + 4AD = 4A^2 \quad (58)$$

$$\Leftrightarrow D = A \quad (59)$$

Rücksubstitution nach Gleichung 19 :

$$c_{11}c_{22} - c_{12}^2 = G_{11}G_{22} - G_{12}^2 \quad (60)$$

$$\Leftrightarrow |c_{KL}| = |G_{KL}| \quad (61)$$

wobei $|G_{KL}| := \det(G_{KL})$ dem Oberflächenelement des Urbildes und $|c_{KL}| := \det(c_{KL})$ der Projektion von $|G_{KL}|$ in den Bildbereich entspricht. Greift man auf die Aussage $\Lambda_1^2 \cdot \Lambda_2^2 = \det C / \det G$ aus Kapitel 4.1 zurück, so läßt sich dies wiederum sehr einfach zeigen.

Die Oberfläche eines Teilgebietes \mathcal{G} einer Fläche berechnet sich über das Doppelintegral

$$O = \iint_{\mathcal{G}} \sqrt{|G_{KL}|} \, dU^1 dU^2 \quad (62)$$

Wird diese Teilfläche über eine flächentreue Abbildung in ein Teilgebiet einer anderen Fläche abgebildet, so sind die Flächeninhalte dieser beiden beliebigen Teilflächen identisch.

Ist f eine flächenerhaltende Abbildungsvorschrift $f : U^1, U^2 \mapsto u^1, u^2$ und somit $\mathcal{G} \mapsto \mathcal{F}$, so gilt

$$O = \iint_{\mathcal{G}} \sqrt{|G_{KL}|} \, dU^1 dU^2 = \iint_{\mathcal{G}} \sqrt{|c_{KL}|} \, dU^1 dU^2 = \iint_{\mathcal{F}} \sqrt{|g_{kl}|} \, du^1 du^2, \quad (63)$$

wegen $c_{KL} := g_{kl} \frac{\partial u^k}{\partial U^K} \frac{\partial u^l}{\partial U^L}$.

Dies bedeutet, daß die Oberfläche eines geschlossenen Gebietes auch in der flächentreuen Projektion im Bildbereich exakt ermittelt werden kann. Hierfür muß jeder Punkt der Begrenzungslinie des geschlossenen Gebietes \mathcal{G} punktweise über die Abbildungsvorschrift als Randkurve des Gebietes \mathcal{F} abgebildet werden. Für eine Landesvermessung, die eine Flächenermittlung zum Ziel hat (z.B. zur Besteuerung – was historisch gesehen die Motivation zum Entstehen des Vermessungswesens darstellte), wäre ein flächentreues Koordinatensystem zur Darstellung der Erdoberfläche besser geeignet.

Wendet man auf die Determinante des GREEN-Deformationstensors den Determinantensatz über Matrizenprodukte an, so läßt sich $\det(c_{KL})$ auch ausdrücken mit

$$|c_{KL}| = |g_{kl}| |u_K^k| |u_L^l| = |g_{kl}| |u_K^k|^2. \quad (64)$$



Damit kann die Bedingung für Flächentreue erneut umgeformt werden:

$$\Lambda_1 \Lambda_2 = 1 \iff |c_{kl}| = |G_{KL}| \iff |u_K^k|^2 = \frac{|G_{KL}|}{|g_{kl}|} \quad (65)$$

Diese Gleichung hat zwei Lösungen, wobei für orientierungserhaltende Abbildungen nur die positive Determinante von Interesse ist

$$|u_K^k| = \sqrt{\frac{|G_{KL}|}{|g_{kl}|}} \iff \frac{\partial u^1}{\partial U^1} \frac{\partial u^2}{\partial U^2} - \frac{\partial u^1}{\partial U^2} \frac{\partial u^2}{\partial U^1} = \sqrt{\frac{G_{11}G_{22} - G_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}} \quad (66)$$

Dieser Satz hat für allgemeine Flächen Gültigkeit und kann daher universell zur Ableitung flächenerhaltender Abbildungen benutzt werden.

4.3 Äquidistanz

Damit Flächen längentreu, d.h. äquidistant an allen Punkten in beliebigen Richtungen, aufeinander abgebildet werden können, müssen die GAUSSschen Krümmungsmaße K identisch sein. Für Kartenprojektionen ist es aber gerade interessant eine gekrümmte Oberfläche ($K \neq 0$) in die Ebene mit $K = 0$ abzubilden. Deswegen ist es nur möglich in bestimmte ausgezeichnete Richtungen verzerrungsfrei abzubilden. Das bedeutet, daß es nur eine Schar von Kurven geben kann, die maßstäblich abgebildet werden.

Wie in Kapitel 2 berechnet sich die Streckung entlang einer Kurve $c := U^1(t), U^2(t) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$ mit $\dot{U}^1 := \frac{dU^1}{dt}$ und $\dot{U}^2 := \frac{dU^2}{dt}$ nach

$$\Lambda(U, \dot{U}) = \sqrt{\frac{c_{11}(\dot{U}^1)^2 + 2c_{12}(\dot{U}^1\dot{U}^2) + c_{22}(\dot{U}^2)^2}{G_{11}(\dot{U}^1)^2 + 2G_{12}(\dot{U}^1\dot{U}^2) + G_{22}(\dot{U}^2)^2}} \quad (67)$$

Eine der interessanten Kurven für die Projektionstheorie sind die Parameterlinien, und im Falle der Kugel insbesondere die Meridianbögen, da sie erstens Großkreise sind und zweitens in verschiedenen nicht parallelen Ebenen liegen. Die Streckung entlang der Meridiane ist $k = \sqrt{\frac{c_{22}}{G_{22}}}$.

Eine zweite Klasse der interessierenden Kurven sind die Hauptstreckungskurven, die immer nur dann mit den Parameterlinien zusammenfallen, wenn $G_{12} = 0$ und $c_{12} = 0$ ist. Für alle Pseudoabbildungen (Kategorie C) ist dies allerdings nicht der Fall (\rightarrow Kapitel 6).



5 Abwickelbare Drehflächen

Weil die Kugel, die zu jeder Mittelpunktsgeraden rotationssymmetrisch ist, als Urbild für alle Abbildungen dieser Selbständigen Arbeit herangezogen wird, liegt es nahe Rotationsflächen zu finden, die längentreu in die Ebene abgebildet, d.h. abgewickelt werden können, denn schließlich ist die Karte das Ziel jeder Kartenprojektion, im abstrakten Sinne die Koordinaten einer euklidischen zweidimensionalen Mannigfaltigkeit, oder anschaulich ausgedrückt ein Stück ebenes Papier mit der dargestellten ganzen oder ausschnittswisen Erdoberfläche.

Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Abwickelbarkeit in die Ebene ist, daß die GAUSSsche Krümmung überall verschwindet (Klingenberg [1973]). Es sollen also Rotationsflächen gefunden werden, deren GAUSSsche Krümmung $K \equiv 0$ ist. Eine Drehfläche, die um die e_3 -Achse rotationssymmetrisch ist, kann allgemein mit

$$\mathbf{x}(u, v) = f(v) \cos u \mathbf{e}_1 + f(v) \sin u \mathbf{e}_2 + g(v) \mathbf{e}_3 \quad (68)$$

parametrisiert werden. Über die Elemente der ersten und zweiten Fundamentalform berechnen sich die Hauptkrümmungen zu:

$$\kappa_1 = \frac{-g'}{f\sqrt{g'^2 + f'^2}} \quad \kappa_2 = \frac{g'f'' - f'g''}{\sqrt{g'^2 + f'^2}^3} \quad (69)$$

wobei $g' = \frac{\partial g(v)}{\partial v}$ und $g'' = \frac{\partial^2 g(v)}{\partial v^2}$ entspricht.

Die GAUSSsche Krümmung ist durch das Produkt der beiden Hauptkrümmungen definiert $K = \kappa_1 \kappa_2$, und ist nur dann gleich null, wenn entweder $\kappa_1 \equiv 0$ oder $\kappa_2 \equiv 0$ ist. Da g' und f' nicht gleichzeitig null sein können, ist auch $\sqrt{g'^2 + f'^2} \neq 0$.

Fall I : $\kappa_1 = 0 \iff g' = 0 \forall u, v \in \mathbb{R}$

$\implies g = \text{const} \implies f = \text{beliebig}$ z.B. $f(v) = v$

$\mathbf{x}(u, v) = v \cos u \mathbf{e}_1 + v \sin u \mathbf{e}_2 + \text{const} \mathbf{e}_3$

Dies ist die Gleichung einer Ebene senkrecht zur e_3 -Achse.

Fall II : $\kappa_2 = 0 \iff g'f'' - f'g'' = 0$

für $g' \neq 0 \implies \left(\frac{f'}{g'}\right)' \equiv 0$

$\implies \frac{f'}{g'} = \text{const} = a \forall u, v \in \mathbb{R} \iff f' = ag' \implies f = ag + b$

1. $a = 0, b \neq 0 \implies g = \text{beliebig}$ z.B. $g(v) = v$

$\mathbf{x}(u, v) = b \cos u \mathbf{e}_1 + b \sin u \mathbf{e}_2 + v \mathbf{e}_3$

Dies ist die Gleichung eines senkrechten Kreiszylinders

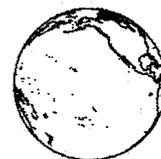
2. $a, b \neq 0$

Es besteht ein linearer Zusammenhang zwischen f und g , daraus folgt, es handelt sich um eine Schar von senkrechten Kreiskegel, die sich nur in der Zählung der Parameter unterscheiden.

z.B. $f(v) = v \implies g(v) = \frac{f(v) - b}{a} = \frac{1}{a}v - \frac{b}{a}$

$\mathbf{x}(u, v) = v \cos u \mathbf{e}_1 + v \sin u \mathbf{e}_2 + \left(\frac{1}{a}v - \frac{b}{a}\right) \mathbf{e}_3$

Andere Lösungen existieren nicht, daraus folgt, daß Ebene, Kreiszylinder und Kreiskegel die einzigen Drehflächen sind, die längentreu in die Ebene abgebildet werden können.



6 Klassifizierung von Kartenprojektionen

Ausgehend von der allgemeinsten Form der Abbildungsgleichungen $u^1 = u^1(U^1, U^2)$ und $u^2 = u^2(U^1, U^2)$ lassen sich 16 mögliche Kombinationen von U^1 und U^2 den Größen u^1 und u^2 zuordnen, je nachdem welche Parameter bei welcher Funktion als konstant vorausgesetzt werden. Dabei entstehen allerdings so singuläre Fälle, wie daß die gesamte Erde auf eine Gerade oder gar einen Punkt abgebildet wird. Wenn man diese und noch die spiegelsymmetrischen Fälle nicht berücksichtigt, so bleiben noch vier Klassen von Kartenprojektionen übrig, die W. R. Tobler [1962] und L. P. Lee [1944] mit den Kategorien (A) ... (D) benennen.

$$\begin{array}{ll} \text{(A)} & \begin{array}{l} u^1 = u^1(U^1, U^2) \\ u^2 = u^2(U^1, U^2) \end{array} & \text{(B)} & \begin{array}{l} u^1 = u^1(U^1) \\ u^2 = u^2(U^1, U^2) \end{array} \\ \text{(C)} & \begin{array}{l} u^1 = u^1(U^1, U^2) \\ u^2 = u^2(U^2) \end{array} & \text{(D)} & \begin{array}{l} u^1 = u^1(U^1) \\ u^2 = u^2(U^2) \end{array} \end{array}$$

Genau genommen stellen die Kategorien (B), (C) und (D) nur Spezialfälle von (A) dar.

