ERSTELLUNG VON ID-CARDS AUSGEWÄHLTER KEGELABBILDUNGEN DER KUGEL UND DES ROTATIONSELLIPSOIDES

STUDIENARBEIT VON MARKUS IRSIGLER

- Geodätisches Institut der Universität Stuttgart –

Betreuung

Prof. Dr.-Ing.habil. Dr.tech.h.c.mult. Dr-Ing.E.h.
Erik W. Grafarend

Dipl.-Ing. Rainer Syffus

1998

INHALTSVERZEICHNIS

INHALTSVERZEICHNIS

KAPITEL 1

MATHEMATISCHE GRUNDLAGEN DER KARTENPROJEKTIONSLEHRE

1-1. GRUNDLAGEN DER LOKALEN FLÄCHENTHEORIE

Die Kartenprojektionslehre beschäftigt sich allgemein mit der Abbildung von Flächen auf Flächen. Dabei wird diejenige Fläche, deren Punkte abgebildet werden, als "Urbildfläche" oder kurz "Urbild" bezeichnet, diejenige Fläche, auf welche die Punkte des Urbilds abgebildet werden, wird "Bildfläche" oder kurz "Bild" genannt.

Für die Beschreibung einer Fläche im dreidimensionalen euklidischen Raum existieren mehrere Darstellungsmöglichkeiten. Die wichtigste ist die **Parameterdarstellung**, mittels derer ein Punkt der Fläche durch zwei Flächenparameter u^1 und u^2 festgelegt wird. Bezüglich eines dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystems, das durch die Einheitsvektoren $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$ und $\mathbf{e_3}$ aufgespannt wird, lautet die allgemeine Parameterdarstellung einer solchen Fläche:

$$\text{(1.1)} \qquad \boldsymbol{x}(u^1,u^2) = x(u^1,u^2)\boldsymbol{e_1} + y(u^1,u^2)\boldsymbol{e_2} + z(u^1,u^2)\boldsymbol{e_3} = \begin{pmatrix} x(u^1,u^2) \\ y(u^1,u^2) \\ z(u^1,u^2) \end{pmatrix} (\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2},\boldsymbol{e_3})^T$$

Für u = const. bzw. v = const. erhält man in der Fläche liegende Raumkurven, die sogenannten **Parameterlinien** (*coordinate lines*). Eine besondere Bedeutung für die nachfolgenden Betrachtungen besitzen die Tangentenvektoren an diese Parameterlinien; sie werden auch als **GAUSSsche Tangentenvektoren** bezeichnet und spannen die Tangentialebene im Punkt **x**(u,v) auf (falls eine solche überhaupt existiert). Sie sind folgendermaßen definiert:

$$\boldsymbol{g_1} := \frac{\partial \boldsymbol{x}(u^1,u^2)}{\partial u^1} = \boldsymbol{x}_{u^1}(u^1,u^2) = \frac{\partial x(u^1,u^2)}{\partial u^1}\boldsymbol{e_1} + \frac{\partial y(u^1,u^2)}{\partial u^1}\boldsymbol{e_2} + \frac{\partial z(u^1,u^2)}{\partial u^1}\boldsymbol{e_3}$$
$$\boldsymbol{g_2} := \frac{\partial \boldsymbol{x}(u^1,u^2)}{\partial u^2} = \boldsymbol{x}_{u^2}(u^1,u^2) = \frac{\partial x(u^1,u^2)}{\partial u^2}\boldsymbol{e_1} + \frac{\partial y(u^1,u^2)}{\partial u^2}\boldsymbol{e_2} + \frac{\partial z(u^1,u^2)}{\partial u^2}\boldsymbol{e_3}$$

Die GAUSSschen Tangentenvektoren stehen nur dann senkrecht aufeinander, wenn sich die Parameterlinien orthogonal schneiden. Ist dies der Fall, so spricht man von einer **orthogonalen Parametrisierung** der vorliegenden Fläche.

Die Geometrie einer Fläche wird durch ihre Metrik charakterisiert, welche den Abstand *ds* zweier infinitesimal benachbarter Punkte auf dieser Fläche beschreibt. Dieser Abstand kann für eine beliebige Fläche ausgehend von ihrer Parametrisierung und den zugehörigen GAUSSschen Tangentenvektoren berechnet werden.
Zunächst werden die Komponenten des zur jeweiligen Fläche gehörenden Metriktensors benötigt, welche auch als **Fundamentalgrößen 1.Art** bezeichnet werden:

$$e := \langle \boldsymbol{g_1} \,|\, \boldsymbol{g_1} \rangle = \langle \boldsymbol{x}_{u^1}(u^1,u^2) \,|\, \boldsymbol{x}_{u^1}(u^1,u^2) \rangle$$
$$f := \langle \boldsymbol{g_1} \,|\, \boldsymbol{g_2} \rangle = \langle \boldsymbol{x}_{u^1}(u^1,u^2) \,|\, \boldsymbol{x}_{u^2}(u^1,u^2) \rangle$$
$$g := \langle \boldsymbol{g_2} \,|\, \boldsymbol{g_2} \rangle = \langle \boldsymbol{x}_{u^2}(u^1,u^2) \,|\, \boldsymbol{x}_{u^2}(u^1,u^2) \rangle$$

Der zur jeweiligen Fläche gehörende **Metriktensor** besitzt folgendes Aussehen:

$$[g_{kl}] = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

Da das innere Produkt zweier Vektoren kommutativ ist, gilt stets:

$$f = \langle \boldsymbol{g_1} | \boldsymbol{g_2} \rangle = \langle \boldsymbol{g_2} | \boldsymbol{g_1} \rangle = g_{12} = g_{21}$$

Liegt zudem eine orthogonale Parametrisierung der zugrunde liegenden Fläche vor, so gilt:

$$f = g_{12} = g_{21} = 0$$

Die **1.Fundamentalform** (*distance function*) beschreibt das Quadrat des Abstands *ds* zweier infinitesimal benachbarter Flächenpunkte; sie läßt sich mit Hilfe der eben berechneten Komponenten des Metriktensors $[g_{kl}]$ in folgender Form darstellen:

$$\begin{aligned} I = ds^2 &= g_{kl} du^k du^l \\ &= e(du^1)^2 + 2f du^1 du^2 + g(du^2)^2 \\ &= g_{11}(du^1)^2 + 2g_{12} du^1 du^2 + g_{22}(du^2)^2 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Zur eindeutigen Unterscheidung zwischen Urbild- und Bildfläche werden im folgenden sämtliche auf das Urbild bezogene Größen mit Großbuchstaben, auf das Bild bezogene Größen hingegen mit Kleinbuchstaben dargestellt. Die allgemeine Parameterdarstellung einer Urbildfläche laute also gemäß (1.1)

$$\boldsymbol{X}(U^1,U^2) = X(U^1,U^2)\boldsymbol{E_1} + Y(U^1,U^2)\boldsymbol{E_2} + Z(U^1,U^2)\boldsymbol{E_3}$$

Entsprechend laute die allgemeine Parameterdarstellung der zugehörigen Bildfläche:

$$\boldsymbol{x}(u^1,u^2) = x(u^1,u^2)\boldsymbol{e_1} + y(u^1,u^2)\boldsymbol{e_2} + z(u^1,u^2)\boldsymbol{e_3}$$

Eine spezielle Aufgabe der Kartenprojektionslehre besteht darin, die Erdoberfläche oder Ausschnitte aus dieser in einer (ebenen) Karte darzustellen. Dies soll Gegenstand der vorliegenden Arbeit sein.

1-2. MÖGLICHE URBILDFLÄCHEN FÜR ABBILDUNGEN DER ERDOBERFLÄCHE

Für die Darstellung in einer Karte muß die Erdoberfläche durch eine geeignete Urbildfläche approximiert werden. In Abhängigkeit der gewünschten Genauigkeit stehen hierfür mehrere Flächen zur Verfügung.
Als Urbildfläche wird üblicherweise entweder eine **Kugel** (*sphere*) oder aber ein **Rotationsellipsoid** (*ellipsoid of revolution*) verwendet. Eine dritte (theoretische) Möglichkeit für die Wahl einer Urbildfläche stellt das **dreiachsige Ellipsoid** dar, das allerdings keinerlei praktische Bedeutung besitzt und hier nur der Vollständigkeit halber aufgeführt ist.

a) Die **Kugel** wird üblicherweise in sphärischer Länge Λ und sphärischer Breite Φ parametrisiert. Die sphärische Länge Λ eines Punktes P ist der in der Äquatorebene nach Osten positiv gezählte Winkel zwischen dem Hauptmeridian der Kugel (Bezugsmeridian, Nullmeridian) und dem durch den Punkt P verlaufenden Meridian. Die sphärische Breite Φ stellt den Winkel zwischen der Äquatorebene und der Verbindungslinie Kugelmittelpunkt – Punkt P dar (Fig. 1.2). Alternativ kann die Kugel auch in sphärischer Länge Λ und sphärischer Poldistanz Δ parametrisiert werden. Bei der Poldistanz Δ handelt es sich um den Komplementärwinkel von Φ zu 90°, es gilt also $\Delta = 90° - \Phi$.

b) Im Falle des **Rotationsellipsoids** gilt für die ellipsoidische Länge L eines Punktes P dieselbe Definition wie für den Längenwinkel Λ der Kugel. Für die Festlegung des Breitenwinkels gibt es verschiedene Möglichkeiten, von denen an dieser Stelle die wichtigsten vorgestellt werden sollen.

(i) Geozentrische Breite γ

Unter der geozentrischen Breite γ eines Punktes P versteht man den Winkel zwischen der Äquatorebene und der Verbindungslinie Ellipsoidmittelpunkt – Punkt P.

(ii) Ellipsoidnormale (geographische) Breite B

Unter der ellipsoidnormalen Breite B eines Punktes P des Rotationsellipsoids versteht man den Winkel, den die im Punkt P errichtete Flächennormale mit der Äquatorebene einschließt.

(iii) Reduzierte Breite β

Unter der reduzierten Breite β eines Punktes P des Rotationsellipsoids versteht man den Winkel zwischen der Äquatorebene und der Verbindungslinie Ellipsoidmittelpunkt – Punkt P'. Dieser wird durch eine senkrecht zur Äquatorebene verlaufende Projektion des Punktes P auf eine im Mittelpunkt des Rotationsellipsoids gelagerte Kugel gewonnen, die als Radius die große Halbachse des Rotationsellipsoids besitzt.

Für jeden dieser drei Breitenwinkel kann analog zum Kugelfall eine zugehörige Poldistanz angegeben werden. Fig. 1.1 zeigt einen Meridianschnitt, in dem die drei Breiten sowie die zur ellipsoidnormalen Breite gehörige Poldistanz Δ dargestellt sind.

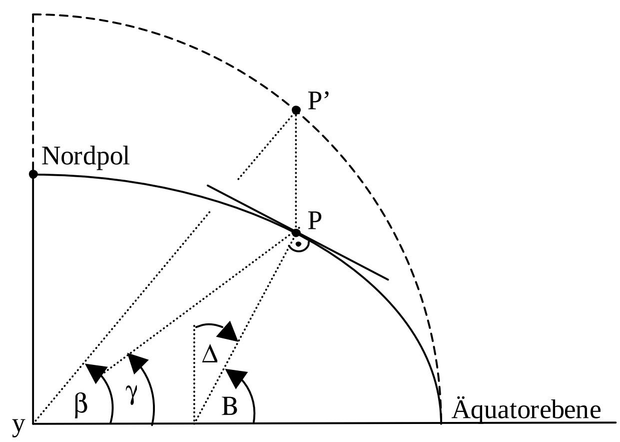


Fig. 1.1: Mögliche Breitenparametrisierungen für das Rotationsellipsoid

Im folgenden wird stets davon ausgegangen, daß, wie in Fig. 1.2 dargestellt, die Kugel in sphärischer Länge Λ (*spherical longitude*) und sphärischer Breite Φ (*spherical latitude*) und das Rotationsellipsoid in ellipsoidischer Länge L (*ellipsoidal longitude*) und ellipsoidnormaler Breite B (*ellipsoidal normal latitude*) parametrisiert ist.

Im Sinne der in Gleichung (1.1) vorgestellten allgemeinen Parameterdarstellung gilt also für die Kugel:

$$U^1 = \Lambda \qquad U^2 = \Phi \qquad \text{und somit} \qquad \boldsymbol{X}(U^1, U^2) = \boldsymbol{X}(\Lambda, \Phi)$$

Für das Rotationsellipsoid gilt entsprechend:

$$U^1 = L \qquad U^2 = B \qquad \text{und somit} \qquad \boldsymbol{X}(U^1, U^2) = \boldsymbol{X}(L, B)$$

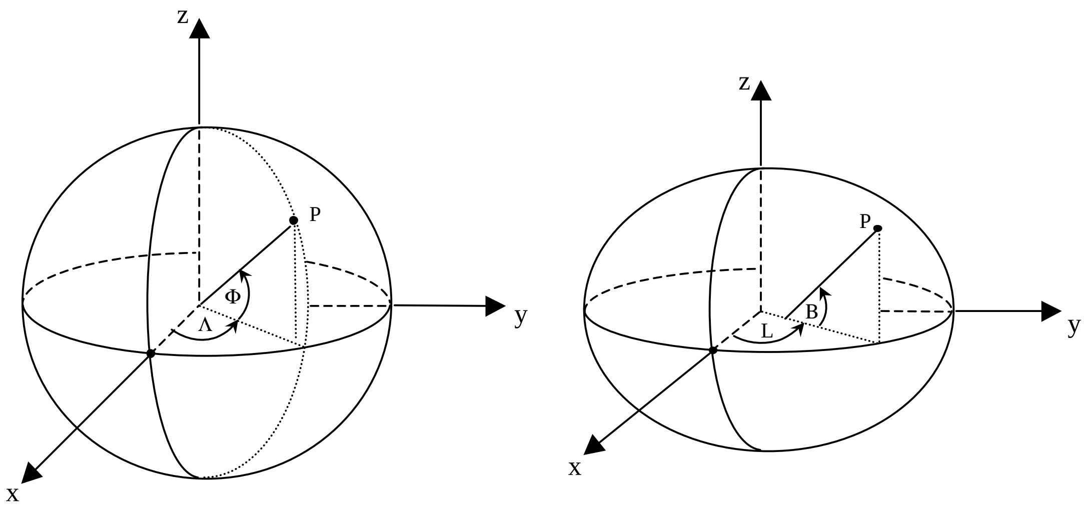


Fig. 1.2: Gebräuchliche Parametrisierungen von Kugel und Rotationsellipsoid

In dem Fig. 1.2 zugrunde liegenden globalen und orthonormalen (X,Y,Z) – Koordinatensystem, das aus den Einheitsvektoren $\mathbf{E_1}$, $\mathbf{E_2}$ und $\mathbf{E_3}$ gebildet werden soll, läßt sich der Ortsvektor **X** eines Punktes P der Kugel mit dem Radius R folgendermaßen darstellen:

$$\boldsymbol{X}(\Lambda, \Phi) = \begin{pmatrix} R\cos\Lambda\cos\Phi \\ R\sin\Lambda\cos\Phi \\ R\sin\Phi \end{pmatrix} (\boldsymbol{E_1}, \boldsymbol{E_2}, \boldsymbol{E_3})^T$$

$$= R\cos\Lambda\cos\Phi\boldsymbol{E_1} + R\sin\Lambda\cos\Phi\boldsymbol{E_2} + R\sin\Phi\boldsymbol{E_3}$$