Eine mehr deskriptive Einteilung wird von L. P. Lee [1944] gegeben, indem er Aussehen der Parameterlinien im Bildbereich beschreibt. Die Pseudoabbildungen werden dabei nach den drei abwickelbaren Flächen Zylinder, Kegel und Ebene so eingeteilt

[Pseudozylinderabb.] Die Parallelkreise werden durch ein System von parallelen Geraden abgebildet, die Meridiane durch zusammenlaufende [concurrent] Kurven.

[Pseudokegelabb.] Die Parallelkreise werden durch ein System von konzentrischen Kreisbogenstücke dargestellt, die Meridiane durch zusammenlaufende Kurven.

[Pseudoazimutalabb.] Die Parallelkreise werden durch ein System von konzentrischen Kreisen dargestellt, die Meridiane durch zusammenlaufende Kurven.

Um in den Kategorien (A) bis (D) zu bleiben, bedeutet dies aber, daß diese Pseudoabbildungen alle vom Typ (C) sein müssen. Im folgenden soll der Beweis erbracht werden, warum Pseudokartenprojektionen nach der Definition von L. P. Lee für orthogonal parametrisierte Flächen nicht konform sein können. Sie werden gebildet nach der Vorschrift:

$$\begin{array}{l} u^1 = u^1(U^1, U^2) \\ u^2 = u^2(U^2) \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \frac{\partial u^1}{\partial U^1} \neq 0 \quad \frac{\partial u^1}{\partial U^2} \neq 0 \\ \frac{\partial u^2}{\partial U^1} = 0 \quad \frac{\partial u^2}{\partial U^2} \neq 0 \end{array} \quad (70)$$

Als Urbild wird für alle Betrachtungen die Kugel in flächennormaler Parametrisierung herangezogen, dies bedeutet, daß $G_{12} = 0$ ist. Wenn man nun die Gleichungen 47 aus Kapitel 4.1 betrachtet, welche wie gezeigt notwendige Bedingungsgleichungen für konforme Abbildungen sind, dann muss $c_{12} = 0$ erfüllt sein also gilt

$$u_1^1 u_2^1 g_{11} + u_1^2 u_2^2 g_{22} = 0 \iff u_1^1 u_2^1 g_{11} = -u_1^2 u_2^2 g_{22} \quad (71)$$

so sieht man, daß die rechte Seite wegen $u_1^2 = 0$ verschwindet, dies bedeutet aber, daß die linke Seite auch identisch null sein muß, aber nach Voraussetzung $u_1^1, u_2^1 \neq 0$ und $g_{11} \neq 0$ sind, so ist dies ein Widerspruch, also können Pseudoabbildungen nicht konform sein.

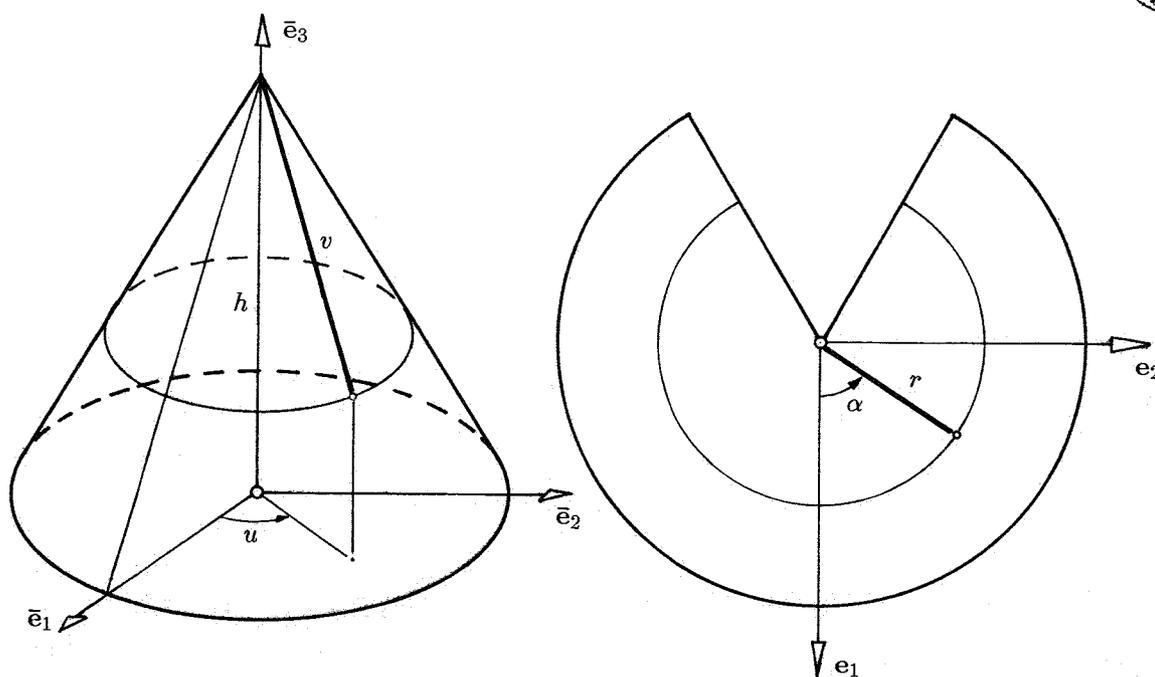


Abbildung 1: Kegel als Bildmannigfaltigkeit

7 Pseudokegelabbildungen

Die Oberfläche einer Kugel soll über einen Drehkegel in die Ebene abgebildet werden. Wie schon in Kapitel 5 gezeigt, läßt sich eine Kegelfläche längentreu, also ohne Verzerrungen, eben abbilden. Man kann daher bei geschickter gewählter Parametrisierung diese Doppelprojektion zu einer einzigen Abbildung zusammenfassen.

7.1 Parametrisierung der Mannigfaltigkeiten

Urbild

Kugel $U = (\Lambda, \Phi)$ bzw. $U = (\Lambda, \Delta)$

$$\mathbf{X}(\Lambda, \Delta) = R \cos \Lambda \sin \Delta \mathbf{E}_1 + R \sin \Lambda \sin \Delta \mathbf{E}_2 + R \cos \Delta \mathbf{E}_3 \quad (72)$$

$\Lambda \dots$ sphärische Länge $\in [0, 2\pi[$

$\Phi \dots$ sphärische Breite $\in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$\Delta \dots$ Poldistanz $\in]0, \pi]$

$$(G_{KL}) = \begin{bmatrix} R^2 \sin^2 \Delta & 0 \\ 0 & R^2 \end{bmatrix} \quad |G_{KL}| = R^4 \sin^2 \Delta \quad (73)$$



Bild

Kegel $\bar{u} = (u, v)$

$$\bar{x}(u, v) = nv \cos u \bar{e}_1 + nv \sin u \bar{e}_2 + (h - \sqrt{1 - n^2} v) \bar{e}_3 \quad (74)$$

h ... Höhe der Kegelspitze über der x, y -Ebene

2θ ... Öffnungswinkel des Kegels; $n := \sin \theta$

u ... Winkel zwischen der Projektion des Flächennormalenvektors in einem Punkt in die x, y -Ebene und der \bar{e}_1 -Achse

v ... Abstand eines Punktes von der Kegelspitze entlang einer Mantellinie gemessen

$$(\bar{g}_{kl}) = \begin{bmatrix} n^2 v^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad |\bar{g}_{kl}| = n^2 v^2 \quad (75)$$

Bild

Ebene $u = (\alpha, r)$

$$\mathbf{x}(\alpha, r) = r \cos \alpha \mathbf{e}_1 + r \sin \alpha \mathbf{e}_2 + 0 \mathbf{e}_3 \quad (76)$$

α, r ... Polarkoordinaten eines Punktes in der Ebene

$$(g_{kl}) = \begin{bmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad |g_{kl}| = r^2 \quad (77)$$

7.2 Abbildungsgleichungen

Kugel \mapsto Kegel

$$\begin{aligned} u &= f(\Lambda, \Delta) \\ v &= g(\Delta) \end{aligned}$$

Kategorie C

(78)

Kegel \mapsto Ebene

$$\begin{aligned} \alpha &= au \\ r &= v \end{aligned}$$

Kategorie D

(79)

Untersuchung der Hauptstreckungsmaße der Abbildung des Kegels in die Ebene

$$(u_K^k) = \frac{\partial(\alpha, r)}{\partial(u, v)} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \implies (c_{KL}) = (g_{kl} u_K^k u_L^l) = \begin{bmatrix} a^2 v^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (80)$$

$$|c_{KL} - \Lambda^2 \bar{g}_{kl}| = 0 \implies \Lambda_1^2 = \frac{a^2 v^2}{n^2 v^2} = \frac{a^2}{n^2} \quad \wedge \quad \Lambda_2^2 = 1 \quad (81)$$

und, da für eine längentreue Abbildung $\Lambda_1 = \Lambda_2 \equiv 1$ sein muß, muß also auch $a^2 = n^2$ und somit $a = n$ gelten.

Deswegen läßt sich diese Doppelprojektion in einfacher Weise zu einer einzigen Abbildung zusammenfassen

$$\begin{aligned} \alpha &= nf(\Lambda, \Delta) \\ r &= g(\Delta) \end{aligned}$$

(82)



Dies ist die allgemeine Abbildungsvorschrift für *Pseudokonische Projektionen*. In dieser Arbeit sollen die Repräsentanten dieser Klasse untersucht werden, bei denen ein linearer Zusammenhang zwischen dieser Funktion f und der sphärischen Länge Λ besteht. Hierzu wird eine Hilfsfunktion h eingeführt, die nur noch von der Poldistanz Δ abhängt: $f = \Lambda \cdot h(\Delta) + c$. Die Azimutzählung und die Längenzählung sollen den selben Ursprung haben:

$$\alpha(\Lambda = 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{c}{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{c = 0} \quad (83)$$

Damit können die partiellen Ableitungen der Abbildungsgleichungen bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial \Lambda} &= nh(\Delta) & \frac{\partial \alpha}{\partial \Delta} &= n\Lambda h_{\Delta}(\Delta) \\ \frac{\partial r}{\partial \Lambda} &= 0 & \frac{\partial r}{\partial \Delta} &= g_{\Delta}(\Delta) \end{aligned} \quad (84)$$

und somit deren Determinante:

$$|u_K^k| = n \cdot h(\Delta) \cdot g_{\Delta}(\Delta) \quad (85)$$

Mit der in Kapitel 4.2 abgeleiteten Bedingung für Flächentreue (Gleichung 66) entsteht die Differentialgleichung

$$u_1^1 u_2^2 - u_2^1 u_1^2 = \sqrt{\frac{R^4 \sin^2 \Delta}{r^2}} \quad (86)$$

$$nhg_{\Delta} = \frac{R^2 \sin \Delta}{g} \iff \boxed{nhg_{\Delta} g = R^2 \sin \Delta} \quad (87)$$

In dieser DG sind zwei unbekannte Funktionen h und g , das bedeutet, daß die Bedingung Flächentreue alleine nicht ausreicht um eine Pseudokegelabbildung zu bestimmen. Als weitere Bedingung kann gefordert werden, daß die konzentrischen Parallelkreise im Bild gleichabständig sind, bzw. $g_{\Delta} = a$ oder anders ausgedrückt, die Abstands- oder Radiusfunktion $r = g(\Delta)$ hängt linear von der Poldistanz $\Delta = 90^{\circ} - \Phi$ ab, also $g(\Delta) = a\Delta + b$.