Für ein Rotationsellipsoid mit großer Halbachse A und Quadrat der ersten numerischen Exzentrizität E² gilt:

$$\boldsymbol{X}(L,B)=\frac{A}{\sqrt{1-E^2\sin^2 B}}\begin{pmatrix}\cos L\cos B\\ \sin L\cos B\\ (1-E^2)\sin B\end{pmatrix}(\boldsymbol{E_1},\boldsymbol{E_2},\boldsymbol{E_3})^T$$

$$=\frac{A}{\sqrt{1-E^2\sin^2 B}}(\cos L\cos B\boldsymbol{E_1}+\sin L\cos B\boldsymbol{E_2}+(1-E^2)\sin B\boldsymbol{E_3})$$

Ausgehend von diesen beiden Parameterdarstellungen sollen nun die zugehörigen Metriktensoren sowie die ersten Fundamentalformen berechnet werden. Dazu werden zunächst die GAUSSschen Tangentenvektoren bereitgestellt. Diese lauten für die Kugel:

$$\boldsymbol{G_1}=\frac{\partial\boldsymbol{X}(U^1,U^2)}{\partial U^1}=\frac{\partial\boldsymbol{X}(\Lambda,\Phi)}{\partial\Lambda}=\boldsymbol{X}_\Lambda=-R\sin\Lambda\cos\Phi\boldsymbol{E_1}+R\cos\Lambda\cos\Phi\boldsymbol{E_2}$$
$$\boldsymbol{G_2}=\frac{\partial\boldsymbol{X}(U^1,U^2)}{\partial U^2}=\frac{\partial\boldsymbol{X}(\Lambda,\Phi)}{\partial\Phi}=\boldsymbol{X}_\Phi=-R\cos\Lambda\sin\Phi\boldsymbol{E_1}-R\sin\Lambda\sin\Phi\boldsymbol{E_2}+R\cos\Phi\boldsymbol{E_3}$$

Für das Rotationsellipsoid erhält man entsprechend:

$$\boldsymbol{G_1}=\frac{\partial\boldsymbol{X}(U^1,U^2)}{\partial U^1}=\frac{\partial\boldsymbol{X}(L,B)}{\partial L}=\boldsymbol{X}_L=\frac{A\cos B}{\sqrt{1-E^2\sin^2 B}}\left(-\sin L\boldsymbol{E_1}+\cos L\boldsymbol{E_2}\right)$$
$$\boldsymbol{G_2}=\frac{\partial\boldsymbol{X}(U^1,U^2)}{\partial U^2}=\frac{\partial\boldsymbol{X}(L,B)}{\partial B}=\boldsymbol{X}_B=-\frac{A\left(1-E^2\right)}{\left(1-E^2\sin^2 B\right)^{3/2}}\left(\cos L\sin B\boldsymbol{E_1}+\sin L\sin B\boldsymbol{E_2}-\cos B\boldsymbol{E_3}\right)$$

Die Fundamentalgrößen 1.Art berechnen sich nun zu:

$$E=\langle\boldsymbol{G_1}|\boldsymbol{G_1}\rangle=\langle\boldsymbol{X}_\Lambda|\boldsymbol{X}_\Lambda\rangle=R^2\cos^2\Phi$$
$$F=\langle\boldsymbol{G_1}|\boldsymbol{G_2}\rangle=\langle\boldsymbol{X}_\Lambda|\boldsymbol{X}_\Phi\rangle=0$$
$$G=\langle\boldsymbol{G_2}|\boldsymbol{G_2}\rangle=\langle\boldsymbol{X}_\Phi|\boldsymbol{X}_\Phi\rangle=R^2$$

(Kugel)

$$E=\langle\boldsymbol{G_1}|\boldsymbol{G_1}\rangle=\langle\boldsymbol{X}_L|\boldsymbol{X}_L\rangle=\frac{A^2\cos^2 B}{1-E^2\sin^2 B}$$
$$F=\langle\boldsymbol{G_1}|\boldsymbol{G_2}\rangle=\langle\boldsymbol{X}_L|\boldsymbol{X}_B\rangle=0$$
$$G=\langle\boldsymbol{G_2}|\boldsymbol{G_2}\rangle=\langle\boldsymbol{X}_B|\boldsymbol{X}_B\rangle=\frac{A^2\left(1-E^2\right)^2}{\left(1-E^2\sin^2 B\right)^3}$$

(Rotationsellipsoid)

Somit lauten die Metriktensoren der Kugel bzw. des Rotationsellipsoids:

$$[G_{KL}] = \begin{pmatrix} R^2 \cos^2 \Phi & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix} \qquad [G_{KL}] = \begin{pmatrix} \dfrac{A^2 \cos^2 B}{1 - E^2 \sin^2 B} & 0 \\ 0 & \dfrac{A^2 (1 - E^2)^2}{(1 - E^2 \sin^2 B)^3} \end{pmatrix}$$

(Kugel) *(Rotationsellipsoid)*

Nun lassen sich leicht die ersten Fundamentalformen beider Flächen angeben. Für die Kugel ergibt sich

$$I := dS^2 = G_{KL} dU^K dU^L = R^2 \cos^2 \Phi d\Lambda^2 + R^2 d\Phi^2 ,$$

und für das Rotationsellipsoid erhält man

$$I := dS^2 = G_{KL} dU^K dU^L = \frac{A^2 \cos^2 B}{1 - E^2 \sin^2 B} dL^2 + \frac{A^2 (1 - E^2)^2}{(1 - E^2 \sin^2 B)^3} dB^2 .$$

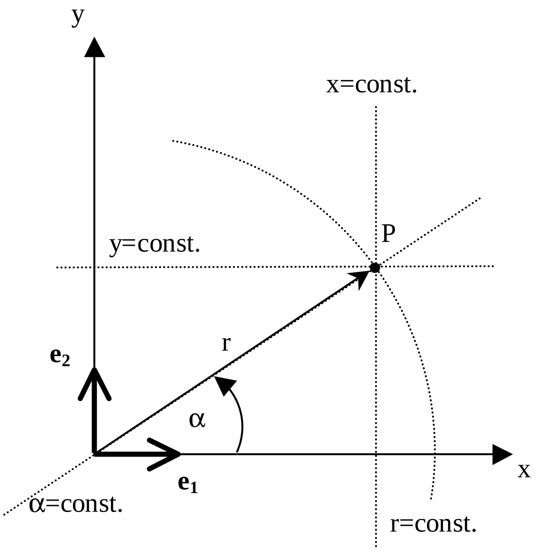
1-3. MÖGLICHE BILDFLÄCHEN

Da die Punkte der Urbildfläche nach erfolgter Abbildung in einer (ebenen) Karte dargestellt werden sollen, kommen als Bildflächen nur solche Flächen in Frage, die entweder von vornherein keine Krümmung besitzen (*Ebene*) oder sich nach erfolgter Abbildung in die Ebene abwickeln lassen. Zu letzteren gehören *Zylinder* und *Kegel*, die entlang einer Mantellinie aufgeschnitten und in die Ebene abgerollt werden können.

In allen Fällen handelt es sich bei der Bildfläche schließlich um eine **Ebene**, die entweder in **kartesischen Koordinaten (x,y)** (*cartesian coordinates*) oder in **Polarkoordinaten (r,α)** (*polar coordinates*) parametrisiert werden kann. In beiden Darstellungen kann der Ortsvektor **x** eines Punktes P der Ebene bezüglich eines durch die orthonormalen Basisvektoren $\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{e}_2$ aufgespannten (x,y) – Koordinatensystems und unter Verwendung der bekannten Transformation von Polarkoordinaten in kartesische Koordinaten

$$x = r \cos\alpha$$
$$y = r \sin\alpha$$

gemäß Fig. 1.3 folgendermaßen koordiniert werden:



$$\mathbf{x}(x,y) = x\mathbf{e_1} + y\mathbf{e_2}$$
$$\mathbf{x}(\alpha,r) = r\cos\alpha\mathbf{e_1} + r\sin\alpha\mathbf{e_2}$$

Fig. 1.3: Parametrisierung der Ebene

Im Sinne der in Gleichung (1.1) vorgestellten Parameterdarstellung gilt also für die Parametrisierung der Ebene in kartesischen Koordinaten (*x,y*):

$$u^1 = x \qquad u^2 = y \qquad \text{und somit} \qquad \boldsymbol{x}(u^1,u^2) = \boldsymbol{x}(x,y)$$

Liegt eine Parametrisierung der Ebene in Polarkoordinaten (α,*r*) vor, so gilt entsprechend:

$$u^1 = \alpha \qquad u^2 = r \qquad \text{und somit} \qquad \boldsymbol{x}(u^1,u^2) = \boldsymbol{x}(\alpha,r)$$

Ausgehend von diesen beiden Parametrisierungen sollen nun die zugehörigen Metriktensoren sowie die ersten Fundamentalformen berechnet werden. Dazu werden zunächst wiederum die GAUSSschen Tangentenvektoren bereitgestellt.

$$\boldsymbol{g_1} := \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x} = \boldsymbol{x}_x = \boldsymbol{e_1} \qquad \boldsymbol{g_1} := \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \alpha} = \boldsymbol{x}_\alpha = -r\sin\alpha\boldsymbol{e_1} + r\cos\alpha\boldsymbol{e_2}$$
$$\boldsymbol{g_2} := \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial y} = \boldsymbol{x}_y = \boldsymbol{e_2} \qquad \boldsymbol{g_2} := \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial r} = \boldsymbol{x}_r = \cos\alpha\boldsymbol{e_1} + \sin\alpha\boldsymbol{e_2}$$

(kartesisch) *(polar)*

Die Fundamentalgrößen 1.Art berechnen sich zu:

$$e = \langle \boldsymbol{g_1} | \boldsymbol{g_1} \rangle = \langle \boldsymbol{x}_x | \boldsymbol{x}_x \rangle = 1 \qquad e = \langle \boldsymbol{g_1} | \boldsymbol{g_1} \rangle = \langle \boldsymbol{x}_\alpha | \boldsymbol{x}_\alpha \rangle = r^2$$
$$f = \langle \boldsymbol{g_1} | \boldsymbol{g_2} \rangle = \langle \boldsymbol{x}_x | \boldsymbol{x}_y \rangle = 0 \qquad f = \langle \boldsymbol{g_1} | \boldsymbol{g_2} \rangle = \langle \boldsymbol{x}_\alpha | \boldsymbol{x}_r \rangle = 0$$
$$g = \langle \boldsymbol{g_2} | \boldsymbol{g_2} \rangle = \langle \boldsymbol{x}_y | \boldsymbol{x}_y \rangle = 1 \qquad g = \langle \boldsymbol{g_2} | \boldsymbol{g_2} \rangle = \langle \boldsymbol{x}_r | \boldsymbol{x}_r \rangle = 1$$

(kartesisch) *(polar)*

Die Metriktensoren und ersten Fundamentalformen für beide Parametrisierungen lauten:

$$[g_{kl}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad [g_{kl}] = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I := ds^2 = g_{kl} du^k du^l = dx^2 + dy^2 \qquad\qquad I := ds^2 = g_{kl} du^k du^l = r^2 d\alpha^2 + dr^2$$

(kartesisch) *(polar)*

1-4. ABBILDUNGSGLEICHUNGEN

Als nächster Schritt wird ein funktionaler Zusammenhang zwischen den Bild- und den Urbildkoordinaten benötigt, aus vorgegebenen Urbildkoordinaten sollen also die entsprechenden Punkte im Bild berechnet werden.
Im allgemeinsten Fall, in dem das Urbild mittels der Flächenparameter U^1 und U^2 und das Bild mittels der Flächenparameter u^1 und u^2 parametrisiert wird, lautet dieser funktionale Zusammenhang:

$$\boxed{\begin{aligned} u^1 &= f_1(U^1, U^2) \\ u^2 &= f_2(U^1, U^2) \end{aligned}} \tag{1.3}$$

Die Funktionen f_1 und f_2 heißen (direkte) **Abbildungsgleichungen** (*direct equations*). Die Indizes 1 und 2 sollen verdeutlichen, daß es sich jeweils um verschiedene Funktionen von U^1 und U^2 handelt. Im Fall von (1.3) werden Urbildpunkten die entsprechenden Punkte im Bild zugeordnet.

Genauso gut läßt eine inverse Abbildung konstruieren, mit der sich aus Koordinaten der Bildpunkte u^1, u^2 entsprechende Koordinaten der Urbildpunkte U^1,U^2 berechnen lassen. Die zugehörigen (inversen) Abbildungsgleichungen (*inverse equations*) besitzen folgendes Aussehen:

$$\boxed{\begin{aligned} U^1 &= f_3(u^1, u^2) \\ U^2 &= f_4(u^1, u^2) \end{aligned}} \tag{1.4}$$

Auch hier sollen die Indizes 3 und 4 verdeutlichen, daß es sich jeweils um verschiedene Funktionen von u^1 und u^2 handelt.

Die Funktionen f_1 und f_2 sind im allgemeinen nicht im gesamten Definitionsbereich von (U^1,U^2) eindeutig; einem Urbildpunkt kann folglich nicht immer genau ein Bildpunkt zugeordnet werden. Ebenso verhält es sich mit den Funktionen f_3 und f_4, welche ebenfalls nicht im gesamten Definitionsbereich von (u^1,u^2) eindeutig sind, so daß einem Bildpunkt nicht immer genau ein Urbildpunkt zugeordnet werden kann.

Zur Verdeutlichung dieses Sachverhaltes soll eine Abbildung der Erdoberfläche betrachtet werden. Dort können beispielsweise die folgenden Fälle auftreten:

→ ein bestimmter Meridian wird zweimal abgebildet
→ die Pole werden im Bild nicht als Punkt, sondern linienhaft dargestellt
→ bestimmte Punkte der Erdoberfläche können überhaupt nicht abgebildet werden

Im Rahmen dieser Arbeit wird stets davon ausgegangen, daß die Abbildungsgleichungen für die einzelnen Abbildungen bereits zur Verfügung stehen und nicht erst hergeleitet werden müssen.

1-5. KARTENMASSTAB

Wie bereits im Abschnitt 1-4. angedeutet, besteht zwischen den Urbild- und den Bildpunkten im allgemeinen kein eindeutiger Zusammenhang. Des weiteren ist es aus naheliegenden Gründen unmöglich, Teile der Erdoberfläche im Maßstab 1 : 1 in einer Karte darzustellen. Im Zuge einer Abbildung muß daher, je nach Größe des abzubildenden Gebietes, ein bestimmter Abbildungsmaßstab zugrunde gelegt werden, so daß sich Teile der Erdoberfläche in verkleinerter Form in der Karte wiederfinden. Der Abbildungsmaßstab kann wie folgt definiert werden:

- *Unter dem **Abbildungs- oder Kartenmaßstab** versteht man das Verhältnis des für die Abbildung zugrunde gelegten Kugelradius R zum Erdradius R_E. Es gilt also:*

$$M = \frac{R}{R_E}$$

Legt man beispielsweise eine Kugel mit dem Radius R = 1m zugrunde und setzt den Erdradius zu R_E = 6370000m an, so besitzt die Abbildung den Maßstab 1 : 6.370.000. Eine entsprechende Definition gilt natürlich auch für das Rotationsellipsoid. An die Stelle der Radien R bzw. R_E treten in diesem Fall die entsprechenden Ellipsoidhalbachsen.

1-6. VERZERRUNGSVERHÄLTNISSE

Bereits im Jahre 1777 hat Leonhard Euler in [7] gezeigt, daß eine gekrümmte Fläche wie eine Kugel oder ein Rotationsellipsoid nicht verzerrungsfrei in die Ebene abgebildet werden kann. Daraus resultiert die Eigenschaft jeder beliebigen Kartenprojektion, daß der jeweilige Abbildungsmaßstab (wie oben definiert) nicht überall in der Karte gilt, sondern nur in bestimmten Punkten oder entlang bestimmter (ausgezeichneter) Linien. Um den Maßstab in anderen Punkten oder entlang anderer Linien nicht als sehr kleine Zahl (z.B. in der Form 1 : 6.370.001) angeben zu müssen, wird ein "lokaler" Maßstab, die Längenverzerrung, eingeführt.

- *Unter **Längenverzerrung** oder **Streckung** Λ (stretch) versteht man den Maßstab in einem bestimmten Punkt der Karte oder entlang einer bestimmten Linie in der Karte. Dieser Maßstab beträgt in Punkten, in denen der Abbildungsmaßstab (wie oben definiert) beibehalten wird, definitionsgemäß Eins. Ebenso beträgt er entlang von Linien, auf welchen der Abbildungsmaßstab beibehalten wird, Eins; dort gilt somit*

$$\Lambda := 1,$$

ein solcher Punkt oder eine solche Linie wird also verzerrungsfrei abgebildet. In anderen Punkten oder entlang anderer Linien wird die Längenverzerrung Λ als Vielfaches von Eins angegeben.

Im folgenden ist stets die Längenverzerrung (Streckung) Λ gemeint, wenn von "Maßstab" gesprochen wird; wie eine solche Längenverzerrung in einem bestimmten Punkt der Karte berechnet werden kann, soll in diesem Abschnitt aufgezeigt werden.

Zu einer solchen Berechnung muß eine **Deformationsanalyse** der zugrundeliegenden Abbildung durchgeführt werden, deren Ausgangspunkt die Abbildungsgleichungen (1.3) und (1.4) bilden. Die Abbildungsgleichungen (1.3) werden im folgenden als "*direkte*", die Gleichungen (1.4) hingegen als "*inverse Abbildungsgleichungen*" bezeichnet:

$$u^1 = f_1(U^1, U^2) \qquad U^1 = f_3(u^1, u^2)$$
$$u^2 = f_2(U^1, U^2) \qquad U^2 = f_4(u^1, u^2)$$

direkt - links / *invers - rechts*

direct - left / *inverse - right*

Im nächsten Schritt werden die partiellen Ableitungen der Abbildungsgleichungen gebildet und in der **Jakobi-Matrix** zusammengefaßt:

$$\boldsymbol{J}_l = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(U^1,U^2)}{\partial U^1} & \frac{\partial f_1(U^1,U^2)}{\partial U^2} \\ \frac{\partial f_2(U^1,U^2)}{\partial U^1} & \frac{\partial f_2(U^1,U^2)}{\partial U^2} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{J}_r = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3(u^1,u^2)}{\partial u^1} & \frac{\partial f_3(u^1,u^2)}{\partial u^2} \\ \frac{\partial f_4(u^1,u^2)}{\partial u^1} & \frac{\partial f_4(u^1,u^2)}{\partial u^2} \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\boldsymbol{J}_l = \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial U^1} & \frac{\partial u^1}{\partial U^2} \\ \frac{\partial u^2}{\partial U^1} & \frac{\partial u^2}{\partial U^2} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{J}_r = \begin{pmatrix} \frac{\partial U^1}{\partial u^1} & \frac{\partial U^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial U^2}{\partial u^1} & \frac{\partial U^2}{\partial u^2} \end{pmatrix}$$

linke Jakobi-Matrix / *rechte Jakobi-Matrix*

left Jacobi matrix / *right Jacobi matrix*

Sei $[G_{KL}]$ der Metriktensor der Urbildfläche und $[g_{kl}]$ der Metriktensor der Bildfläche, so lassen sich mit Hilfe der soeben bereitgestellten Jakobi-Matrizen die beiden **Cauchy-Greenschen Deformationstensoren** berechnen:

$$[\boldsymbol{c}_{KL}] = \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{l}}^{\boldsymbol{T}} [g_{kl}] \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{l}} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \qquad [\boldsymbol{C}_{kl}] = \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{T}} [G_{KL}] \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{r}} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$$

linker Cauchy-Green-Deformationstensor *rechter Cauchy-Green-Deformationstensor*
left Cauchy-Green deformation tensor *right Cauchy-Green deformation tensor*

Bei diesen Deformationstensoren handelt es sich um symmetrische Matrizen, es gelten somit die Beziehungen:

$$[\boldsymbol{c}_{KL}] = [\boldsymbol{c}_{KL}]^T \qquad [\mathrm{C}_{kl}] = [\mathrm{C}_{kl}]^T \,.$$

Für die Nebendiagonalelemente gilt somit:

$$c_{12} = c_{21} \qquad C_{12} = C_{21}$$

Falls sich die Parameterlinien im Urbild orthogonal schneiden und sich diese nach erfolgter Abbildung auch im Bild orthogonal wiederfinden, so gilt stets:

$$c_{12} = c_{21} = C_{12} = C_{21} = 0$$

Mit Hilfe der Komponenten beider Deformationstensoren läßt sich nach erfolgter Abbildung die Metrik der Bildfläche ds^2 als Funktion der Urbildkoordinaten (U^1,U^2), sowie die Metrik der Urbildfläche dS^2 als Funktion der Bildkoordinaten (u^1,u^2) darstellen. Man erhält:

$$\begin{aligned} ds^2 &= c_{KL}\, dU^K dU^L \\ &= c_{11}(dU^1)^2 + 2c_{12}\,dU^1 dU^2 + c_{22}(dU^2)^2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} dS^2 &= C_{kl}\, du^k du^l \\ &= C_{11}(du^1)^2 + 2C_{12}\,du^1 du^2 + C_{22}(du^2)^2 \end{aligned}$$

linkes Bogenelement *rechtes Bogenelement*
left distance function *right distance function*

Mittels der beiden Cauchy-Greenschen Deformationstensoren bzw. der beiden Bogenelemente ds² und dS² sollen nun zwei verschiedene Längenverzerrungen (Streckungen) vorgestellt werden.

a) Die erste Möglichkeit der Definition einer Längenverzerrung besteht in der Angabe des Längenverhältnisses aus dem Abstand zweier infinitesimal benachbarter Punkte der Urbildfläche und demselben Abstand, wie er sich nach erfolgter Abbildung im Bild darstellt. Im Urbild wird dieser Abstand gemäß (1.2) durch dessen Metrik bestimmt, im Bild hingegen durch die Komponenten des Cauchy-Greenschen Deformationstensors.

Für die beiden Fälle einer direkten und der zugehörigen inversen Abbildung lassen sich so die **Längenverzerrungen Λ und λ** definieren. Ihre Quadrate lauten:

$$\Lambda^2 := \frac{ds^2}{dS^2} = \frac{c_{KL}dU^K dU^L}{G_{KL}dU^K dU^L} = \frac{c_{11}(dU^1)^2 + 2c_{12}dU^1dU^2 + c_{22}(dU^2)^2}{G_{11}(dU^1)^2 + 2G_{12}dU^1dU^2 + G_{22}(dU^2)^2}$$

linke Längenverzerrung
left stretch

$$\lambda^2 := \frac{dS^2}{ds^2} = \frac{C_{kl}du^k du^l}{g_{kl}du^k du^l} = \frac{C_{11}(du^1)^2 + 2C_{12}du^1du^2 + C_{22}(du^2)^2}{g_{11}(du^1)^2 + 2g_{12}du^1du^2 + g_{22}(du^2)^2}$$

rechte Längenverzerrung
right stretch

Aus diesen allgemeinen Definitionen für die Längenverzerrung läßt sich ein wichtiger Spezialfall herleiten, nämlich die **Streckungen entlang der Parameterlinien**. Für viele Anwendungen, beispielsweise zur Untersuchung der Eignung oder zur Bestimmung spezieller Eigenschaften einer bestimmten Abbildungsart, ist es wichtig, den Maßstab entlang einer ins Bild abgebildeten Parameterlinie des Urbilds berechnen zu können. Ein solcher Maßstab gilt dann nicht nur für einen bestimmten Punkt, sondern entlang der betrachteten Parameterlinie.

Entlang einer Parameterlinie U^1 = const. gilt:	$dU^1 = 0$
Entlang einer Parameterlinie U^2 = const. gilt:	$dU^2 = 0$
Entlang einer Parameterlinie u^1 = const. gilt:	$du^1 = 0$
Entlang einer Parameterlinie u^2 = const. gilt:	$du^2 = 0$

Werden diese Werte in die obigen allgemeinen Definitionen eingesetzt, so erhält man die folgenden Ergebnisse:

$$\Lambda_1^P = \sqrt{\frac{c_{11}}{G_{11}}}$$ *...linke Streckung entlang der Parameterlinie U^2 = const.*

$$\Lambda_2^P = \sqrt{\frac{c_{22}}{G_{22}}}$$ *...linke Streckung entlang der Parameterlinie U^1 = const.*

$$\lambda_1^P = \sqrt{\frac{C_{11}}{g_{11}}}$$ *...rechte Streckung entlang der Parameterlinie u^2 = const.*

$$\lambda_2^P = \sqrt{\frac{C_{22}}{g_{22}}}$$ *...rechte Streckung entlang der Parameterlinie u^1 = const.*

b) Einen zweiten möglichen Zugang zum Problem der Bestimmung von Längenverzerrungen liefert der **Satz von Tissot**:

Eine Abbildung f sei zweimal stetig differenzierbar und die Determinante der Jakobi-Matrix der zugehörigen Abbildungsgleichungen sei ungleich Null, es gelte also

$$\det \boldsymbol{J} \neq 0 \,.$$

Dann existiert ein Kartenwechsel derart, daß sich die Parameterlinien in der Urbildfläche und ihr Abbild in der Bildfläche orthogonal schneiden.

Dies bedeutet, daß es unter den genannten Voraussetzungen gelingt, eine orthogonale Parametrisierung der Urbildfläche zu finden, so daß sich die Parameterlinien dieser Urbildfläche auch im Bild orthogonal schneiden. Diese orthogonal abgebildeten Parameterlinien definieren die **Hauptstreckungs- oder Hauptverzerrungsrichtungen** der Abbildung. Die Beträge der in diesen Richtungen auftretenden Längenverzerrung werden als **Hauptstreckungen** (*principal stretches*) bezeichnet und stellen nichts anderes dar als die Eigenwerte des zugehörigen Cauchy-Greenschen Deformationstensors. Die Hauptverzerrungsrichtungen werden dementsprechend durch die Eigenvektoren des Cauchy-Greenschen Deformationstensors vorgegeben.