7.3 Flächentreue Pseudokonische Projektion

- mit äquidistant abgebildetem Hauptmeridian,
- die Parallelkreise sind
 - konzentrisch
 - und äquidistant

Neben der Bedingung der Flächenerhaltung $nhg_{\Delta} g = R^2 \sin \Delta$ wird ein linearer Zusammenhang von der Poldistanz Δ und der Radiusfunktion $r = g(\Delta)$ gefordert: $g(\Delta) = a\Delta + b$. Damit läßt sich aus Gleichung 87 eine Beziehung für die Azimutfunktion $\alpha = n \cdot f(\Lambda, \Delta) = n \cdot \Lambda \cdot h(\Delta)$ ableiten:

$$h(\Delta) = \frac{R^2 \sin \Delta}{na(a\Delta + b)} \quad (88)$$

und somit sind die Funktionen für α und r bis auf Integrationskonstanten festgelegt. Eingesetzt in die Gleichungen 82 :

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{R^2 \sin \Delta}{a^2 \Delta + ab} \cdot \Lambda \\ r &= a\Delta + b \end{aligned} \quad (89)$$



Dies bedeutet gleichzeitig, daß der Hauptmeridian ($\Lambda = 0$) als Gerade abgebildet wird, diese soll aber nach der Forderung äquidistant sein, das bedeutet anschaulich, daß der Krümmungsradius des Hauptmeridiankreises gleich dem Kugelradius des Urbilds sein muß

$$g_{\Delta} = R \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = R} \quad (90)$$

Damit vereinfachen sich die Gleichungen 88 mit 89 und 90 zu

$$\alpha = \frac{R \sin \Delta \Lambda}{R\Delta + b} = \frac{R \sin \Delta}{r} \cdot \Lambda \quad (91)$$

$$r = R\Delta + b$$

wobei die Integrationskonstante b noch festgelegt werden muß. Dabei gibt es mehrere Möglichkeiten, wobei zwei in der Literatur (Maling [1973]) erwähnt werden und von historischer Bedeutung sind. Sie werden in den folgenden Abschnitten hergeleitet.

Nun soll noch gezeigt werden, daß die Parallelkreise tatsächlich äquidistant abgebildet werden. Die metrische Länge eines Kurvenstückes entlang eines Parallelkreises mit der sphärischen Breite Φ und der Längenausdehnung $\delta\Lambda$ beträgt

$$R \cos \Phi \delta\Lambda \quad (92)$$

Die metrische Länge des entsprechenden Bogenstückes im Bildbereich berechnet sich zu $r \cdot \delta\alpha$ und ergibt durch einsetzen von Gleichung 91:

$$r \cdot \delta\alpha = \frac{R \sin \Delta}{r} \delta\Lambda \cdot r = R \cos \Phi \delta\Lambda \quad (93)$$

Nun sind aber die Gleichungen 92 und 93 identisch, das heißt ein beliebiges Kurvenstück auf einem beliebigen Parallelkreis ist im Urbild und im Bild gleich lang, daraus folgt: alle Parallelkreise werden äquidistant abgebildet.

Mit Hilfe dieser Eigenschaft wurde dieser Typ von Pseudoabbildungen ursprünglich geometrisch konstruiert, es konnte erst viel später nachgewiesen werden, daß sie auch das Kriterium der Flächentreue erfüllen.

Als nächstes sollen die Verzerrungsmaße dieser Art Pseudokegelabbildung berechnet werden. Hierzu bedarf es zuerst der Berechnung des GREEN-Deformationstensors, der mit Hilfe der partiellen Ableitungen der Abbildungsgleichungen 91 aufgestellt werden muß:

$$(c_{KL}) = \begin{bmatrix} R^2 \sin^2 \Delta & \frac{R^2 \sin \Delta [(R\Delta + b) \cos \Delta - R \sin \Delta] \Lambda}{R\Delta + b} \\ \frac{R^2 \sin \Delta [(R\Delta + b) \cos \Delta - R \sin \Delta] \Lambda}{R\Delta + b} & \left[\frac{(R\Delta + b) \cos \Delta - R \sin \Delta}{R\Delta + b} \right]^2 R^2 \Lambda^2 + R^2 \end{bmatrix} \quad (94)$$

Die Determinante dieser Matrix ist $R^4 \sin^2 \Delta$, dies ist aufwendig zu berechnen, wurde aber als Kontrollrechnung nachgeprüft, denn gleichzeitig gilt für flächentreue Abbildungen $\det G = \det C$. Damit lassen sich nun, wie in Kapitel 2 gezeigt wurde, zuerst die Streckungen entlang der Parameterlinien berechnen:

$$h = \sqrt{\frac{c_{11}}{G_{11}}} = \sqrt{\frac{R^2 \sin^2 \Delta}{R^2 \sin^2 \Delta}} = 1$$

$$k = \sqrt{\frac{c_{22}}{G_{22}}} = \sqrt{1 + \left(\cos \Delta - \frac{R}{R\Delta + b} \sin \Delta \right)^2 \Lambda^2} \quad (95)$$



und daraus wiederum nach Gleichung 34 die Hauptstreckungen ($\det(CG^{-1}) = 1$):

$$\begin{aligned}\Lambda_1 &= \frac{1}{2} \left[\sqrt{4 + \left(\cos \Delta - \frac{R}{R\Delta + b} \sin \Delta \right)^2 \Lambda^2} + \sqrt{\left(\cos \Delta - \frac{R}{R\Delta + b} \sin \Delta \right)^2 \Lambda^2} \right] \\ \Lambda_2 &= \frac{1}{2} \left[\sqrt{4 + \left(\cos \Delta - \frac{R}{R\Delta + b} \sin \Delta \right)^2 \Lambda^2} - \sqrt{\left(\cos \Delta - \frac{R}{R\Delta + b} \sin \Delta \right)^2 \Lambda^2} \right]\end{aligned}\quad (96)$$

7.3.1 Der Nordpol fällt mit dem Ursprung des Koordinatensystems zusammen

Nach der Gleichung 91 für den Radius r gilt am Nordpol ($\Delta = 0$): $r(\Delta) = b$. Dieser soll aber gleich Null sein, daraus folgt

$$r(\Delta = 0) = 0 \iff b = 0 \quad (97)$$

Setzt man dieses b wieder in die Gleichung für den Winkel α ein, so ergibt sich ein unbestimmter Wert. Aber es existiert ein Grenzwert für kleine Poldistanzen und kann nach der Regel von de l'Hospital bestimmt werden:

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta}{\Delta} \cdot \Lambda = \Lambda. \quad (98)$$

Damit können die Abbildungsgleichungen zusammengefaßt werden:

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\sin \Delta}{\Delta} \cdot \Lambda = \frac{\cos \Phi}{\frac{\pi}{2} - \Phi} \cdot \Lambda \\ r &= R \left(\frac{\pi}{2} - \Phi \right)\end{aligned}\quad (99)$$

Oder umgerechnet in kartesische Koordinaten der Ebene (Karte)

$$\begin{aligned}x &= R \left(\frac{\pi}{2} - \Phi \right) \cos \left(\frac{\cos \Phi}{\frac{\pi}{2} - \Phi} \cdot \Lambda \right) \\ y &= R \left(\frac{\pi}{2} - \Phi \right) \sin \left(\frac{\cos \Phi}{\frac{\pi}{2} - \Phi} \cdot \Lambda \right)\end{aligned}\quad (100)$$

Diese Projektion wird in der Literatur als Stab-Werner-Projektion bezeichnet und wurde 1514 von J. Werner nach den Angaben von J. Stab ausgeführt. Sie ist die erste flächentreue Abbildung (allerdings wohl unabsichtlich, denn dies konnte erst später nachgewiesen werden).

Dadurch, daß r eine lineare Funktion von Φ ist, läßt sich die inverse Abbildung leicht herleiten:

$$\Phi = \frac{\pi}{2} - \frac{r}{R} \quad \text{und damit} \quad \alpha = \frac{\sin \frac{r}{R}}{\frac{r}{R}} \cdot \Lambda \quad (101)$$

Damit lautet die Umkehrprojektion der Stab-Werner-Projektion

$$\begin{aligned}\Lambda &= \frac{r}{R \sin \frac{r}{R}} \cdot \alpha \\ \Phi &= \frac{\pi}{2} - \frac{r}{R}\end{aligned}\quad (102)$$

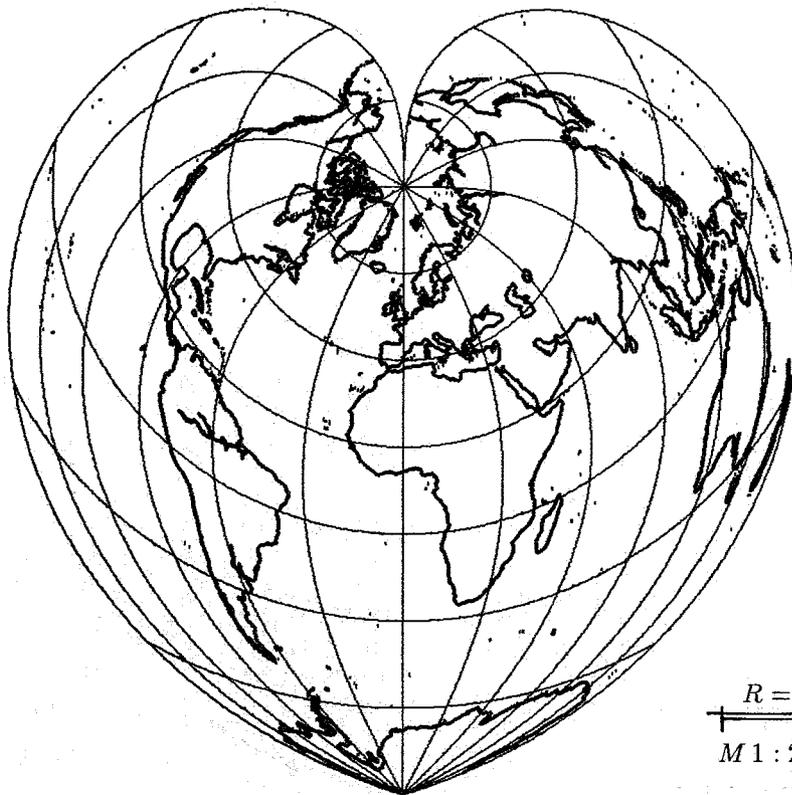


Abbildung 2: Stab-Werner-Projektion

Mit den Gleichungen 95 und 96 lassen sich nun für die Stab-Werner-Projektion die Streckungen der Parameterlinien und die Hauptverzerrungen berechnen, indem die Konstante $b = 0$ gesetzt wird.