Zur Berechnung der Hauptstreckungen ist also die **allgemeine Eigenwertaufgabe** zu lösen. Sei Λ ein Eigenwert des linken Cauchy-Greenschen Deformationstensors $[c_{KL}]$ und $\boldsymbol{U}_l$ der zugehörige Eigenvektor und sei ferner λ ein Eigenwert des rechten Cauchy-Greenschen Deformationstensors $[C_{kl}]$ und $\boldsymbol{u}_r$ der zugehörige Eigenvektor, so lautet die allgemeine Eigenwertaufgabe für die Fälle einer direkten bzw. inversen Abbildung:

$$\boxed{(c_{KL} - \Lambda^2 G_{KL})\boldsymbol{U}_L = \boldsymbol{0}} \qquad (1.5) \qquad \boxed{(C_{kl} - \lambda^2 g_{kl})\boldsymbol{u}_r = \boldsymbol{0}}$$

linke Eigenwertaufgabe — *rechte Eigenwertaufgabe*

Ausgehend von dieser Aufgabenstellung lassen sich die gesuchten **Eigenwerte** folgendermaßen berechnen:

$$\det(c_{KL} - \Lambda^2 G_{KL}) = 0 \qquad\qquad \det(C_{kl} - \lambda^2 g_{kl}) = 0$$

Die folgende Herleitung wird nur für den Bildbereich durchgeführt, das heißt es wird an dieser Stelle zunächst nur die linke Eigenwertaufgabe bearbeitet. Die Berechnungen für den Urbildbereich erfolgen völlig analog, so daß nur die Ergebnisse angegeben werden.

$$\det(c_{KL} - \Lambda^2 G_{KL}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} c_{11} - \Lambda^2 G_{11} & c_{12} - \Lambda^2 G_{12} \\ c_{12} - \Lambda^2 G_{12} & c_{22} - \Lambda^2 G_{22} \end{vmatrix} = 0$$

Die Auswertung dieser Beziehung liefert:

$$\Lambda^4(G_{11}G_{22}-G_{12}^2)-\Lambda^2(c_{11}G_{11}-2c_{12}G_{12}+c_{22}G_{11})+(c_{11}c_{22}-c_{12}^2)=0$$

bzw.

$$\Lambda^4-\Lambda^2\left(\frac{c_{11}G_{11}-2c_{12}G_{12}+c_{22}G_{11}}{G_{11}G_{22}-G_{12}^2}\right)+\frac{c_{11}c_{22}-c_{12}^2}{G_{11}G_{22}-G_{12}^2}=0$$

Unter Ausnutzung der Beziehungen

$$\det(c_{KL})=c_{11}c_{22}-c_{12}^2$$
$$\det(G_{KL})=G_{11}G_{22}-G_{12}^2$$

erhält man schließlich den biquadratischen Ausdruck

$$\Lambda^4-\Lambda^2 trace(c_{KL}G_{KL}^{-1})+\det(c_{KL}G_{KL}^{-1})=0\,,$$

so daß für die beiden gesuchten Hauptstreckungen Λ_1 und Λ_2 gilt:

$$\Lambda_{1/2}^2=\frac{1}{2}trace(c_{KL}G_{KL}^{-1})\pm\sqrt{(trace(c_{KL}G_{KL}^{-1}))^2-4\det(c_{KL}G_{KL}^{-1})}$$

Für den Urbildbereich gilt entsprechend:

$$\lambda_{1/2}^2=\frac{1}{2}trace(C_{kl}g_{kl}^{-1})\pm\sqrt{(trace(C_{kl}g_{kl}^{-1}))^2-4\det(C_{kl}g_{kl}^{-1})}$$

Aus diesen Zwischenergebnissen lassen sich die gesuchten **Hauptstreckungen Λ_1,Λ_2 und λ_1,λ_2** bestimmen. Man erhält schließlich:

$$\Lambda_1=\frac{1}{2}\left(\sqrt{trace(c_{KL}G_{KL}^{-1})+2\sqrt{\det(c_{KL}G_{KL}^{-1})}}+\sqrt{trace(c_{KL}G_{KL}^{-1})-2\sqrt{\det(c_{KL}G_{KL}^{-1})}}\right)$$
$$\Lambda_2=\frac{1}{2}\left(\sqrt{trace(c_{KL}G_{KL}^{-1})+2\sqrt{\det(c_{KL}G_{KL}^{-1})}}-\sqrt{trace(c_{KL}G_{KL}^{-1})-2\sqrt{\det(c_{KL}G_{KL}^{-1})}}\right)$$

linke Hauptstreckungen
left principal stretches

$$\lambda_1=\frac{1}{2}\left(\sqrt{trace(C_{kl}g_{kl}^{-1})+2\sqrt{\det(C_{kl}g_{kl}^{-1})}}+\sqrt{trace(C_{kl}g_{kl}^{-1})-2\sqrt{\det(C_{kl}g_{kl}^{-1})}}\right)$$
$$\lambda_2=\frac{1}{2}\left(\sqrt{trace(C_{kl}g_{kl}^{-1})+2\sqrt{\det(C_{kl}g_{kl}^{-1})}}-\sqrt{trace(C_{kl}g_{kl}^{-1})-2\sqrt{\det(C_{kl}g_{kl}^{-1})}}\right)$$

rechte Hauptstreckungen
right principal stretches

Die Berechnung der linken Hauptstreckungen vereinfacht sich, wenn eine orthogonale Parametrisierung des Urbilds vorliegt und sich die in die Bildebene abgebildeten Parameterlinien orthogonal schneiden. Dann gilt nämlich

$$G_{12} = c_{12} = 0$$

und die Hauptstreckungen berechnen sich zu:

$$\Lambda_1 = \sqrt{\frac{c_{11}}{G_{11}}} \qquad \Lambda_2 = \sqrt{\frac{c_{22}}{G_{22}}}$$

Dasselbe gilt für die Berechnung der rechten Hauptstreckungen. Gilt nämlich für eine inverse Abbildung

$$g_{12} = C_{12} = 0,$$

so vereinfacht sich auch hier die Berechnung zu:

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{C_{11}}{g_{11}}} \qquad \lambda_2 = \sqrt{\frac{C_{22}}{g_{22}}}$$

In diesem speziellen Fall sind die Hauptstreckungen identisch mit den Streckungen entlang der Parameterlinien. Läßt sich also feststellen, daß im Falle einer direkten Abbildung sowohl der Metriktensor des Urbilds als auch der linke Cauchy-Greensche Deformationstensor Diagonalstruktur besitzen, so muß zur Bestimmung der Hauptstreckungen nicht die allgemeine Eigenwertaufgabe ausgewertet werden. Dasselbe gilt auch im Falle einer inversen Abbildung, wenn der Metriktensor der Bildfläche und der zugehörige rechte Cauchy-Greensche Deformationstensor Diagonalstruktur besitzen.

Nun verbleibt noch die Aufgabe, ausgehend von den Hauptstreckungen die zugehörigen Hauptstreckungsrichtungen, also die Eigenvektoren, zu berechnen.
Dazu müssen die berechneten Hauptstreckungen Λ_1,Λ_2 bzw. λ_1,λ_2, die im folgenden als Λ_i bzw. λ_i bezeichnet werden, in die Gleichungen (1.5) eingesetzt werden. Man erhält somit die folgenden homogenen linearen Gleichungssysteme:

$$(c_{KL} - \Lambda_i^2 G_{KL})\boldsymbol{U}_i = \boldsymbol{0} \qquad i = 1,2 \qquad (C_{kl} - \lambda_i^2 g_{kl})\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{0}$$

Seien f_{L1i} und f_{L2i} die Koordinaten der zu den linken Hauptstreckungen Λ_i gehörenden linken Eigenvektoren $\boldsymbol{U_i}$ und f_{r1i} und f_{r2i} die Koordinaten der zu den rechten Hauptstreckungen λ_i gehörenden rechten Eigenvektoren $\boldsymbol{u_i}$, so erhält man für die resultierenden linearen Gleichungssysteme die ausführliche Darstellung

$$\begin{pmatrix} c_{11} - \Lambda_i^2 G_{11} & c_{12} - \Lambda_i^2 G_{12} \\ c_{12} - \Lambda_i^2 G_{12} & c_{22} - \Lambda_i^2 G_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{L1i} \\ f_{L2i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} C_{11} - \lambda_i^2 g_{11} & C_{12} - \lambda_i^2 g_{12} \\ C_{12} - \lambda_i^2 g_{12} & C_{22} - \lambda_i^2 g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{r1i} \\ f_{r2i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$i = 1,2$$

In diese Darstellung werden nacheinander die Eigenwerte Λ_1,Λ_2 sowie λ_1,λ_2 eingesetzt, so daß insgesamt vier Gleichungssysteme zu lösen sind. Die Lösungen dieser Gleichungssysteme lauten

$$f_{L1i} = \frac{c_{12} - \Lambda_i^2 G_{12}}{\sqrt{G_{11}\left(c_{12} - \Lambda_i^2 G_{12}\right)^2 - 2G_{12}\left(c_{12} - \Lambda_i^2 G_{12}\right)\left(c_{11} - \Lambda_i^2 G_{11}\right) + G_{22}\left(c_{11} - \Lambda_i^2 G_{11}\right)^2}}$$

$$f_{L2i} = \frac{-\left(c_{11} - \Lambda_i^2 G_{11}\right)}{\sqrt{G_{11}\left(c_{12} - \Lambda_i^2 G_{12}\right)^2 - 2G_{12}\left(c_{12} - \Lambda_i^2 G_{12}\right)\left(c_{11} - \Lambda_i^2 G_{11}\right) + G_{22}\left(c_{11} - \Lambda_i^2 G_{11}\right)^2}} \qquad i = 1,2.$$

Die gesuchten **linken Eigenvektoren** (*left eigenvectors*) besitzen als Basis die linken GAUSSschen Tangentenvektoren $\boldsymbol{G_1}$ und $\boldsymbol{G_2}$, so daß man die folgenden Ergebnisse erhält:

$$\boldsymbol{U}_1 = f_{L11}\boldsymbol{G}_1 + f_{L21}\boldsymbol{G}_2$$
linker Eigenvektor zum Eigenwert Λ_1

$$\boldsymbol{U}_2 = f_{L12}\boldsymbol{G}_1 + f_{L22}\boldsymbol{G}_2$$
linker Eigenvektor zum Eigenwert Λ_2

Für den Urbildbereich lautet die Lösung der entsprechenden Gleichungssysteme:

$$f_{r1i} = \frac{C_{12} - \lambda_i^2 g_{12}}{\sqrt{g_{11}\left(C_{12} - \lambda_i^2 g_{12}\right)^2 - 2g_{12}\left(C_{12} - \lambda_i^2 g_{12}\right)\left(C_{11} - \lambda_i^2 g_{11}\right) + g_{22}\left(C_{11} - \lambda_i^2 g_{11}\right)^2}}$$

$$f_{r2i} = \frac{-\left(C_{11} - \lambda_i^2 g_{11}\right)}{\sqrt{g_{11}\left(C_{12} - \lambda_i^2 g_{12}\right)^2 - 2g_{12}\left(C_{12} - \lambda_i^2 g_{12}\right)\left(C_{11} - \lambda_i^2 g_{11}\right) + g_{22}\left(C_{11} - \lambda_i^2 g_{11}\right)^2}} \qquad i = 1,2.$$

Die gesuchten **rechten Eigenvektoren** (*right eigenvectors*) besitzen als Basis die linken GAUSSschen Tangentenvektoren $\boldsymbol{g_1}$ und $\boldsymbol{g_2}$, so daß man die folgenden Ergebnisse erhält:

$$\boldsymbol{u}_1 = f_{r11}\boldsymbol{g}_1 + f_{r21}\boldsymbol{g}_2$$
rechter Eigenvektor zum Eigenwert λ_1

$$\boldsymbol{u}_2 = f_{r12}\boldsymbol{g}_1 + f_{r22}\boldsymbol{g}_2$$
rechter Eigenvektor zum Eigenwert λ_2

Für den Fall, daß sich die Parameterlinien im Urbild orthogonal schneiden und sich auch nach einer erfolgten Abbildung orthogonal im Bild wiederfinden, werden obige Berechnungen erheblich vereinfacht. In einem solchen Fall gilt nämlich

$$G_{12} = c_{12} = 0$$

und da aus $c_{12} = 0$ die einfachen Beziehungen

$$\Lambda_1^2 = \frac{c_{11}}{G_{11}} \qquad \Lambda_2^2 = \frac{c_{22}}{G_{22}} \qquad \lambda_1^2 = \frac{C_{11}}{g_{11}} \qquad \lambda_2^2 = \frac{C_{22}}{g_{22}}$$

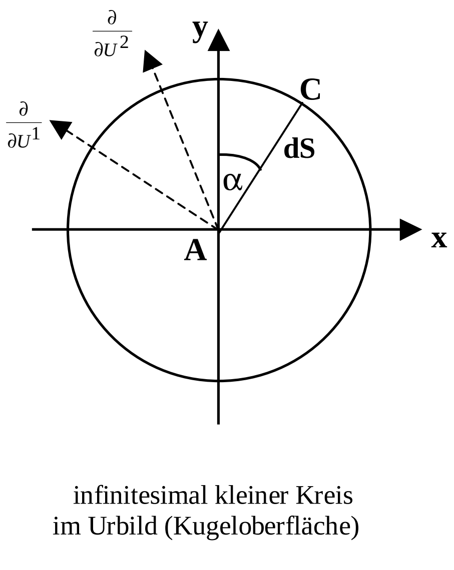
folgen, berechnen sich in diesem Fall die linken und rechten Eigenvektoren zu

$$\boldsymbol{U}_1 = \frac{1}{\sqrt{G_{11}}}\boldsymbol{G}_1 \qquad \boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\boldsymbol{g}_1$$

$$\boldsymbol{U}_2 = \frac{1}{\sqrt{G_{22}}}\boldsymbol{G}_2 \qquad \boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\boldsymbol{g}_2$$

Abschließend sollen die in diesem Abschnitt erhaltenen Ergebnisse geometrisch interpretiert werden. Von zentraler Bedeutung sind hierbei die sogenannten **Tissot-Ellipsen**, die auch Tissot-Indikatrizen (*Tissot indicatrices*) genannt werden.

Die Untersuchung lokaler Verzerrungen geht aus von dem Verhältnis ds/dS zwischen zwei sich entsprechenden differentiell kleinen Bogenelementen ds im Bild und dS im Urbild. Diese Längenverzerrung ist in ihrem Wert nicht nur von Punkt zu Punkt verschieden, sondern auch am selben Punkt A von der Richtung abhängig. Dieser Sachverhalt sowie einige weitere Aspekte sollen anhand von Fig. 1.4 verdeutlicht werden. Dort wird der Einfachheit halber von einer Darstellung der Erde als Kugel ausgegangen und ein infinitesimaler Kreis auf der Oberfläche dieser Kugel sowie das Abbild dieses Kreises in der Bildebene betrachtet:



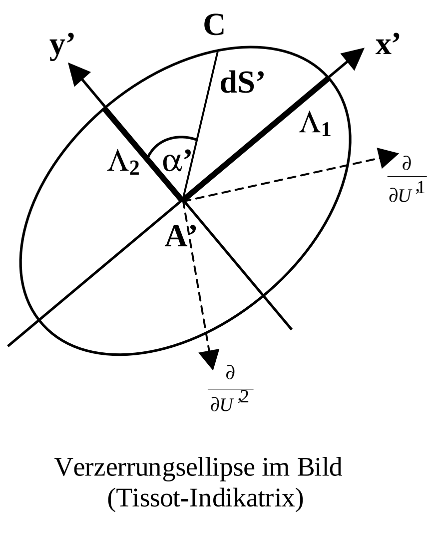


Fig. 1.4: Tissot-Indikatrix als Abbild eines im Urbild generierten infinitesimalen Kreises

In Fig. 1.4 bedeutet:

A	beliebiger Punkt auf der Erdoberfläche mit den geographischen Koordinaten Λ_A,Φ_A
A‘	Abbild des Punktes A
C	beliebiger Punkt auf der Erdoberfläche mit den geographischen Koordinaten Λ_C,Φ_C mit infinitesimal kleinem Abstand zu A
C‘	Abbild des Punktes C
dS	infinitesimal kleines Bogenelement auf der Erdoberfläche zwischen den Punkten A und C
dS'	Abbild des infinitesimal kleinen Bogenelementes dS
x,y	Richtungen entlang eines Satzes orthogonaler Parameterlinien im Urbild gemäß dem Satz von Tissot
x‘,y‘	Abbild dieses Satzes orthogonaler Parameterlinien
α	Winkel zwischen der y-Richtung und dem Bogenelement dS
α'	Winkel zwischen der abgebildeten y-Richtung und dem abgebildeten Bogenelement dS'
Λ_1	große Halbachse der Tissot-Indikatrix
Λ_2	kleine Halbachse der Tissot-Indikatrix
$\frac{\partial}{\partial U^1},\frac{\partial}{\partial U^2}$	Richtungen der Parameterlinien im Punkt A
$\frac{\partial}{\partial U'^1},\frac{\partial}{\partial U'^2}$	Richtungen der Parameterlinien im Abbild A' des Punktes A

Fig. 1.4 zeigt den allgemeinsten Fall einer Abbildung; es soll also keine orthogonale Parametrisierung des Urbilds vorliegen (erkennbar an den Richtungen der Parameterlinien im Punkt A).

Der infinitesimal kleine Kreis entsteht durch eine Drehung des Bogenelements dS um den Punkt A. Dieses Bogenelement soll die Länge Eins besitzen. Das ist sinnvoll, da dann die Länge dS' (das Abbild von dS) als Längenverzerrung im Punkt A' in Richtung des Punktes C' interpretiert werden kann, welche definitionsgemäß als Vielfaches von Eins angegeben wird. Der infinitesimale Kreis wird nun im Zuge einer Abbildung in die Ebene abgebildet und findet sich dort in Form der oben dargestellten Tissot-Indikatrix wieder. Für einen solchen allgemeinen Fall einer Abbildung sollen die folgenden Eigenschaften festgehalten werden:

→ Tissot zeigte im Jahr 1881, daß es zwei im Urbild zueinander senkrechte Richtungen x,y gibt, die auch im Abbild wieder einen rechten Winkel bilden (**Satz von Tissot**). Sie finden sich dort in Form der Richtungen x',y' wieder.

→ Ändert man im Urbild die Lage des Punktes C auf dem infinitesimalen Kreis, so führt dies auch zu einer Veränderung der Lage von C' auf der Ellipse im Bild. Als Konsequenz verändert sich die Längenverzerrung im Punkt A' in Richtung von C', je nachdem, wo sich der Punkt C' auf der Ellipse befindet. Die **Längenverzerrung** im Bild ist somit **von der Richtung abhängig**, die durch den Winkel α' repräsentiert wird.

→ Es existieren genau zwei Richtungen, entlang derer die Längenverzerrung einmal maximal und einmal minimal wird. Bei diesen Richtungen handelt es sich um die **Hauptverzerrungsrichtungen** x',y', welche mit den Ellipsenachsen zusammenfallen. Die Längenverzerrungen entlang dieser Richtungen sind die **Hauptstreckungen** Λ_1 und Λ_2; die Beträge von Λ_1 und Λ_2 entsprechen der Länge der jeweiligen Ellipsenhalbachse.

→ **Ein Winkel wird im allgemeinsten Fall nach erfolgter Abbildung nicht mehr denselben Betrag aufweisen wie vor der Abbildung**. In Fig. 1.4 soll dies durch die unterschiedlichen Winkel α und α' sowie durch die unterschiedlichen Winkel zwischen den Parameterlinien im Urbild und deren Bildern verdeutlicht werden. Es kann also nicht davon ausgegangen werden, daß sich z.B. zwei beliebige, im Urbild zueinander senkrechte Bogenelemente auch rechtwinklig abbilden.

→ **Die Streckungen entlang der Parameterlinien $\frac{\partial}{\partial U'^1}, \frac{\partial}{\partial U'^2}$ sind nicht identisch mit den Hauptstreckungen Λ_1 und Λ_2.**

Bei sehr vielen Abbildungen tritt der bereits mehrfach diskutierte Spezialfall auf, daß die Urbildfläche orthogonal parametrisiert ist und sich auch die abgebildeten Parameterlinien orthogonal schneiden. Dieser Fall wird bekanntlich durch

$$G_{12} = c_{12} = 0$$

beschrieben. In diesem Fall fallen im Punkt A' die Hauptverzerrungsrichtungen x',y' mit den Richtungen der Parameterlinien zusammen und **die Hauptstreckungen Λ_1 und Λ_2 sind damit identisch mit den Längenverzerrungen (Streckungen) Λ_1^P, Λ_2^P in Richtung der Parameterlinien.**

1-7. SPEZIELLE ABBILDUNGSEIGENSCHAFTEN

Viele Abbildungen besitzen spezielle Eigenschaften. Diese Eigenschaften können für die Klassifizierung einer bestimmten Abbildung herangezogen werden. Im folgenden sollen die wichtigsten Abbildungseigenschaften vorgestellt werden. Es sind dies:

→ Äquidistanz (*equidistance*)
→ Konformität (*conformality*)
→ Flächentreue (*equivalence*)

a) ÄQUIDISTANZ

- *Eine Flächenkurve des Urbilds wird genau dann äquidistant abgebildet, wenn der Maßstab (die Längenverzerrung) entlang dieser abgebildeten Kurve Eins beträgt und somit entlang dieser Kurve der Kartenmaßstab (gemäß Abschnitt 1-5.) beibehalten wird.*

Bei der Eigenschaft der "Äquidistanz" handelt es sich sozusagen um eine "lokale Eigenschaft" einer bestimmten Abbildung. Dies bedeutet, daß nicht gleichzeitig sämtliche denkbaren Linien äquidistant abgebildet werden können, sondern nur einige davon.
Ausgehend von obiger allgemeiner Definition soll nun untersucht werden, welche Bedeutung der Begriff "Äquidistanz" bei der Betrachtung der beiden speziellen Flächenkurven

Parallelkreis und Meridian

in geometrischer und analytischer Hinsicht besitzt.

(i) Geometrische Definition des Begriffs "Äquidistanz"

- *Ein **Parallelkreis** wird im Zuge einer Abbildung dann **äquidistant** abgebildet, wenn er von den abgebildeten Meridianen, die sich um einen immer gleichen Winkel $d\Lambda$ unterscheiden, in gleichen Abständen geschnitten wird. Zusätzlich müssen diese Abstände (unter Berücksichtigung des in Abschnitt 1-5. definierten Kartenmaßstabs) im Bild genauso lang sein wie im Urbild.*

Eine entsprechende Definition kann auch für die äquidistante Abbildung eines Meridians angegeben werden:

- *Ein **Meridian** wird im Zuge einer Abbildung dann **äquidistant** abgebildet, wenn er von den abgebildeten Parallelkreisen, die sich um einen immer gleichen Winkel $d\Phi$ unterscheiden, in gleichen Abständen geschnitten wird. Zusätzlich müssen diese Abstände (unter Berücksichtigung des in Abschnitt 1-5. definierten Kartenmaßstabs) im Bild genauso lang sein wie im Urbild.*

In beiden Fällen beträgt also der Maßstab entlang des abgebildeten Parallelkreises bzw. entlang des abgebildeten Meridians Eins. Dieser Maßstab stellt nichts anderes dar als die Streckung entlang der jeweiligen Parameterlinie, was unmittelbar zu einer analytischen Definition des Begriffs "Äquidistanz" führt:

(ii) Analytische Definition des Begriffs "Äquidistanz"

Mit Hilfe der Streckungen $\Lambda^P{}_1$ und $\Lambda^P{}_2$ entlang der Parameterlinien kann der Begriff "Äquidistanz" analytisch folgendermaßen definiert werden:

- *Ein bestimmter **Parallelkreis** $\Phi = \Phi_0$ wird dann **äquidistant** abgebildet, wenn gilt:*

  $$\Lambda^P{}_1(\Phi_0) = 1$$

  Gilt diese Beziehung nicht nur für den Parallelkreis der sphärischen Breite Φ_0, sondern für sämtliche Parallelkreise, gilt also

  $$\Lambda^P{}_1 = 1,$$

  so werden alle Parallelkreise äquidistant abgebildet und die Abbildung wird als "äquidistant auf der Schar der Längenkreise" bezeichnet.

- *Ein bestimmter **Meridian** $\Lambda = \Lambda_0$ wird dann **äquidistant** abgebildet, wenn gilt:*

  $$\Lambda^P{}_2(\Lambda_0) = 1$$

  Gilt diese Beziehung nicht nur für den Meridian der Länge Λ_0, sondern für sämtliche Meridiane, gilt also

  $$\Lambda^P{}_2 = 1,$$

  so werden alle Meridiane äquidistant abgebildet und die Abbildung wird als "äquidistant auf der Schar der Parallelkreise" bezeichnet.

Beide Definitionen gelten streng nur für den Bildbereich einer Abbildung der Kugel. Entsprechende Definitionen können unter Verwendung der Streckungen entlang der Parameterlinien $\lambda^P{}_1$ und $\lambda^P{}_2$ auch für den Urbildbereich angegeben und leicht auch auf das Rotationsellipsoid übertragen werden.

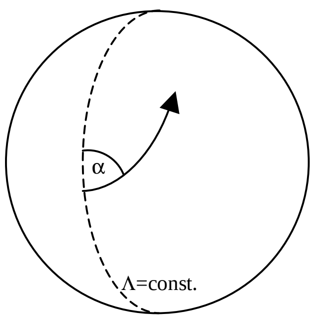
Im Rahmen dieser Arbeit heißt eine Abbildung dann "äquidistant", wenn sämtliche Meridiane äquidistant (ohne Längenverzerrung, mit Maßstab Eins) in die Ebene abgebildet werden.

b) KONFORMITÄT

(i) Geometrische Definition des Begriffs "Konformität"

- *Eine Abbildung heißt dann **konform**, wenn der Winkel, den zwei Flächenkurven im Urbild einschließen, identisch ist mit dem Winkel, den beide Kurven im Bild einschließen.*

  Diesen Sachverhalt soll die nachfolgende Skizze (Fig. 1.5) verdeutlichen, in der der Winkel α zwischen einer Kurslinie und einem Meridian sowohl im Urbild als auch im Bild dargestellt ist. Im Falle einer konformen Abbildung sind beide Winkel gleich groß.



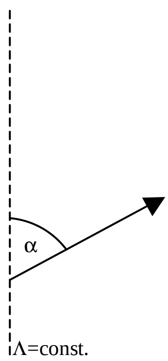


Fig. 1.5: Konforme Abbildung einer Kurslinie

(ii) Analytische Definition des Begriffs "Konformität"

Mathematisch kann eine konforme Abbildung über die Hauptstreckungen Λ_1 und Λ_2 bzw. im Falle einer inversen Abbildung über die Hauptstreckungen λ_1 und λ_2 definiert werden.

- *Eine Abbildung heißt dann* ***konform****, wenn in jedem Punkt der Bildfläche für die Hauptstreckungen gilt:*

$$\Lambda_1 = \Lambda_2 \quad \text{bzw.} \quad \lambda_1 = \lambda_2$$

Als Konsequenz dieser Definition besitzen beide Halbachsen der zugehörigen Tissot-Indikatrix dieselbe Länge. Die Ellipse wird also zu einem Kreis.

Es treten auch Fälle auf, in denen zwar keine konforme Abbildung im soeben definierten Sinn vorliegt, bestimmte abgebildete Flächenkurven aber dennoch konform abgebildet werden. Mit Hilfe der Streckungen Λ^P_1 und Λ^P_2 entlang der Parameterlinien sollen nun die Bedingungen für die konforme Abbildung eines Parallelkreises bzw. eines Meridians angegeben werden:

- *Ein bestimmter* ***Parallelkreis*** $\Phi = \Phi_0$ *wird dann* ***konform*** *abgebildet, wenn gilt:*

$$\Lambda^P{}_1(\Phi_0) = \Lambda^P{}_2(\Phi_0)$$

- *Ein bestimmter* ***Meridian*** $\Lambda = \Lambda_0$ *wird dann* ***konform*** *abgebildet, wenn gilt:*

$$\Lambda^P{}_1(\Lambda_0) = \Lambda^P{}_2(\Lambda_0)$$

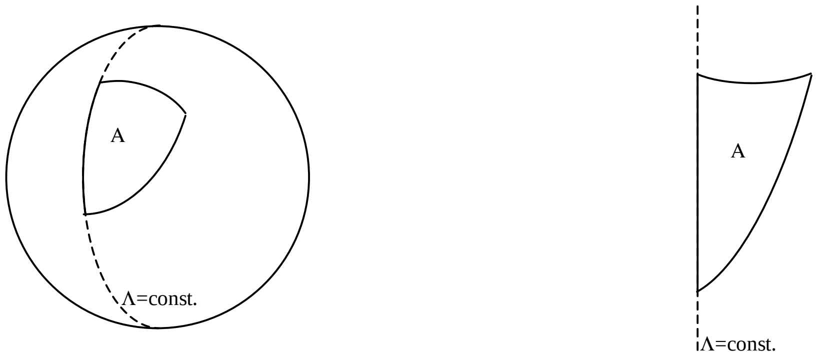
Wiederum gelten beide Definitionen streng nur für den Bildbereich einer Abbildung der Kugel. Entsprechende Definitionen können unter Verwendung der Streckungen entlang der Parameterlinien λ^P_1 und λ^P_2 auch für den Urbildbereich angegeben und leicht auch auf das Rotationsellipsoid übertragen werden.

c) FLÄCHENTREUE

(i) Geometrische Definition des Begriffs "Flächentreue"

- *Eine Abbildung heißt dann* ***flächentreu****, wenn ein räumlich begrenztes Gebiet der Urbildfläche, welches den Flächeninhalt A besitzt, auf ein Gebiet der Bildfläche abgebildet wird, das (unter Berücksichtigung des Kartenmaßstabes) denselben Flächeninhalt besitzt.*

  Diesen Sachverhalt soll die nachfolgende Skizze (Fig. 1.6) verdeutlichen, in der eine Fläche, in diesem Beispiel ein sphärisches Dreieck, sowohl im Urbild als auch im Bild dargestellt ist. Im Falle einer flächentreuen Abbildung besitzen beide Flächen (unter Berücksichtigung des Kartenmaßstabes) denselben Flächeninhalt.



Situation im Urbild   Situation in der Karte

Fig. 1.6: Flächentreue Abbildung eines sphärischen Dreiecks

(ii) Analytische Definition des Begriffs "Flächentreue"

Mathematisch kann eine flächentreue Abbildung über die Hauptstreckungen Λ_1 und Λ_2 bzw. im Falle einer inversen Abbildung über die Hauptstreckungen λ_1 und λ_2 definiert werden.