$$h = 1$$

$$k = \sqrt{1 + \left(\cos \Delta - \frac{\sin \Delta}{\Delta}\right)^2 \Lambda^2} \quad (103)$$

$$\Lambda_1 = \frac{1}{2} \left[\sqrt{4 + \left(\cos \Delta - \frac{\sin \Delta}{\Delta}\right)^2 \Lambda^2} + \sqrt{\left(\cos \Delta - \frac{\sin \Delta}{\Delta}\right)^2 \Lambda^2} \right] \quad (104)$$

$$\Lambda_2 = \frac{1}{2} \left[\sqrt{4 + \left(\cos \Delta - \frac{\sin \Delta}{\Delta}\right)^2 \Lambda^2} - \sqrt{\left(\cos \Delta - \frac{\sin \Delta}{\Delta}\right)^2 \Lambda^2} \right]$$

Damit sind alle Größen, die die Stab-Werner-Projektion charakterisieren zusammengestellt. In Abbildung 2 ist die ganze Erdoberfläche in der typischen Herzform dargestellt, wobei der Nordpol im Ursprung des Koordinatensystems liegt, und die Meridiane über einen Vollkreis verteilt starten.

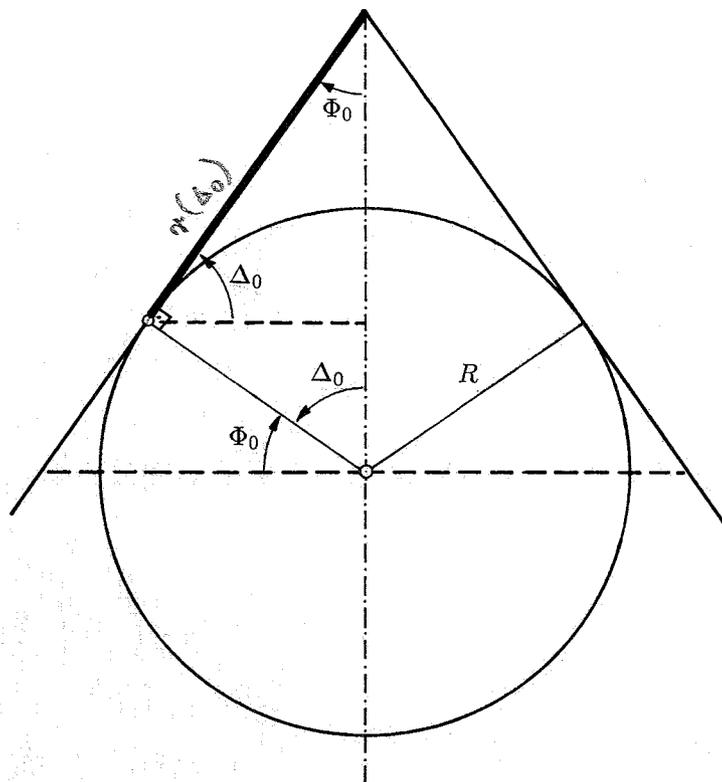


Abbildung 3: Kegel im Aufriß

7.3.2 Hauptparallelkreis wird mittabstandstreu abgebildet

Diese Forderung läßt sich am besten anhand einer Skizze verdeutlichen. Abbildung 3 zeigt einen Schnitt durch die Abbildungsflächen entlang der e_3 -Achse

Die Forderung nach Mittabstandstreu kann so veranschaulicht werden, daß der Bildradius des Hauptmeridiankreises ($\Delta = \Delta_0$) der Länge der Mantellinie von der Kegelspitze zum Berührungspunkt im Urbild entspricht.

$$r(\Delta_0) = R \tan \Delta_0 \quad (105)$$

Mit dieser Bedingung kann die Integrationskonstante b der Gleichung 91 bestimmt werden

$$\begin{aligned} r(\Delta_0) &= R \Delta_0 + b = R \tan \Delta_0 \\ \Rightarrow b &= R \tan \Delta_0 - R \Delta_0 \end{aligned} \quad (106)$$



$$\Rightarrow \begin{aligned} r(\Delta) &= R\Delta + R \tan \Delta_0 - R\Delta_0 \\ &= R(\Phi_0 + \cot \Phi_0 - \Phi) \\ \alpha &= \frac{\sin \Delta \cdot \Lambda}{\Delta + \tan \Delta_0 - \Delta_0} \\ &= \frac{\cos \Phi \cdot \Lambda}{\cot \Phi_0 + \Phi_0 - \Phi} \end{aligned} \quad (107)$$

Dies sind die Abbildungsgleichungen der BONNEschen Projektion, die eine große Bedeutung für die französische aber auch deutsche Landesvermessung im 19. Jahrhundert hatte. Man kann erkennen, daß die im vorherigen Abschnitt abgeleitete Stab-Werner-Projektion nur ein Sonderfall der BONNEschen Projektion ist, für den Fall, daß $\Phi_0 = \frac{\pi}{2}$ gewählt wurde, und so ist die Stab-Werner-Projektion nur im weiteren Sinne eine Pseudokegelabbildung.

Umgerechnet auf kartesische Koordinaten lauten die Gleichungen

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = R(\Phi_0 + \cot \Phi_0 - \Phi) \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\cos \Phi \cdot \Lambda}{\cot \Phi_0 + \Phi_0 - \Phi}\right) \\ \sin\left(\frac{\cos \Phi \cdot \Lambda}{\cot \Phi_0 + \Phi_0 - \Phi}\right) \end{bmatrix} \quad (108)$$

Der Nordpol wird zwar als Punkt abgebildet, dieser fällt aber nicht mit dem Ursprung des Bildkoordinatensystems zusammen:

$$\begin{aligned} r(\Delta = 0) &= R(\tan \Delta_0 - \Delta_0) \\ \alpha(\Lambda, \Delta = 0) &= 0 \end{aligned} \quad (109)$$

Die Umkehrfunktionen zu den BONNEschen Abbildungsgleichungen berechnen sich wie bei Stab-Werner:

$$\begin{aligned} \Lambda &= \frac{\frac{r}{R} \alpha}{\cos(\cot \Phi_0 + \Phi_0 - \frac{r}{R})} \\ \Phi &= \cot \Phi_0 + \Phi_0 - \frac{r}{R} \end{aligned} \quad (110)$$

Es kann die Verzerrung der Parameterlinien bei der BONNE-Projektion nach der allgemeineren Formel 95

$$\begin{aligned} h &= 1 \quad \text{Konstruktionsprinzip !} \\ k &= \sqrt{1 + \left(\cos \Delta - \frac{\sin \Delta}{\Delta + \tan \Delta_0 - \Delta_0}\right)^2 \Lambda^2} \end{aligned} \quad (111)$$

und damit die Hauptstreckungen nach 96 berechnet werden

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \frac{1}{2} \left[\sqrt{4 + \left(\cos \Delta - \frac{\sin \Delta}{\Delta + \tan \Delta_0 - \Delta_0}\right)^2 \Lambda^2} + \sqrt{\left(\cos \Delta - \frac{\sin \Delta}{\Delta + \tan \Delta_0 - \Delta_0}\right)^2 \Lambda^2} \right] \\ \Lambda_2 &= \frac{1}{2} \left[\sqrt{4 + \left(\cos \Delta - \frac{\sin \Delta}{\Delta + \tan \Delta_0 - \Delta_0}\right)^2 \Lambda^2} - \sqrt{\left(\cos \Delta - \frac{\sin \Delta}{\Delta + \tan \Delta_0 - \Delta_0}\right)^2 \Lambda^2} \right] \end{aligned} \quad (112)$$

Abbildung 4 zeigt die graphische Darstellung der vollständigen Erde in der BONNEschen Projektion. Durch die modifizierte Herzform erkennt man deutlich die Unterschiede zur Stab-Werner-Projektion.

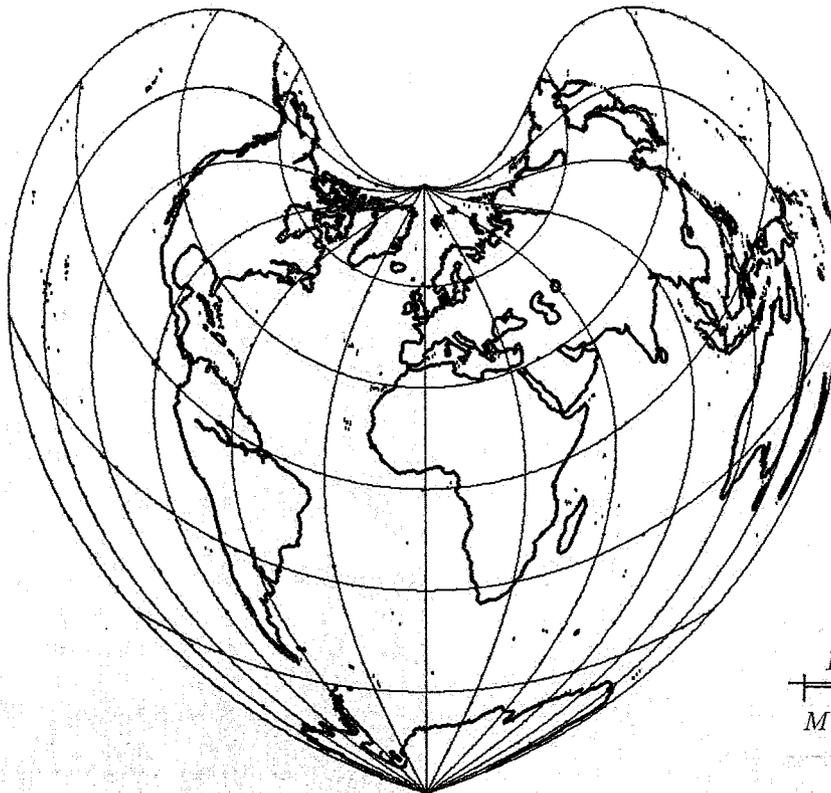


Abbildung 4: Bonne-Projektion

7.3.3 Biographie der BONNESchen Abbildung

Am Anfang des 19. Jahrhunderts standen alle europäischen Nationen bezüglich der praktischen Kartographie unter dem Einfluß von Frankreich, einerseits durch die Karte von *Cassini* in 1:86400, bei der die Projektion gleichen Namens¹ benutzt wurde, andererseits durch die Arbeiten der Ingenieurgeographen, die den Napoleonischen Heeren folgend, das linke Rheinufer, einen beträchtlichen Teil des rechten Ufers und speziell Bayern, ferner ganz Norditalien aufnahmen, indem sie sich der Projektion von *Bonne* und *Cassini* bedienten.