- *Eine Abbildung heißt dann* ***flächentreu****, wenn in jedem Punkt der Bildfläche für die Hauptstreckungen gilt:*

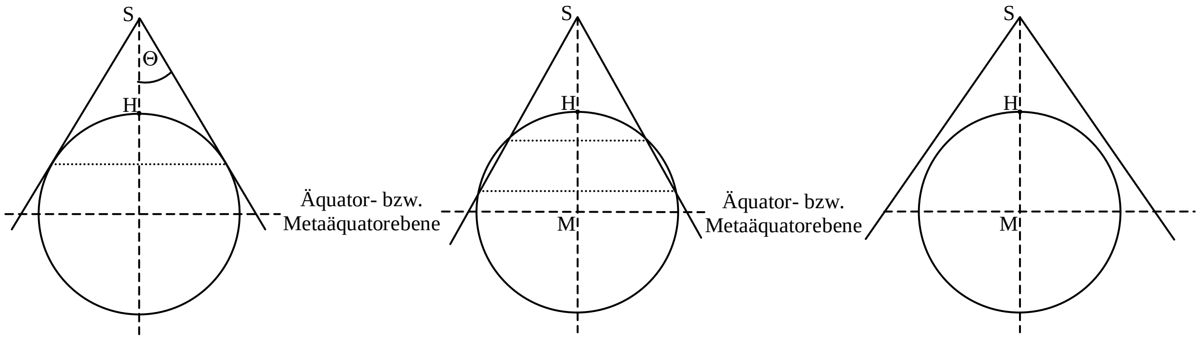
$$\Lambda_1\Lambda_2 = 1 \qquad \text{bzw.} \qquad \lambda_1\lambda_2 = 1$$

Das bedeutet nichts anderes, als daß die Hauptstreckung Λ_1 bzw. λ_1 dem Kehrwert von Λ_2 bzw. λ_2 entspricht und umgekehrt. Im Falle einer solchen Abbildung besitzen die Tissot-Indikatrizen in jedem Punkt denselben Flächeninhalt.

Kapitel 2

Allgemeine Abbildungsgleichungen und Verzerrungsmasse für Kegelabbildungen der Kugel

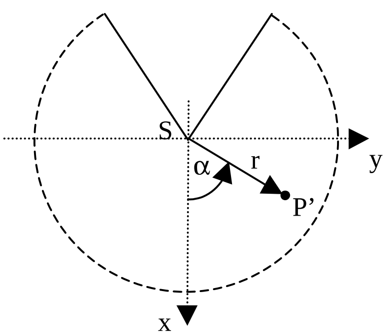
Für die Abbildung von Punkten der Kugeloberfläche auf einen Kegel sind prinzipiell folgende gegenseitige Lagen von Kugel und Kegel möglich:



Berührkegel | Schnittkegel | Keine gemeinsamen Punkte von Kegel und Kugel

Allen drei Entwürfen ist gemeinsam, daß die Kegelachse mit der Geraden durch den Hauptpunkt H und den Kugelmittelpunkt M zusammenfällt.
Ist der Hauptpunkt H identisch mit dem Nord– oder Südpol der Kugel, so handelt es sich bei der vorliegenden Abbildung um eine **normalständige Kegelabbildung**. Liegt der Hauptpunkt in der Äquatorebene der Kugel, so handelt es sich um eine **transversale Kegelabbildung**. In allen anderen Fällen liegt eine **schiefständige (schiefachsige) Kegelabbildung** vor. Diejenige Ebene, welche von der Geraden durch die Punkte M, H und S senkrecht geschnitten wird und den Kugelmittelpunkt M enthält, ist im normalständigen Fall die Äquatorebene, im schiefständigen und transversalen Fall die Metaäquatorebene.
Von den oben dargestellten gegenseitigen Lagen von Kugel und Kegel besitzen nur die beiden Fälle des Berühr- bzw. des Schnittkegels eine praktische Bedeutung; eine Abbildung auf einen Kegel, der mit der Kugel keine gemeinsamen Punkte besitzt, wird in der Literatur nicht beschrieben. Im Rahmen dieser Arbeit werden ausschließlich normalständige Kegelabbildungen vorgestellt, die den Nordpol der Kugel als Hauptpunkt besitzen.

Im Zuge der Abbildung wird ein Punkt P der Kugeloberfläche gemäß einer bestimmten Vorschrift auf die in seiner Meridianebene liegende Kegelmantellinie abgebildet. Nach erfolgter Abbildung wird der Kegel entlang der dem zuvor festgelegten Hauptmeridian gegenüberliegenden Mantellinie aufgeschnitten und in die Ebene abgerollt. Dort kann ein abgebildeter Punkt gemäß folgender Skizze koordinatenmäßig dargestellt werden:



(i) Darstellung in Polarkoordinaten (α,r)
(*polar coordinates*)

(ii) Darstellung in kartesischen Koordinaten (x,y) mit
$x = r \cos \alpha$
$y = r \sin \alpha$
(*cartesian coordinates*)

Die zugrundeliegenden Abbildungsvorschriften haben die Eigenschaft, daß Urbildpunkten P_i, welche die gleiche sphärische Breite Φ_i besitzen, im Bild der gleiche Abstand r vom Scheitel S zugeordnet wird. Punkte gleicher sphärischer Breite besitzen also denselben Bildradius r und liegen somit im Bild auf einem Kreis.

Anders ausgedrückt hängt der Bildradius r ausschließlich von der sphärischen Breite ab. Der Winkel α hingegen soll, bis auf eine Projektionskonstante n, nur von der sphärischen Länge Λ abhängen. Diese Projektionskonstante (*cone constant*) ist definiert als der Sinus des Öffnungswinkels Θ des Kegels; es gilt also:

$$n := \sin\Theta$$

Somit lauten die **allgemeinen Abbildungsgleichungen** (*direct equations*) im Falle einer **Abbildung der Kugel auf eine Kegelfläche**:

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha &= n\Lambda \\ r &= f(\Phi) \end{aligned}}$$

n ... Projektionskonstante mit $0 < n < 1$

Für $n = 0$ geht der Kegel in einen Zylinder über, für $n = 1$ hingegen ergeben sich die allgemeinen Abbildungsgleichungen einer Azimutalabbildung.

Ausgehend von diesen Abbildungsgleichungen läßt sich auch eine **inverse Abbildung** generieren, die jedem Bildpunkt einen Punkt im Urbild zuordnet. Die entsprechenden Abbildungsgleichungen (*inverse equations*) besitzen folgendes Aussehen:

$$\boxed{\begin{aligned} \Lambda &= \frac{\alpha}{n} \\ \Phi &= f(r) \end{aligned}}$$

Wie bereits in Kapitel 1 angedeutet, kann im Falle der direkten Abbildungsgleichungen einem Urbildpunkt nicht immer genau ein Bildpunkt zugeordnet werden. Entsprechendes gilt für die Gleichungen der inversen Abbildung, welche ebenfalls nicht umkehrbar eindeutig sind.

Auf den folgenden Seiten soll eine Deformationsanalyse für diesen Abbildungstyp durchgeführt werden.

Deformationsanalyse für die allgemeinen Abbildungsgleichungen von Kegelabbildungen der Kugel

Der **Metriktensor des Urbildes** (Kugel) besitzt folgendes Aussehen:

$$[G_{KL}] = \begin{pmatrix} R^2 \cos^2 \Phi & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix}$$

Da es sich beim Kegel um eine abwickelbare Fläche handelt, besitzt diese den Metriktensor

$$[g_{kl}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

bei Verwendung von kartesischen Koordinaten (x,y), beziehungsweise

$$[g_{kl}] = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

bei Verwendung von Polarkoordinaten (α, r).

Im Falle der vorliegenden Kegelabbildung mit der allgemeinen Abbildungsvorschrift $r = f(\Phi)$ sowie der Verwendung von Polarkoordinaten (α, r) im Bild lautet der **Metriktensor des Bildes**:

$$[g_{kl}] = \begin{pmatrix} f^2(\Phi) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ausgangspunkt der nun folgenden Betrachtungen sind die bereits angegebenen allgemeinen Abbildungsgleichungen

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha &= n\Lambda \\ r &= f(\Phi) \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} \Lambda &= \frac{\alpha}{n} \\ \Phi &= f(r) \end{aligned}}$$

"direkt"/"links" — *"invers"/"rechts"*

"direct"/"left" — *"inverse"/"right"*

Zur Berechnung der Deformationstensoren müssen zunächst die **Jakobi-Matrizen**, also die Matrizen der partiellen Ableitungen bereitgestellt werden:

$$\boldsymbol{J}_l = \begin{pmatrix} \frac{\partial\alpha}{\partial\Lambda} & \frac{\partial\alpha}{\partial\Phi} \\ \frac{\partial r}{\partial\Lambda} & \frac{\partial r}{\partial\Phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_\Lambda & \alpha_\Phi \\ r_\Lambda & r_\Phi \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{J}_r = \begin{pmatrix} \frac{\partial\Lambda}{\partial\alpha} & \frac{\partial\Lambda}{\partial r} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} & \frac{\partial\Phi}{\partial r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda_\alpha & \Lambda_r \\ \Phi_\alpha & \Phi_r \end{pmatrix}$$

Ausgehend von den obigen allgemeinen Abbildungsgleichungen erhält man somit:

$$\boldsymbol{J}_l = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & \frac{df(\Phi)}{d\Phi} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{J}_r = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & \frac{df(r)}{dr} \end{pmatrix}$$

linke Jakobi-Matrix — *rechte Jakobi-Matrix*
(left Jacobi matrix) — *(right Jacobi matrix)*

Die **Cauchy-Greenschen Deformationstensoren** $[c_{KL}]$ und $[C_{kl}]$ berechnen sich nun zu

$$[c_{KL}] = \boldsymbol{J}_l^T [g_{kl}] \boldsymbol{J}_l \qquad [C_{kl}] = \boldsymbol{J}_r^T [G_{KL}] \boldsymbol{J}_r$$

$$[c_{KL}] = \begin{pmatrix} n^2 f^2(\Phi) & 0 \\ 0 & \left(\frac{df(\Phi)}{d\Phi}\right)^2 \end{pmatrix} \qquad [C_{kl}] = \begin{pmatrix} \frac{R^2}{n^2}\sin^2\left(f(r)\right) & 0 \\ 0 & R^2\left(\frac{df(r)}{dr}\right)^2 \end{pmatrix}$$

linker Cauchy-Green-Deformationstensor — *rechter Cauchy-Green-Deformationstensor*
(left Cauchy-Green deformation tensor) — *(right Cauchy-Green deformation tensor)*

Mit Hilfe dieser beiden Deformationstensoren läßt sich das **Bogenelement *ds²* des Bildes** (Ebene) als Funktion der Urbildkoordinaten (Λ,Φ) sowie das **Bogenelement *dS²* des Urbildes** (Kugel) als Funktion der Bildkoordinaten (α,r) darstellen:

$$ds^2 = n^2 f^2(\Phi) d\Lambda^2 + \left(\frac{df(\Phi)}{d\Phi}\right)^2 d\Phi^2 \qquad dS^2 = \frac{R^2}{n^2}\sin^2\left(f(r)\right) d\alpha^2 + R^2\left(\frac{df(r)}{dr}\right)^2 dr^2$$

linkes Bogenelement — *rechtes Bogenelement*
(left distance function) — *(right distance function)*

Da sich die Parameterlinien des Urbilds auch im Bild orthogonal schneiden ($c_{12} = c_{21} = C_{12} = C_{21} = 0$), sind die **Hauptstreckungen Λ₁, Λ₂ und λ₁, λ₂** identisch mit den Streckungen entlang der Parameterlinien und so muß zur Bestimmung beider Größen nicht die allgemeine Eigenwertaufgabe ausgewertet werden; die Berechnungen vereinfachen sich zu:

$$\Lambda_1 = \sqrt{\frac{c_{11}}{G_{11}}} = \frac{nf(\Phi)}{R\cos\Phi} \qquad \lambda_1 = \sqrt{\frac{C_{11}}{g_{11}}} = \frac{R\sin\left(f(r)\right)}{nr}$$

$$\Lambda_2 = \sqrt{\frac{c_{22}}{G_{22}}} = \frac{1}{R}\left|\frac{df(\Phi)}{d\Phi}\right| \qquad \lambda_2 = \sqrt{\frac{C_{22}}{g_{22}}} = R\left|\frac{df(r)}{dr}\right|$$

linke Hauptstreckungen — *rechte Hauptstreckungen*
(left principal stretches) — *(right principal stretches)*

Die linken und rechten Hauptstreckungen stellen die Eigenwerte der jeweiligen Cauchy-Greenschen Deformationstensoren dar. Ausgehend von der in Kapitel 1 vorgestellten allgemeinen Eigenwertaufgabe lassen sich auch die zugehörigen Eigenvektoren $\boldsymbol{U_1},\boldsymbol{U_2}$ bzw. $\boldsymbol{u_1},\boldsymbol{u_2}$ bestimmen, welche als Basis die ebenfalls in Kapitel 1 hergeleiteten GAUSSschen Tangentenvektoren für die Kugel ($\boldsymbol{G_1},\boldsymbol{G_2}$) bzw. für die Ebene ($\boldsymbol{g_1},\boldsymbol{g_2}$) besitzen. Als Ergebnis erhält man:

$$\boldsymbol{U_1} = \frac{1}{\sqrt{G_{11}}}\boldsymbol{G_1} = \frac{1}{R\cos\Phi}\boldsymbol{G_1} \qquad \boldsymbol{u_1} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\boldsymbol{g_1} = \frac{1}{r}\boldsymbol{g_1}$$

$$\boldsymbol{U_2} = \frac{1}{\sqrt{G_{22}}}\boldsymbol{G_2} = \frac{1}{R}\boldsymbol{G_2} \qquad \boldsymbol{u_2} = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\boldsymbol{g_2} = \boldsymbol{g_2}$$

linke Eigenvektoren — *rechte Eigenvektoren*
(left eigenvectors) — *(right eigenvectors)*

Aus den oben berechneten Hauptstreckungen kann eine **maximale Winkelverzerrung** Ω (*maximum angular deformation*) definiert werden. Sie wird sowohl an dieser Stelle als auch für alle behandelten speziellen Kegelabbildungen nur für den Bildbereich angegeben und berechnet sich zu:

$$\Omega = 2\arcsin\left|\frac{\Lambda_1 - \Lambda_2}{\Lambda_1 + \Lambda_2}\right| = 2\arcsin\left|\frac{nf(\Phi) - \left|\frac{df(\Phi)}{d\Phi}\right|\cos\Phi}{nf(\Phi) + \left|\frac{df(\Phi)}{d\Phi}\right|\cos\Phi}\right|$$

Unter **Scherung** δ (*left angular shear*) versteht man die Differenz aus dem Winkel zwischen den Parameterlinien im Urbild und dem Winkel zwischen den Parameterlinien im Bild. Sei A der Winkel zwischen den Parameterlinien im Urbild und α der Winkel zwischen den Parameterlinien im Bild, so gilt für die Scherung δ:

$$\delta = A - \alpha$$

$$\delta = \arccos\frac{G_{12}}{\sqrt{G_{11}G_{22}}} - \arccos\frac{c_{12}}{\sqrt{c_{11}c_{22}}}$$

Für die im Zuge dieser Arbeit behandelten Kegelabbildungen gilt stets $c_{12} = G_{12} = 0$, so daß für sämtliche Abbildungen die Scherung den Wert Null besitzt.