1818 begann Frankreich seine "Carte d'État Major" im Maßstab 1:80000, für die man ebenfalls die Projektion von *Bonne* benutzte. Es ist daher nicht überraschend, daß die meisten europäischen Staaten, als sie in der auf 1815 folgenden Friedenszeit ihrerseits die Aufnahme ihrer Territorien unternahmen, wobei sie oft die von den französischen Ingenieurgeographen ausgeführten Arbeiten verwerten konnten, zum größten Teil eine der beiden französischen Projektionen anwandten.

So knüpfte in Preußen der General von Müffling bei der Karte in 1:25000 an die Arbeiten des französischen Generals Tranchot in der Rheinprovinz an; in Bayern benutzte man die Arbeiten des alten topographischen Bureaus, indem man für die topographischen Karten die *Bonnesche* Projektion anwandte, während man sich für das Kataster der *Soldnerschen* Koordinaten entsprechend der Projektion von *Cassini* bediente. Ebenso verfuhr man im Großherzogtum Baden (*Bonnesche* Projektion) und in Österreich, wo man von 1810 ab eine Karte in 1:144000 in *Cassinischer* Projektion begann und wo man 1822 eine Übersichtskarte in 1:864000 in *Bonnescher* Projektion herausgab. Rußland nahm 1822 für alle kartographischen Arbeiten des Generalstabs ebenfalls die *Bonnesche* Projektion an.

Erst als *Gauß* seit 1822 für die Karte von Hannover eine winkeltreue Abbildung benutzte, machte sich die Tendenz geltend, die *Bonnesche* Projektion zu verlassen, diese Entwicklung wurde dadurch verstärkt, daß die *Bonnesche* Projektion von *A. Tissot* auf Grund seiner Untersuchungen über die Verzerrungen abfällig kritisiert wurde.

¹Cassini-Soldner Projektion: mittabstandstreue zylindrische Abbildung (Plattkarte) in transversaler Lage

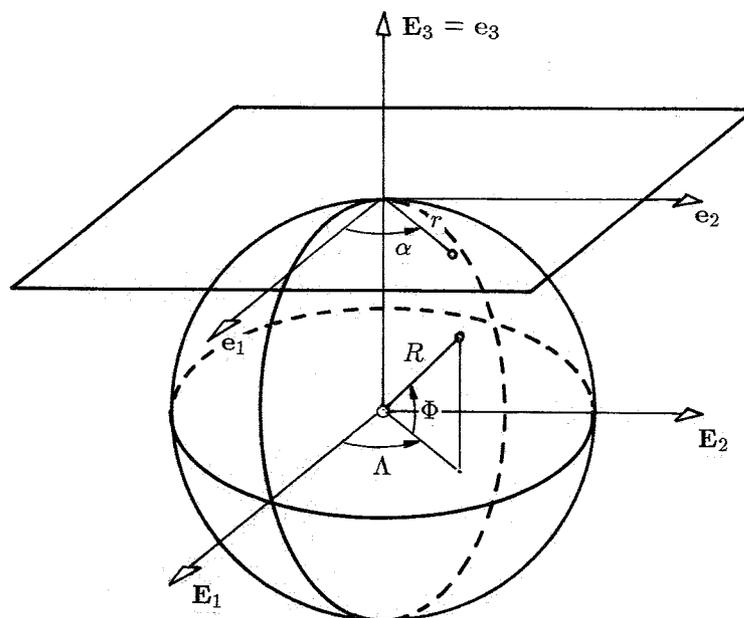


Abbildung 5: Tangentialebene als Bildmannigfaltigkeit

8 Pseudoazimutale Abbildungen

Die unmittelbare Form der Abbildung in die Ebene, erfolgt durch direkte Projektion der Punkte der Urbildmannigfaltigkeit, Kugel, auf eine Tangentialebene in normaler Lage.

8.1 Parametrisierung der Mannigfaltigkeiten

Urbild Kugel $U = (\Lambda, \Phi)$ bzw. $U = (\Lambda, \Delta)$

$$\mathbf{X}(\Lambda, \Delta) = R \cos \Lambda \sin \Delta \mathbf{E}_1 + R \sin \Lambda \sin \Delta \mathbf{E}_2 + R \cos \Delta \mathbf{E}_3 \quad (113)$$

$\Lambda \dots$ sphärische Länge $\in [0, 2\pi[$

$\Phi \dots$ sphärische Breite $\in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$\Delta \dots$ Poldistanz $\in]0, \pi]$

$$(G_{KL}) = \begin{bmatrix} R^2 \sin^2 \Delta & 0 \\ 0 & R^2 \end{bmatrix} \quad |G_{KL}| = R^4 \sin^2 \Delta \quad (114)$$

Bild Ebene $u = (\alpha, r)$

$$\mathbf{x}(\alpha, r) = r \cos \alpha \mathbf{e}_1 + r \sin \alpha \mathbf{e}_2 + 0 \mathbf{e}_3 \quad (115)$$

$\alpha, r \dots$ Polarkoordinaten eines Punktes in der Ebene

$$(g_{ki}) = \begin{bmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad |g_{ki}| = r^2 \quad (116)$$



8.2 Abbildungsvorschriften

Eine Vorgabe zur Bildung einer Azimutalabbildung kann wie folgt beschrieben werden

Ein Objekt bewege sich mit betragsmäßig konstanter Geschwindigkeit entlang eines Meridianbogens vom Nordpol startend in Nord-Süd-Richtung. in einem *raumfesten* azimutalen Bezugssystem soll die Bewegung des Objektes auf der Erdoberfläche in einer Karte dargestellt werden. Oder anders ausgedrückt, es soll die Wirkungsweise von Corioliskräften veranschaulicht werden, die scheinbar geradlinig bewegte Objekte auf gekrümmte Bahnen zwingt, von den Gravitationskräften einmal ganz abgesehen.

Dies führt in natürlicher Weise auf ein pseudoazimutales Projektionsprinzip

- Das Objekt bewegt sich mit betragsmäßig konstanter Geschwindigkeit v in Nord-Süd-Richtung :
 $\dot{\Delta} \cdot R = v \implies \Delta = \frac{v}{R} \cdot t + \Delta_0$
- Zur Zeit $t = 0$ befindet sich das Objekt am Nordpol:
 $\Delta(t = 0) = 0 \implies \Delta_0 = 0$
- Das Bezugssystem ist raumfest, nimmt also nicht an der Rotation der Erde teil:
 $\dot{\Lambda} = \omega \implies \alpha = \omega t + \Lambda_0$

Für Λ_0 wird allgemein Λ gewählt, da alle Meridiane von Interesse sind. Durch Eliminierung des Kurvenparameters t kann der funktionale Zusammenhang von α und der sphärischen Länge und Poldistanz abgeleitet werden:

$$\begin{array}{l} \alpha = \frac{\omega R}{v} \cdot \Delta + \Lambda \\ r = g(\Delta) \end{array} \quad \longrightarrow \text{Kategorie C} \quad (117)$$

Die Funktion $g(\Delta)$ muß noch bestimmt werden, dazu bedarf es eines weiteren Kriteriums.

Die Jacobimatrix der Transformation kann schon berechnet werden:

$$(u_K^k) = \begin{bmatrix} f_\Lambda = 1 & f_\Delta = \frac{\omega R}{v} \\ g_\Lambda = 0 & g_\Delta = g_\Delta \end{bmatrix} \quad (118)$$

und damit auch der GREEN-Deformationstensor c_{KL} :

$$(c_{KL}) = \begin{bmatrix} g^2 & g^2 \frac{\omega R}{v} \\ g^2 \frac{\omega R}{v} & g^2 \frac{\omega^2 R^2}{v^2} + g_\Delta^2 \end{bmatrix} \quad (119)$$



8.3 Flächentreue pseudoazimutale Abbildung

Zur Bestimmung der Radiusfunktion $g(\Delta)$ in Gleichung 117 wird gefordert, daß die Karte mit unverzerrtem Flächeninhalt dargestellt werden soll. Dazu muß die Gleichung 66 erfüllt sein

$$|u_K^k| = \sqrt{\frac{|G_{KL}|}{|g_{kl}|}} \quad (120)$$

Setzt man die einzelnen Determinanten in Bedingungsgleichung ein, so ergibt sich

$$|u_K^k| = f_{\Lambda} g_{\Delta} \quad |G_{KL}| = R^4 \sin^2 \Delta \quad |g_{kl}| = r^2 = g^2 \quad (121)$$

$$f_{\Lambda} g_{\Delta} = \frac{R^2 \sin \Delta}{g} \implies g g_{\Delta} = R^2 \sin \Delta \quad (122)$$

Diese Differentialgleichung kann durch Trennung der Variablen geschlossen gelöst werden

$$\implies \frac{1}{2} g^2 = -R^2 \cos \Delta + c \implies g(\Delta) = \sqrt{-2R^2 \cos \Delta + 2c} \quad (123)$$

Soll der Nordpol als Punkt abgebildet werden, muß $r(\Delta = 0) = 0$ erfüllt sein:

$$g(\Delta = 0) = 0 \implies 2R^2 = 2c \implies c = R^2 \implies g(\Delta) = \sqrt{2R^2(1 - \cos \Delta)} \quad (124)$$

Nach dem Additionstheorem der trigonometrischen Funktionen $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$ kann $g(\Delta)$ auch als $2R \sin(\frac{\Delta}{2})$ geschrieben werden. Die berechnete Radiusfunktion $g(\Delta)$ ist natürlich identisch mit der der echten Azimutalabbildung, denn eine Verdrehung in sich ändert am Flächeninhalt nichts. Damit sind die Parameter für diese flächentreue pseudoazimutale Abbildung festgelegt. Die Konstanten ω und v können frei gewählt werden, für ω ergibt sich nach der skizzierten Problemstellung der Betrag des Erdrotationsvektors zu $\omega = 2\pi/24^h$.

$$\begin{aligned} r &= 2R \sin\left(\frac{\Delta}{2}\right) = 2R \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi}{2}\right) \\ \alpha &= \Lambda + \frac{\omega R}{v} \Delta = \Lambda + \frac{\omega R}{v} \left(\frac{\pi}{2} - \Phi\right) \end{aligned} \quad (125)$$

Diese Gleichungen wurden 1879 von Wiechel für $v = 2\omega R$ zum ersten Mal angegeben. Abbildung 6 zeigt die nördliche und südliche Hemisphäre getrennt nach den Gleichungen von Wiechel geplottet und zusammenmontiert.

Umgerechnet in kartesische Koordinaten lauten sie

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= 2R \sin\left(\frac{\Delta}{2}\right) \begin{bmatrix} \cos\left(\Lambda + \frac{\omega R}{v} \Delta\right) \\ \sin\left(\Lambda + \frac{\omega R}{v} \Delta\right) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= 2R \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi}{2}\right) \begin{bmatrix} \cos\left(\Lambda + \frac{\omega R}{v} \left(\frac{\pi}{2} - \Phi\right)\right) \\ \sin\left(\Lambda + \frac{\omega R}{v} \left(\frac{\pi}{2} - \Phi\right)\right) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (126)$$

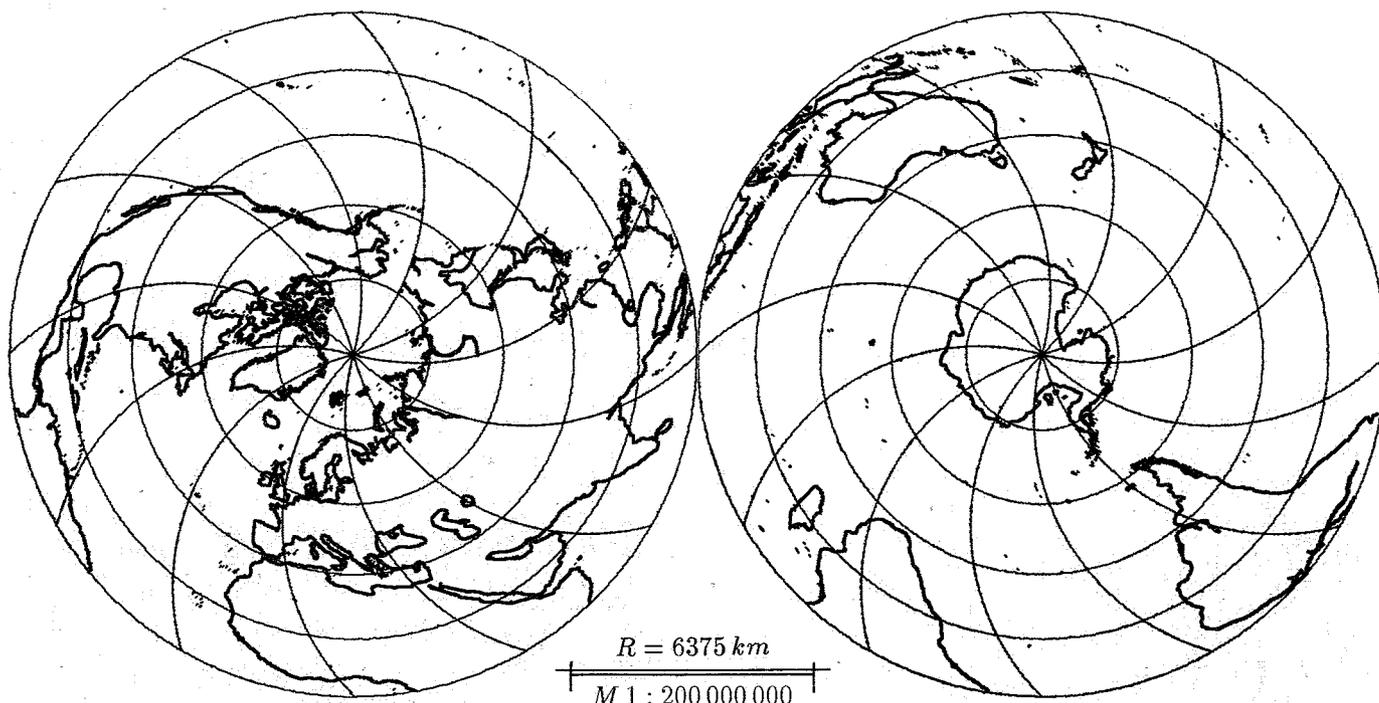


Abbildung 6: Wiechel-Abbildung

Die inversen Abbildungsgleichungen berechnen sich zu

$$\begin{aligned} \Lambda &= \alpha - \frac{2\omega R}{v} \arcsin\left(\frac{r}{2R}\right) \\ \Phi &= \frac{\pi}{2} - 2 \arcsin\left(\frac{r}{2R}\right) \end{aligned} \quad (127)$$

Die Streckungen der Parameterlinien

Zur Berechnung der Streckungen muß erneut der Deformationstensor aufgestellt werden

$$(u_K^k) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\omega R}{v} \\ 0 & R \cos\left(\frac{\Delta}{2}\right) \end{bmatrix} \Rightarrow (c_{KL}) = \begin{bmatrix} 4R^2 \sin^2 \frac{\Delta}{2} & 4\frac{\omega R^3}{v} \sin^2 \frac{\Delta}{2} \\ 4\frac{\omega R^3}{v} \sin^2 \frac{\Delta}{2} & 4\frac{\omega^2 R^4}{v^2} \sin^2 \frac{\Delta}{2} + R^2 \cos^2 \frac{\Delta}{2} \end{bmatrix} \quad (128)$$

und damit ergeben sich dann für die Streckung entlang der Parallelkreise und Meridiane

$$\begin{aligned} h &= \sqrt{\frac{c_{11}}{G_{11}}} = \frac{1}{\cos \frac{\Delta}{2}} \\ k &= \sqrt{\frac{c_{22}}{G_{22}}} = \sqrt{\frac{4\omega^2 R^2}{v^2} \sin^2 \frac{\Delta}{2} + \cos^2 \frac{\Delta}{2}} \end{aligned} \quad (129)$$



Für $v = 2\omega R$ ist die Streckung entlang der Meridiane gerade gleich eins. Dies ist der Parameter mit dem die Wiechel-Projektion definiert wurde.

Die Hauptstreckungen

Nachdem jetzt die Streckungen h und k bekannt sind, und der Quotient der Determinanten $\det C / \det G$ für flächentreue Abbildungen eins ergibt, lassen sich die Hauptstreckungen mit der Formel 34 aus Kapitel 3 berechnen.

$$\begin{aligned}\Lambda_1 &= \frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{1}{\cos^2 \frac{\Delta}{2}} + \frac{4\omega^2 R^2}{v^2} \sin^2 \frac{\Delta}{2} + \cos^2 \frac{\Delta}{2}} + 2 + \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \frac{\Delta}{2}} + \frac{4\omega^2 R^2}{v^2} \sin^2 \frac{\Delta}{2} + \cos^2 \frac{\Delta}{2} - 2} \right] \\ \Lambda_2 &= \frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{1}{\cos^2 \frac{\Delta}{2}} + \frac{4\omega^2 R^2}{v^2} \sin^2 \frac{\Delta}{2} + \cos^2 \frac{\Delta}{2}} - 2 - \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \frac{\Delta}{2}} + \frac{4\omega^2 R^2}{v^2} \sin^2 \frac{\Delta}{2} + \cos^2 \frac{\Delta}{2} - 2} \right]\end{aligned}\quad (130)$$

Bei $v = 2\omega R$, also den Wiechel-Gleichungen, vereinfachen sich die Hauptstreckungen zu

$$\begin{aligned}\Lambda_1 &= \sqrt{3 + \frac{1}{\cos^2 \frac{\Delta}{2}} + \tan^2 \frac{\Delta}{2}} \\ \Lambda_2 &= \sqrt{3 + \frac{1}{\cos^2 \frac{\Delta}{2}} - \tan^2 \frac{\Delta}{2}}\end{aligned}\quad (131)$$

8.4 Äquidistante pseudoazimutale Abbildung

In Kapitel 4.3 wurde abgeleitet, daß Abbildungen von gekrümmten Flächen nur entlang einer Schar von ausgezeichneten Kurven unverzerrt dargestellt werden können. Naheliegend sind dazu die Parameterlinien, und es soll insbesondere eine Abbildungsvorschrift gefunden werden, die sowohl die Längengrade als auch die Breitengrade äquidistant abbildet.

Als Grundlage dient dazu wiederum die allgemeine Abbildungsvorschrift

$$\begin{aligned}\alpha &= \Lambda + \frac{\omega R}{v} \Delta \\ r &= g(\Delta)\end{aligned}\quad (132)$$

welche zu dem GREEN-Deformationstensor

$$(c_{KL}) = \begin{bmatrix} g^2 & g^2 \frac{\omega R}{v} \\ g^2 \frac{\omega R}{v} & g^2 \frac{\omega^2 R^2}{v^2} + g_\Delta^2 \end{bmatrix}\quad (133)$$

geführt hat. Sollen nun die Meridiane äquidistant abgebildet werden, so muß $k = \sqrt{\frac{c_{22}}{G_{22}}}$ identisch eins sein, oder umgeformt $c_{22} = G_{22}$.

$$c_{22} = g^2 \frac{\omega^2 R^2}{v^2} + g_\Delta^2 \quad G_{22} = R^2\quad (134)$$



Dies führt zu der gewöhnlichen, nicht linearen, inhomogenen Differentialgleichung 1. Ordnung

$$g^2 \frac{\omega^2 R^2}{v^2} + g_{\Delta}^2 = R^2 \quad (135)$$

die mit dem Lösungsansatz $g(\Delta) = e^{\lambda \Delta}$ gelöst werden kann:

$$\begin{aligned} g &= e^{\lambda \Delta} \\ g_{\Delta} &= \lambda e^{\lambda \Delta} \end{aligned} \quad (136)$$

Zuerst muß die homogene DG gelöst werden

$$\left(\frac{\omega^2 R^2}{v^2} + \lambda^2 \right) e^{2\lambda \Delta} = 0 \quad (137)$$

$$\Rightarrow \lambda^2 = -\frac{\omega^2 R^2}{v^2} \quad (138)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = i \frac{\omega R}{v} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = -i \frac{\omega R}{v}$$

Die Lösung der inhomogenen DG stellt eine Linearkombination der homogenen Lösungen dar

$$\begin{aligned} g &= c e^{i \frac{\omega R}{v} \Delta} - c e^{-i \frac{\omega R}{v} \Delta} \\ g^2 &= c^2 e^{2i \frac{\omega R}{v} \Delta} - 2c^2 + c^2 e^{-2i \frac{\omega R}{v} \Delta} \\ g_{\Delta} &= c i \frac{\omega R}{v} e^{i \frac{\omega R}{v} \Delta} + c i \frac{\omega R}{v} e^{-i \frac{\omega R}{v} \Delta} \\ g_{\Delta}^2 &= -c^2 \frac{\omega^2 R^2}{v^2} e^{2i \frac{\omega R}{v} \Delta} - 2c^2 \frac{\omega^2 R^2}{v^2} - c^2 \frac{\omega^2 R^2}{v^2} e^{-2i \frac{\omega R}{v} \Delta} \end{aligned} \quad (139)$$

eingesetzt in die inhomogene Differentialgleichung ergibt

$$-4c^2 \frac{\omega^2 R^2}{v^2} = R^2 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{2i} \frac{v}{\omega} \quad (140)$$

Daraus folgt für die Radiusfunktion g

$$g = \frac{v}{\omega} \frac{e^{i \frac{\omega R}{v} \Delta} - e^{-i \frac{\omega R}{v} \Delta}}{2i} = \frac{v}{\omega} \sin \frac{\omega R}{v} \Delta \quad (141)$$

Wie werden die Parallelkreise abgebildet?

$$h = \sqrt{\frac{c_{11}}{G_{11}}} = \frac{g}{R \sin \Delta} = \frac{v}{\omega R} \frac{\sin \frac{\omega R}{v} \Delta}{\sin \Delta} \quad (142)$$

Wird in dieser Gleichung $v = \omega R$ gesetzt, so werden auch die Parallelkreise äquidistant abgebildet.