Im folgenden Kapitel werden, ausgehend von den jeweiligen Abbildungsgleichungen (direkt und invers), die eben berechneten Größen für eine Reihe spezieller Kegelabbildungen der Kugel explizit angegeben.
Darüber hinaus werden für jede Abbildung der minimale und der maximale Bildradius (*minimum and maximum polar coordinate r*) sowie die Schnittwinkel der Parameterlinien im Urbild und im Bild angegeben (*angle of intersection of coordinate lines, left versus right*). Zu jeder speziellen Abbildung wird ferner ein Diagramm angefertigt, in dem für den Bildbereich die Hauptstreckungen Λ_1 und Λ_2 sowie der Bildradius r als Funktion der sphärischen Breite Φ aufgetragen sind (*left principal stretches and polar coordinate r as function of the spherical latitude Φ*). Dabei wird von einer Abbildung der Einheitskugel ausgegangen, der Kugelradius R beträgt somit Eins. Zudem werden mit Hilfe von MATLAB für die in der Mapping-Toolbox zur Verfügung stehenden Abbildungen Weltkarten erstellt. Jeder Weltkarte wird eine zweite Karte gegenübergestellt, in der die in der Karte bestehenden Verzerrungsverhältnisse mit Hilfe von TISSOT-Ellipsen (*tissot indicatrices*) dargestellt werden. Diese Ellipsen besitzen als Halbachsen die Hauptstreckungen Λ_1 und Λ_2 .

KAPITEL 3

SPEZIELLE KEGELABBILDUNGEN DER KUGEL

3-1. ÄQUIDISTANTE KEGELABBILDUNGEN DER KUGEL

In diesem Abschnitt soll zunächst ein Überblick über die behandelten speziellen Kegelabbildungen hinsichtlich ihrer Eigenschaften, Einsatzgebiete und Entstehungsgeschichte gegeben werden, bevor dann im Anschluß die einzelnen Abbildungen ausführlich vorgestellt werden. Bei den hier behandelten speziellen Kegelabbildungen der Kugel handelt es sich um auf der Schar der Parallelkreise äquidistante Abbildungen, die Streckung entlang der Parameterlinien Λ = const., welche in allen vorliegenden Fällen mit der Hauptstreckung Λ_2 identisch ist, besitzt also stets den Wert Eins.

Die nachfolgend beschriebenen Eigenschaften der einzelnen Abbildungen gelten nur für den Fall einer normalständigen Kegelabbildung, die als Hauptpunkt den Nord- oder Südpol der Kugel besitzt. Für die zu jeder Abbildung gehörenden Diagramme und Weltkarten wird als Hauptpunkt der Nordpol gewählt. Im einzelnen werden die folgenden Abbildungen vorgestellt:

ÄQUIDISTANTE KEGELABBILDUNG, ÄQUIDISTANT UND KONFORM AUF DEM STANDARDPARALLELKREIS Φ_0	
Die Abbildungsgleichungen dieser Abbildung gehen aus denen der De l'Isle-Abbildung (s.u.) hervor, indem man z.B. den Grenzübergang $\Phi_1 \rightarrow \Phi_2$ durchführt.	
Andere Bezeichnungen	→ **PTOLEMÄUS-Abbildung** → Äquidistante Kegelabbildung mit 1 Standardparallelen (equidistant conic with 1 standard parallel) → Einfache Kegelabbildung (simple conic)
Eigenschaften	Sämtliche Parallelkreise, auch die beiden Pole, werden als Bogenstücke konzentrischer Kreise abgebildet. Die Meridiane werden als Geraden abgebildet und schneiden die Parallelkreise im rechten Winkel. Der Hauptpunkt (als einer der beiden Pole) wird ebenfalls als Kreisbogenstück abgebildet. Alle Meridiane sowie der gewählte Standardparallelkreis (Grundkreis) werden äquidistant abgebildet, besitzen also den Maßstab 1. Entlang aller anderen Parallelkreise ist der Maßstab zwar verschieden von 1, aber konstant. Darüber hinaus ist die Abbildung konform auf dem Standardparallelkreis (Grundkreis).
Einsatzgebiete	Abbildung kleiner Gebiete mittlerer Breite
Ursprung	Erstmals prinzipiell beschrieben wurde diese Abbildung vom Astronomen und Geographen Claudius Ptolemäus um 150 n.Chr.. In seinem Entwurf wurden die Meridiane zwar als Geraden abgebildet, sie änderten aber beim Übergang von der nördlichen auf die südliche Hemisphäre die Richtung. Die Abbildung wurde im 16. Jahrhundert von Johannes Ruysch und Gerardus Mercator überarbeitet und modifiziert und besitzt seitdem ihr heutiges Aussehen. Einen ausführlichen Überblick über die Entstehungs- und Entwicklungsgeschichte dieser Abbildung gibt John Snyder in [37].

ÄQUIDISTANTE KEGELABBILDUNG, ÄQUIDISTANT UND KONFORM AUF DEN BEIDEN STANDARDPARALLELKREISEN Φ_1 UND Φ_2	
Andere Bezeichnung	→ **DE L'ISLE-Abbildung** → Äquidistante Kegelabbildung mit zwei Standardparallelen (equidistant conic with two standard parallels) → Einfache Kegelabbildung mit zwei Standardparallelen (simple conic with two standard parallels)
Eigenschaften	Sämtliche Parallelkreise, auch die beiden Pole, werden als Bogenstücke konzentrischer Kreise abgebildet. Die Meridiane werden als Geraden abgebildet und schneiden die Parallelkreise im rechten Winkel. Der Hauptpunkt (als einer der beiden Pole) wird ebenfalls als Kreisbogenstück abgebildet. Alle Meridiane sowie die gewählten Standardparallelkreise werden äquidistant abgebildet, besitzen also den Maßstab 1. Entlang aller anderen Parallelkreise ist der Maßstab zwar verschieden von 1, aber konstant. Darüber hinaus ist die Abbildung konform auf den beiden Standardparallelkreisen.
Einsatzgebiete	→ Abbildung kleiner Gebiete mittlerer Breite → Karten von Alaska (allerdings in einer approximativen ellipsoidischen Form) → Historische Karten der nordamerikanischen Kolonien im Mittelatlantik und Nordpazifik sowie historische Sternkarten
Ursprung	Weiterentwicklung der Ptolemäus-Abbildung durch den Franzosen Joseph Nicolas De l'Isle (1688-1768), der diese Abbildung erstmals im Jahre 1745 für eine Karte Rußlands benutzte [6]. De l'Isle's Originalentwurf unterschied sich von der heutigen Form in der Tatsache, daß die Meridiane nicht längentreu abgebildet wurden und von den Parallelkreisen nicht exakt im rechten Winkel geschnitten wurden.

ÄQUIDISTANTE KEGELABBILDUNG, PUNKTARTIGES BILD DES HAUPTPUNKTES, ÄQUIDISTANT UND KONFORM AUF DEM STANDARDPARALLELKREIS Φ_1	
Sonderfall der De l'Isle-Abbildung, der dadurch entsteht, daß für eine der beiden Standardparallelen der Nordpol (Φ=90°) gewählt wird.	
Andere Bezeichnung	**MENDELEEV-Abbildung**
Eigenschaften	Alle Parallelkreise, mit Ausnahme des Hauptpunktes, werden als Bogenstücke konzentrischer Kreise abgebildet. Die Meridiane werden als Geraden abgebildet und schneiden die Parallelkreise im rechten Winkel. Der Hauptpunkt wird als Punkt abgebildet. Alle Meridiane sowie der von Φ=90° verschiedene Standardparallelkreis werden äquidistant abgebildet, besitzen also den Maßstab 1. Entlang aller anderen Parallelkreise ist der Maßstab zwar verschieden von 1, aber konstant. Darüber hinaus ist die Abbildung konform auf dem von Φ=90° verschiedenen Standardparallelkreis.
Einsatzgebiete	---
Ursprung	Vorgeschlagen wurde diese Abbildung erstmals von Dimitri I. Mendeleev (1834-1907) im Jahre 1907 [31]. Verwendung fand sie für eine Karte Rußlands im Maßstab 1 : 15 000 000.

ÄQUIDISTANTE LOW-ERROR-KEGELABBILDUNG, ÄQUIDISTANT UND KONFORM AUF ZWEI STANDARDPARALLELKREISEN	
Diese äquidistante Kegelabbildung besitzt zwei Standardparallelen, die allerdings nicht von vornherein vorgegeben sind, sondern aus der nördlichen und südlichen Kartenbegrenzung Φ_N und Φ_S berechnet werden können.	
Andere Bezeichnung	**MURDOCH III - Abbildung**
Eigenschaften	Sämtliche Parallelkreise, auch die Pole, werden als Bogenstücke konzentrischer Kreise abgebildet. Die Meridiane werden als Geraden abgebildet und schneiden die Parallelkreise im rechten Winkel. Der Hauptpunkt (als einer der beiden Pole) wird ebenfalls als Kreisbogenstück abgebildet. Alle Meridiane sowie die beiden Standardparallelkreise werden äquidistant abgebildet, besitzen also den Maßstab 1. Entlang aller anderen Parallelkreise ist der Maßstab zwar verschieden von 1, aber konstant. Die beiden Begrenzungsparallelkreise Φ_N und Φ_S besitzen dann denselben Maßstab, wenn als nördliche Kartenbegrenzung nicht der Nordpol gewählt wird; dieser Maßstab ist nur abhängig vom Betrag der Nord-Süd-Ausdehnung der Karte ($\lvert\Phi_N-\Phi_S\rvert$), nicht aber von der Mittelbreite $(\Phi_N+\Phi_S)/2$. Darüber hinaus ist die Abbildung konform auf den beiden Standardparallelkreisen. Die Gesamtfläche des abgebildeten Gebiets entspricht der Fläche im Urbild, die Abbildung ist jedoch nicht überall flächentreu.
Einsatzgebiete	---
Ursprung	Entwickelt von Patrick Murdoch im Jahre 1758 [32]. In der ursprünglichen Form entsprach die Gesamtfläche des abgebildeten Gebietes nicht der im Urbild. Diese Forderung wurde erst durch die Modifizierung der Projektionskonstanten von Alfred E. Young im Jahre 1920 erfüllt [40].

EQUIDISTANT CONIC PROJECTION

EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF THE STANDARD PARALLEL Φ_0

PTOLEMY'S PROJECTION

cone constant

$$n = \sin\Phi_0$$

direct equations, polar coordinates

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha &= n\Lambda \\ r &= R(\Phi_0 + \cot\Phi_0 - \Phi) \end{aligned}}$$

direct equations, cartesian coordinates

$$x = R(\Phi_0 + \cot\Phi_0 - \Phi)\cos(n\Lambda)$$
$$y = R(\Phi_0 + \cot\Phi_0 - \Phi)\sin(n\Lambda)$$

left Jacobi matrix

$$\boldsymbol{J}_l = \begin{pmatrix} \alpha_\Lambda & \alpha_\Phi \\ r_\Lambda & r_\Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & -R \end{pmatrix}$$

left Cauchy-Green deformation tensor

$$[c_{KL}] = \begin{pmatrix} R^2 n^2 (\Phi_0 + \cot\Phi_0 - \Phi)^2 & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix}$$

left distance function

$$ds^2 = R^2 n^2 (\Phi_0 + \cot\Phi_0 - \Phi)^2 d\Lambda^2 + R^2 d\Phi^2$$

left principal stretches

$$\Lambda_1 = \frac{n(\Phi_0 + \cot\Phi_0 - \Phi)}{\cos\Phi}$$
$$\Lambda_2 = 1$$

EQUIDISTANT CONIC PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF THE STANDARD PARALLEL Φ_0

left eigenvectors

$$\boldsymbol{U_1} = \frac{1}{R\cos\Phi}\boldsymbol{G_1} \qquad \boldsymbol{U_2} = \frac{1}{R}\boldsymbol{G_2}$$

maximum angular deformation

$$\Omega = 2\arcsin\left|\frac{n(\Phi_0 + \cot\Phi_0 - \Phi) - \cos\Phi}{n(\Phi_0 + \cot\Phi_0 - \Phi) + \cos\Phi}\right|$$