Damit ist diese Projektion eindeutig festgelegt:

$$\begin{aligned} \alpha &= \Lambda + \Delta = \Lambda + \frac{\pi}{2} - \Phi \\ r &= R \sin \Delta = R \cos \Phi \end{aligned} \quad (143)$$



In kartesischen Koordinaten lauten entsprechend die Abbildungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= R \sin \Delta \begin{bmatrix} \cos(\Lambda + \Delta) \\ \sin(\Lambda + \Delta) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= R \cos \Phi \begin{bmatrix} \cos(\Lambda + \frac{\pi}{2} - \Phi) \\ \sin(\Lambda + \frac{\pi}{2} - \Phi) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (144)$$

Die inverse Abbildung lautet

$$\begin{aligned} \Lambda &= \alpha - \frac{\pi}{2} + \arccos \frac{r}{R} \\ \Phi &= \arccos \frac{r}{R} \end{aligned} \quad (145)$$

Die Funktionaldeterminante $|u_K^k| = R \sin \Phi$ ist nur für $\Phi > 0$ positiv, d.h. diese Abbildung macht nur für die nördliche Hemisphäre Sinn, bei der südlichen Hemisphäre muß das Vorzeichen geändert werden. Zur Berechnung der Verzerrungsmaße muß nun für diese spezielle Abbildung c_{KL} und dessen Determinante berechnet werden

$$(c_{KL}) = \begin{bmatrix} R^2 \cos^2 \Phi & R^2 \cos^2 \Phi \\ R^2 \cos^2 \Phi & R^2 \end{bmatrix} \quad |c_{KL}| = R^4 \cos^2 \Phi \sin^2 \Phi \quad (146)$$

$$\Rightarrow \sqrt{\det CG^{-1}} = \sin \Phi \quad (147)$$

Diese Wurzel ist gleichzeitig ein Maß für die Flächenverzerrung, und damit ist die Abbildung nur im Nordpol und einer infinitesimalen Umgebung flächenerhaltend, und am Äquator ist $\det C / \det G = 0$. Mit den Formeln 34 lassen sich nun die Hauptstreckungsmaße berechnen:

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\sqrt{1 + \cos \Delta} + \sqrt{1 - \cos \Delta} \right] \\ &= \cos \frac{\Delta}{2} + \sin \frac{\Delta}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\Phi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\Phi}{2}\right) \\ \Lambda_2 &= \cos \frac{\Delta}{2} - \sin \frac{\Delta}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\Phi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\Phi}{2}\right) \end{aligned} \quad (148)$$

Die Abbildung 7 zeigt das Bild dieser Projektion.

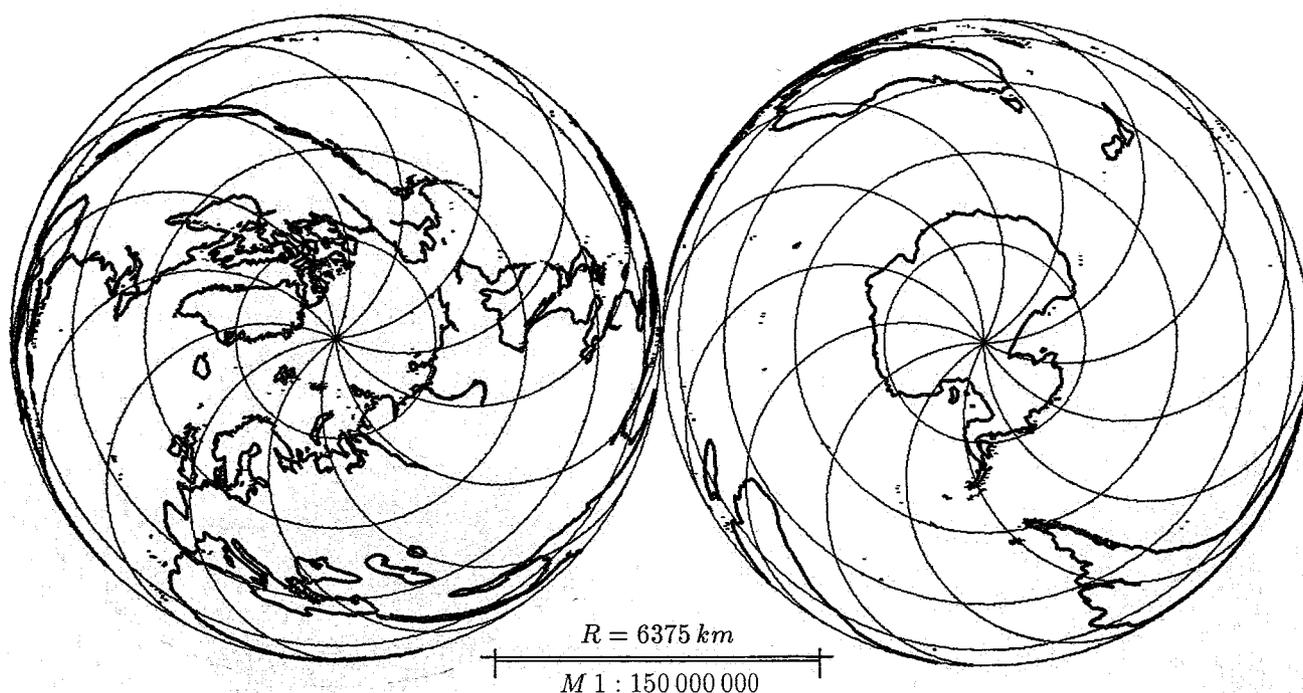


Abbildung 7: Äquidistante Meridiane und Parallelkreise

9 Programm-Listing

Zum Erstellen der Zeichnungen der Abbildungen nach *Bonne*, *Stab-Werner*, *Wiechel* und der äquidistanten Projektion, wurde ein FORTRAN 77 Programm erstellt, das das Graphik-Paket *Picasso* an der COMPAREX 5/89 im Rechenzentrum der Universität Stuttgart benutzt. Das Programm besteht aus einem Hauptprogramm 'KAPRO' und verschiedenen Unterprogrammen, die alle 'ABBILD' bzw. 'PARA' heißen. Die Einheiten werden getrennt kompiliert, und anschließend wird die gewünschte Kartenprojektion mit den passenden Parametern angelinkt. Dies übernimmt ein sogenanntes ausführbares Programm (EXEC-file), so daß sich der Benutzer nicht um Programmstrukturen kümmern muß.

Das Hauptprogramm erstellt das komplette Bild auf einen Zwischenfile, d.h. es werden nach den Abbildungsgleichungen die Parameterlinien und Kontinentalumrisse auf ein virtuelles Ausgabegerät geschrieben, dieser file kann mit dem Programm 'MFPROZ' auf einem grafikfähigen Terminal angeschaut oder an ein anderes Ausgabegerät, z.B. versatec-Plotter am RUS, geschickt werden.



```
PROGRAM KAPRO
C PROGRAMM ZUR GRAPHISCHEN DARSTELLUNG EINER KARTOGRAPHISCHEN
C ABBILDUNG, DIE ABBILDUNGSGLEICHUNGEN MUESSEN IN DER SUBROUTINE
C 'ABBILD' UND DIE PARAMETER IN 'PARA' ANGELINKT WERDEN
C
COMMON SPEICHER(10000)
REAL MAST,R,LAM,PHI,PHIMIN,PHIMAX,PI,X,Y,XNULL,YNULL,RDUMMY
REAL XPLOT(31),YPLOT(31)
INTEGER NLAM,NPHI,INKR,I,J,IDUMMY,COUNT,INDI
LOGICAL BED1,BED2
COMMON /URSPRUNG/ XNULL,YNULL /MASSSTAB/ MAST
COMMON /PHI/ PHIMIN,PHIMAX
COMMON /ANZAHL/ NLAM,NPHI
C
C INITIALISIEREN VON PICASSO
C
CALL ZWFILE
CALL CORDEF(10000)
CALL DINFRP('A4H')
CALL XYMODE('FRA')
C
C SETZEN DER PARAMETER
C
CALL PARA
PI = 4.0*ATAN(1.0)
INKR = 500
WRITE(*,*) MAST
R = 6375000000.0/MAST
C
C ZEICHNEN DER MERIDIANE
C
DO 20 I = 0,NLAM
LAM = FLOAT(2*I)*PI/FLOAT(NLAM)-PI
CALL ABBILD(LAM,PHIMIN,X,Y,R)
CALL MOVETO(X+XNULL,Y+YNULL)
DO 10 J = 0,INKR
PHI = PHIMIN + FLOAT(J)*(PHIMAX-PHIMIN)/FLOAT(INKR)
CALL ABBILD(LAM,PHI,X,Y,R)
CALL MOVEON(X+XNULL,Y+YNULL)
10 CONTINUE
20 CONTINUE
C
C ZEICHNEN DER PARALLELKREISE
C
DO 40 J = 0,NPHI
PHI = PHIMIN+FLOAT(J)*(PHIMAX-PHIMIN)/FLOAT(NPHI)
CALL ABBILD(-PI,PHI,X,Y,R)
CALL MOVETO(X+XNULL,Y+YNULL)
DO 30 I = 0,INKR
LAM = FLOAT(I*2)*PI/FLOAT(INKR) - PI
CALL ABBILD(LAM,PHI,X,Y,R)
CALL MOVEON(X+XNULL,Y+YNULL)
30 CONTINUE
PRO00010
PRO00020
PRO00030
PRO00040
PRO00050
PRO00060
PRO00070
PRO00080
PRO00090
PRO00100
PRO00110
PRO00120
PRO00130
PRO00140
PRO00150
PRO00160
PRO00170
PRO00180
PRO00190
PRO00200
PRO00210
PRO00220
PRO00230
PRO00240
PRO00250
PRO00260
PRO00270
PRO00280
PRO00290
PRO00300
PRO00310
PRO00320
PRO00330
PRO00340
PRO00350
PRO00360
PRO00370
PRO00380
PRO00390
PRO00400
PRO00410
PRO00420
PRO00430
PRO00440
PRO00450
PRO00460
PRO00470
PRO00480
PRO00490
PRO00500
PRO00510
PRO00520
PRO00530
```



```
40 CONTINUE
C
C ZEICHEN DER KONTINENTALUMRISSE UND STRUKTURLINIEN
C
CALL STPEN (3)
CALL CMS('FILEDEF 1 DISK LAND DAT A.',IRC)
REWIND(1)
50 READ(1,*,END=999) IANZ, IDUMMY, IDUMMY, IDUMMY, RDUMMY
COUNT = 0
DO 60 I = 1, IANZ
  READ(1,*) LAM, PHI
  LAM = LAM *PI/180.
  PHI = PHI *PI/180.
  BED1 = (PHI.LT.PHIMAX)
  BED2 = (PHI.GT.PHIMIN)
  IF (BED1.AND.BED2) THEN
    COUNT = COUNT + 1
    CALL ABBILD(LAM, PHI, X, Y, R)
    XPLOT(COUNT) = X + XNULL
    YPLOT(COUNT) = Y + YNULL
  ELSE
    CALL POLYGO(XPLOT, YPLOT, COUNT)
    COUNT = 0
  ENDIF
60 CONTINUE
CALL POLYGO(XPLOT, YPLOT, COUNT)
GOTO 50
999 CONTINUE
CALL FINISH
END
```

PRO00540
PRO00550
PRO00560
PRO00570
PRO00580
PRO00590
PRO00600
PRO00610
PRO00620
PRO00630
PRO00640
PRO00650
PRO00660
PRO00670
PRO00680
PRO00690
PRO00700
PRO00710
PRO00720
PRO00730
PRO00740
PRO00750
PRO00760
PRO00770
PRO00780
PRO00790
PRO00800
PRO00810
PRO00820
PRO00830



```
C      ABBILDUNGSGLEICHUNGEN
SUBROUTINE ABBILD(LAM,PHI,X,Y,RADIUS)
C      UNTERPROGRAMM ZUR BERECHNUNG DER
C      KARTESISCHEN KOORDINATEN DER
C      STAB - WERNER ABBILDUNG
C
REAL LAM,PHI,X,Y,PI,RADIUS,R,ALPHA
PI = 4.0*ATAN(1.0)
IF (LAM.GT.PI) THEN LAM = LAM - 2.*PI
R = RADIUS * (PI/2.-PHI)
IF (R.GT.1.) THEN
  ALPHA = LAM * COS(PHI) * RADIUS / R
ELSE
  ALPHA = LAM
ENDIF
Y = - R*COS(ALPHA)
X = R*SIN(ALPHA)
RETURN
END

C
SUBROUTINE PARA
C      BEINHÄLTET ALLE PARAMETER UND UEBERGIBT
C      SIE AN DAS HAUPTPROGRAMM
REAL XNULL,YNULL,MAST,PHIMIN,PHIMAX,PI
INTEGER NLAM,NPHI
COMMON /URSPRUNG/ XNULL,YNULL /MASSSTAB/ MAST
COMMON /PHI/ PHIMIN,PHIMAX
COMMON /ANZAHL/ NLAM,NPHI
XNULL = 115.0
YNULL = 120.0
MAST = 2.5E8
NLAM = 12
NPHI = 7
PI = 4.0*ATAN(1.0)
PHIMIN = -PI/2.
PHIMAX = PI/2.
RETURN
END
```

STA00010
STA00020
STA00030
STA00040
STA00050
STA00060
STA00070
STA00080
STA00090
STA00100
STA00110
STA00120
STA00130
STA00140
STA00150
STA00160
STA00170
STA00180
STA00190
STA00200
STA00210
STA00220
STA00230
STA00240
STA00250
STA00260
STA00270
STA00280
STA00290
STA00300
STA00310
STA00320
STA00330
STA00340
STA00350
STA00360
STA00370
STA00380



C	ABBILDUNGSGLEICHUNGEN	BON00010
	SUBROUTINE ABBILD(LAM,PHI,X,Y,RADIUS)	BON00020
C	UNTERPROGRAMM ZUR BERECHNUNG DER	BON00030
C	KARTESISCHEN KOORDINATEN DER	BON00040
C	BONNE ABBILDUNG	BON00050
C		BON00060
	REAL LAM,PHI,X,Y,PI,RADIUS,R,ALPHA,PHIO	BON00070
	PI = 4.0*ATAN(1.0)	BON00080
	PHIO = PI/4.0	BON00090
	IF (LAM.GT.PI) THEN LAM = LAM - 2.*PI	BON00100
	R = RADIUS * (1/TAN(PHIO)+PHIO-PHI)	BON00110
	ALPHA = LAM * COS(PHI) * RADIUS / R	BON00120
	Y = - R*COS(ALPHA)	BON00130
	X = R*SIN(ALPHA)	BON00140
	RETURN	BON00150
	END	BON00160
C		BON00170
	SUBROUTINE PARA	BON00180
C		BON00190
	REAL PI,MAST,XNULL,YNULL,PHIMIN,PHIMAX	BON00200
	INTEGER NLAM,NPHI	BON00210
	COMMON /URSPRUNG/ XNULL,YNULL /MASSSTAB/ MAST	BON00220
	COMMON /PHI/ PHIMIN,PHIMAX	BON00230
	COMMON /ANZAHL/ NLAM,NPHI	BON00240
	PI = 4.0*ATAN(1.0)	BON00250
	XNULL = 105.0	BON00260
	YNULL = 200.0	BON00270
	MAST = 2.5E8	BON00280
	NLAM = 12	BON00290
	NPHI = 6	BON00300
	PHIMIN = -PI/2.0	BON00310
	PHIMAX = PI/2.0	BON00320
	RETURN	BON00330
	END	BON00340



C	ABBILDUNGSGLEICHUNGEN	WIE00010
	SUBROUTINE ABBILD(LAM,PHI,X,Y,RADIUS)	WIE00020
C	UNTERPROGRAMM ZUR BERECHNUNG DER	WIE00030
C	KARTESISCHEN KOORDINATEN DER	WIE00040
C	WIECHEL ABBILDUNG	WIE00050
C		WIE00060
	REAL LAM,PHI,X,Y,PI,RADIUS,R,ALPHA	WIE00070
	PI = 4.0*ATAN(1.0)	WIE00080
	IF (LAM.GT.PI) THEN LAM = LAM - 2.*PI	WIE00090
	R = 2. * RADIUS * SIN(PI/4.-ABS(PHI)/2.)	WIE00100
	ALPHA = LAM + 0.5*(PI/2.-PHI)	WIE00110
	ALPHA = ALPHA * SIGN(1.0,PHI)	WIE00120
	Y = - R*COS(ALPHA)	WIE00130
	X = R*SIN(ALPHA)	WIE00140
	RETURN	WIE00150
	END	WIE00160
C		WIE00170
	SUBROUTINE PARA	WIE00180
C		WIE00190
	REAL PI,MAST,XNULL,YNULL,PHIMIN,PHIMAX	WIE00200
	INTEGER NLAM,NPHI	WIE00210
	COMMON /URSPRUNG/ XNULL,YNULL /MASSTAB/ MAST	WIE00220
	COMMON /PHI/ PHIMIN,PHIMAX	WIE00230
	COMMON /ANZAHL/ NLAM,NPHI	WIE00240
	PI = 4.0*ATAN(1.0)	WIE00250
	XNULL = 105.0	WIE00260
	YNULL = 120.0	WIE00270
	MAST = 2.0E8	WIE00280
	NLAM = 12	WIE00290
	NPHI = 5	WIE00300
	PHIMIN = 0.0	WIE00310
	PHIMAX = PI/2.0	WIE00320
	RETURN	WIE00330
	END	WIE00340



```
C      ABBILDUNGSGLEICHUNGEN                                NEU00010
      SUBROUTINE ABBILD(LAM,PHI,X,Y,RADIUS)                 NEU00020
C      UNTERPROGRAMM ZUR BERECHNUNG DER                   NEU00030
C      KARTESISCHEN KOORDINATEN DER                       NEU00040
C      AEQUIDISTANTEN ABBILDUNG                           NEU00050
C                                                         NEU00060
      REAL LAM,PHI,X,Y,PI,RADIUS,R,ALPHA                 NEU00070
      PI = 4.0*ATAN(1.0)                                   NEU00080
      IF (LAM.GT.PI) THEN LAM = LAM - 2.*PI              NEU00090
      R = RADIUS * COS( PHI )                             NEU00100
      ALPHA = LAM + ( PI/2.- PHI )                       NEU00110
      ALPHA = ALPHA * SIGN(1.0,PHI)                     NEU00120
      Y = - R*COS(ALPHA)                                  NEU00130
      X = R*SIN(ALPHA)                                    NEU00140
      RETURN                                              NEU00150
      END                                                 NEU00160
C                                                         NEU00170
      SUBROUTINE PARA                                     NEU00180
C                                                         NEU00190
      REAL PI,MAST,XNULL,YNULL,PHIMIN,PHIMAX             NEU00200
      INTEGER NLAM,NPHI                                  NEU00210
      COMMON /URSPRUNG/ XNULL,YNULL /MASSTAB/ MAST       NEU00220
      COMMON /PHI/ PHIMIN,PHIMAX                        NEU00230
      COMMON /ANZAHL/ NLAM,NPHI                         NEU00240
      PI = 4.0*ATAN(1.0)                                  NEU00250
      XNULL = 105.0                                       NEU00260
      YNULL = 120.0                                       NEU00270
      MAST = 1.5E8                                         NEU00280
      NLAM = 12                                           NEU00290
      NPHI = 5                                             NEU00300
      PHIMIN = 0.0                                        NEU00310
      PHIMAX = PI/2.0                                     NEU00320
      RETURN                                              NEU00330
      END                                                 NEU00340
```



10 Literatur

- R.Bourgeois & Ph.Furtwängler [1906-1925]** Kartographie, Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, VI 1,4 B.G.Teubner Verlag, Leipzig
- I.N.Bronstein & K.A.Semendjajew [1985]** Taschenbuch der Mathematik, Thun, Frankfurt/Main - 22.Auflage
- A.C.Eringen [1962]** Nonlinear Theory of Continuous Media, New York: Krieger (1962)
- E.W.Grafarend** Vorlesungsmanuskript 'Kartenprojektionslehre', Universität Stuttgart
- E.W.Grafarend** Vorlesungsmanuskript 'Differentialgeometrie für Geodäten', Universität Stuttgart
- B.Heck [1987]** Rechenverfahren und Auswertemodelle der Landesvermessung-Karlsruhe: Wiechmann
- W.Klingenberg [1973]** Eine Vorlesung über Differentialgeometrie, Heidelberger Taschenbücher Band 107, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York
- L.P.Lee [1944]** The Nomenclature and Classification of Map Projections Empire Survey Review 7 (1944) 190-200
- L.Lichtenstein [1911]** Abh. Kgl. Preuß. Akad. Wiss. Berlin, Phys.-Math. Klasse, 1911, Anhang, Abhandlung VI, 1-49
- D.H.Maling [1973]** Coordinate Systems and Map Projections, Georg Philip and Son Limited, London
- H.Merkel [1956,1958]** Grundzüge der Kartenprojektionslehre, Teil I und II, Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, München 1956/58
- J.P.Snyder [1977]** A Comparison of Pseudocylindrical Map Projections, American Cartographer, Vol 4, No 1 (1977) pp.59-81
- J.P.Snyder [1988]** Bibliography of Map Projections, (U.S. Geological Survey Bulletin: 1856)
- W.R.Tobler [1962]** A Classification of Map Projection, Annals of the Association of American Geographers 52 (1962)
- W.R.Tobler [1973]** The Hyperelliptical and other New Pseudo Cylindrical Equal Area Map Projections, Annals of the Association of American Geographers, Vol. 78 No II (1973)
- R.Zurmühl [1964]** Matrizen und ihre technischen Anwendungen, Springer Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1964