EQUIDISTANT CONIC PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF THE STANDARD PARALLEL Φ_0

cone constant

$$n = \sin\Phi_0$$

inverse equations

$$\Lambda = \frac{\alpha}{n}$$
$$\Phi = \Phi_0 + \cot\Phi_0 - \frac{r}{R}$$

right Jacobi matrix

$$\boldsymbol{J}_r = \begin{pmatrix} \Lambda_\alpha & \Lambda_r \\ \Phi_\alpha & \Phi_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R} \end{pmatrix}$$

right Cauchy-Green deformation tensor

$$[C_{kl}] = \begin{pmatrix} \frac{R^2}{n^2}\sin^2(\Phi_0 + \cot\Phi_0 - \frac{r}{R}) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

right distance function

$$dS^2 = \frac{R^2}{n^2}\sin^2(\Phi_0 + \cot\Phi_0 - \frac{r}{R})d\alpha^2 + dr^2$$

right principal stretches

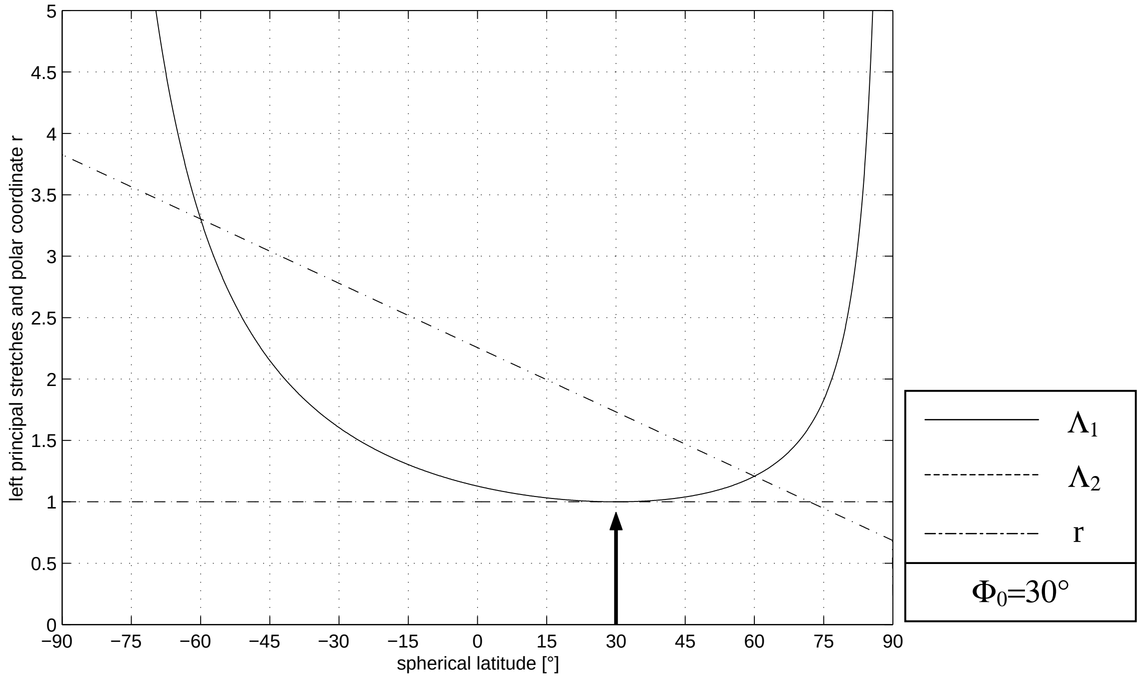
$$\lambda_1 = \frac{R}{nr}\sin(\Phi_0 + \cot\Phi_0 - \frac{r}{R})$$
$$\lambda_2 = 1$$

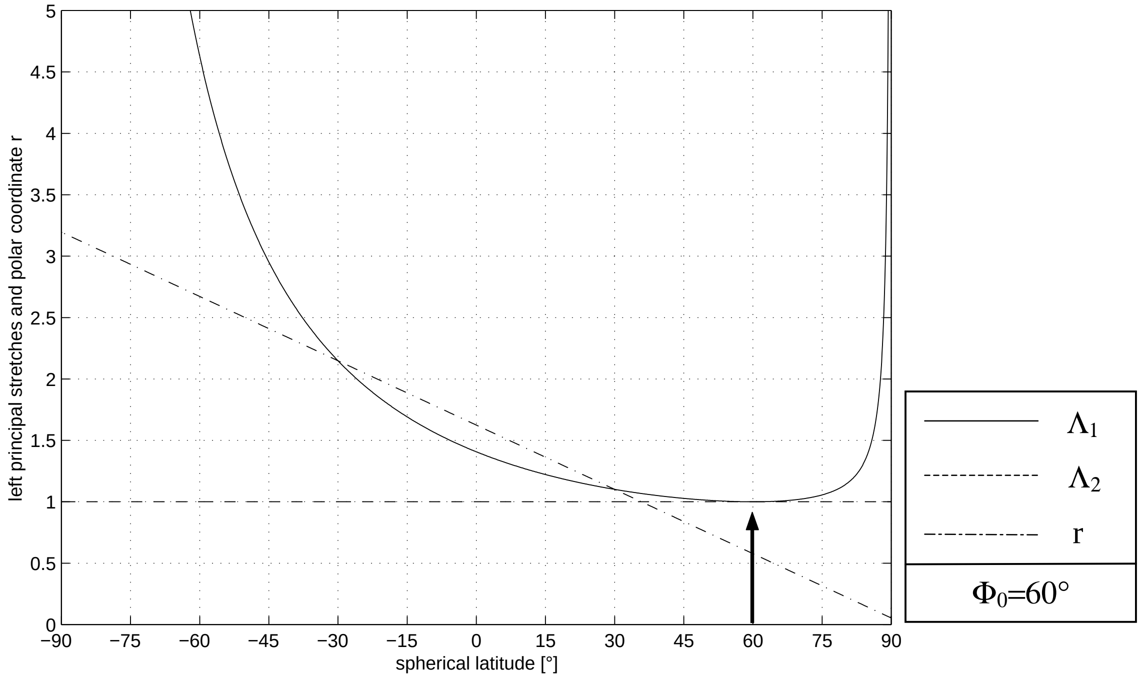
right eigenvectors

$$\boldsymbol{u_1} = \frac{1}{r}\boldsymbol{g_1} \qquad \boldsymbol{u_2} = \boldsymbol{g_2}$$

EQUIDISTANT CONIC PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF THE STANDARD PARALLEL Φ_0

left principal stretches and polar coordinate r as function of the spherical latitude Φ





EQUIDISTANT CONIC PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF THE STANDARD PARALLEL Φ_0

minimum polar coordinate r_{min}

$$r_{\min} = r(\Phi = \frac{\pi}{2}) = R(\cot\Phi_0 + \Phi_0 - \frac{\pi}{2})$$

maximum polar coordinate r_{max}

$$r_{\max} = r(\Phi = -\frac{\pi}{2}) = R(\cot\Phi_0 + \Phi_0 + \frac{\pi}{2})$$

angle of intersection of coordinate lines, left versus right

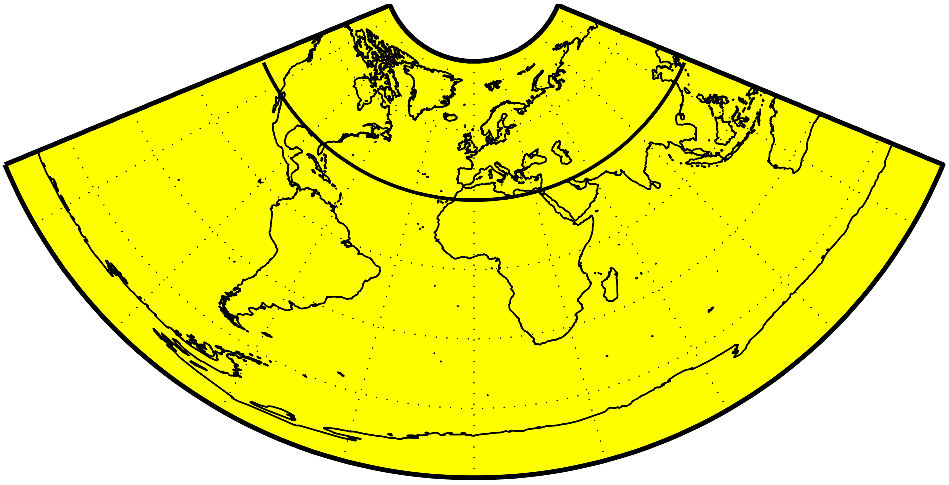
$A = 90°$ $\alpha = 90°$

left angular shear

$\delta = 0°$

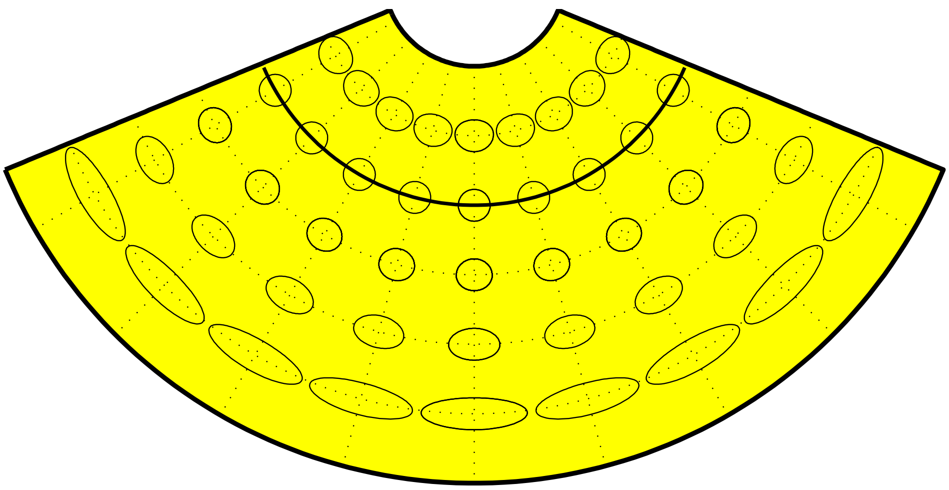
EQUIDISTANT CONIC PROJECTION

EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF THE STANDARD PARALLEL Φ_0



Ptolemy's projection: world map and left Tissot indicatrices

(30° - graticule, standard parallel Φ_0=30°)



EQUIDISTANT CONIC PROJECTION

EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF TWO STANDARD PARALLELS Φ_1, Φ_2

DE L'ISLE'S PROJECTION

cone constant

$$n = \frac{\cos\Phi_1 - \cos\Phi_2}{\Phi_2 - \Phi_1}$$

direct equations, polar coordinates

$$\alpha = n\Lambda$$

$$r = R\left((\frac{\pi}{2} - \Phi) + \frac{(\frac{\pi}{2} - \Phi_1)\cos\Phi_2 - (\frac{\pi}{2} - \Phi_2)\cos\Phi_1}{\cos\Phi_1 - \cos\Phi_2} \right)$$

direct equations, cartesian coordinates

$$x = R\left((\frac{\pi}{2} - \Phi) + \frac{(\frac{\pi}{2} - \Phi_1)\cos\Phi_2 - (\frac{\pi}{2} - \Phi_2)\cos\Phi_1}{\cos\Phi_1 - \cos\Phi_2} \right)\cos(n\Lambda)$$

$$y = R\left((\frac{\pi}{2} - \Phi) + \frac{(\frac{\pi}{2} - \Phi_1)\cos\Phi_2 - (\frac{\pi}{2} - \Phi_2)\cos\Phi_1}{\cos\Phi_1 - \cos\Phi_2} \right)\sin(n\Lambda)$$

left Jacobi matrix

$$\boldsymbol{J}_l = \begin{pmatrix} \alpha_\Lambda & \alpha_\Phi \\ r_\Lambda & r_\Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & -R \end{pmatrix}$$

EQUIDISTANT CONIC PROJECTION

EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF TWO STANDARD PARALLELS Φ_1,Φ_2

left Cauchy-Green deformation tensor

$$[c_{KL}] = \begin{pmatrix} R^2 n^2 \left((\frac{\pi}{2} - \Phi) + \frac{(\frac{\pi}{2} - \Phi_1)\cos\Phi_2 - (\frac{\pi}{2} - \Phi_2)\cos\Phi_1}{\cos\Phi_1 - \cos\Phi_2} \right)^2 & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix}$$

left distance function

$$ds^2 = R^2 n^2 \left((\frac{\pi}{2} - \Phi) + \frac{(\frac{\pi}{2} - \Phi_1)\cos\Phi_2 - (\frac{\pi}{2} - \Phi_2)\cos\Phi_1}{\cos\Phi_1 - \cos\Phi_2} \right)^2 d\Lambda^2 + R^2 d\Phi^2$$

left principal stretches

$$\Lambda_1 = n \frac{(\frac{\pi}{2} - \Phi)(\cos\Phi_1 - \cos\Phi_2) + (\frac{\pi}{2} - \Phi_1)\cos\Phi_2 - (\frac{\pi}{2} - \Phi_2)\cos\Phi_1}{\cos\Phi(\cos\Phi_1 - \cos\Phi_2)}$$

$$\Lambda_2 = 1$$

left eigenvectors

$$\boldsymbol{U_1} = \frac{1}{R\cos\Phi}\boldsymbol{G_1} \qquad \boldsymbol{U_2} = \frac{1}{R}\boldsymbol{G_2}$$

maximum angular deformation

$$\Omega = 2\arcsin\left| \frac{(\cos\Phi_1 - \cos\Phi_2)\left(n(\frac{\pi}{2} - \Phi) - \cos\Phi \right) + (\frac{\pi}{2} - \Phi_1)\cos\Phi_2 - (\frac{\pi}{2} - \Phi_2)\cos\Phi_1}{(\cos\Phi_1 - \cos\Phi_2)\left(n(\frac{\pi}{2} - \Phi) + \cos\Phi \right) + (\frac{\pi}{2} - \Phi_1)\cos\Phi_2 - (\frac{\pi}{2} - \Phi_2)\cos\Phi_1} \right|$$

EQUIDISTANT CONIC PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF TWO STANDARD PARALLELS Φ_1, Φ_2

cone constant

$$n = \frac{\cos\Phi_1 - \cos\Phi_2}{\Phi_2 - \Phi_1}$$

inverse equations

$$\Lambda = \frac{\alpha}{n}$$

$$\Phi = \frac{(\frac{\pi}{2} - \Phi_1)\cos\Phi_2 - (\frac{\pi}{2} - \Phi_2)\cos\Phi_1}{\cos\Phi_1 - \cos\Phi_2} + \frac{\pi}{2} - \frac{r}{R}$$

right Jacobi matrix

$$\boldsymbol{J}_r = \begin{pmatrix} \Lambda_\alpha & \Lambda_r \\ \Phi_\alpha & \Phi_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R} \end{pmatrix}$$

right Cauchy-Green deformation tensor

$$[C_{kl}] = \begin{pmatrix} \frac{R^2}{n^2}\cos^2\left(\frac{(\frac{\pi}{2} - \Phi_1)\cos\Phi_2 - (\frac{\pi}{2} - \Phi_2)\cos\Phi_1}{\cos\Phi_1 - \cos\Phi_2} - \frac{r}{R}\right) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

right distance function

$$dS^2 = \frac{R^2}{n^2}\cos^2\left(\frac{(\frac{\pi}{2} - \Phi_1)\cos\Phi_2 - (\frac{\pi}{2} - \Phi_2)\cos\Phi_1}{\cos\Phi_1 - \cos\Phi_2} - \frac{r}{R}\right)d\alpha^2 + dr^2$$

EQUIDISTANT CONIC PROJECTION

EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF TWO STANDARD PARALLELS Φ_1,Φ_2

right principal stretches

$$\lambda_1 = \frac{R}{nr}\cos\left(\frac{(\frac{\pi}{2}-\Phi_1)\cos\Phi_2-(\frac{\pi}{2}-\Phi_2)\cos\Phi_1}{\cos\Phi_1-\cos\Phi_2}-\frac{r}{R}\right)$$

$$\lambda_2 = 1$$

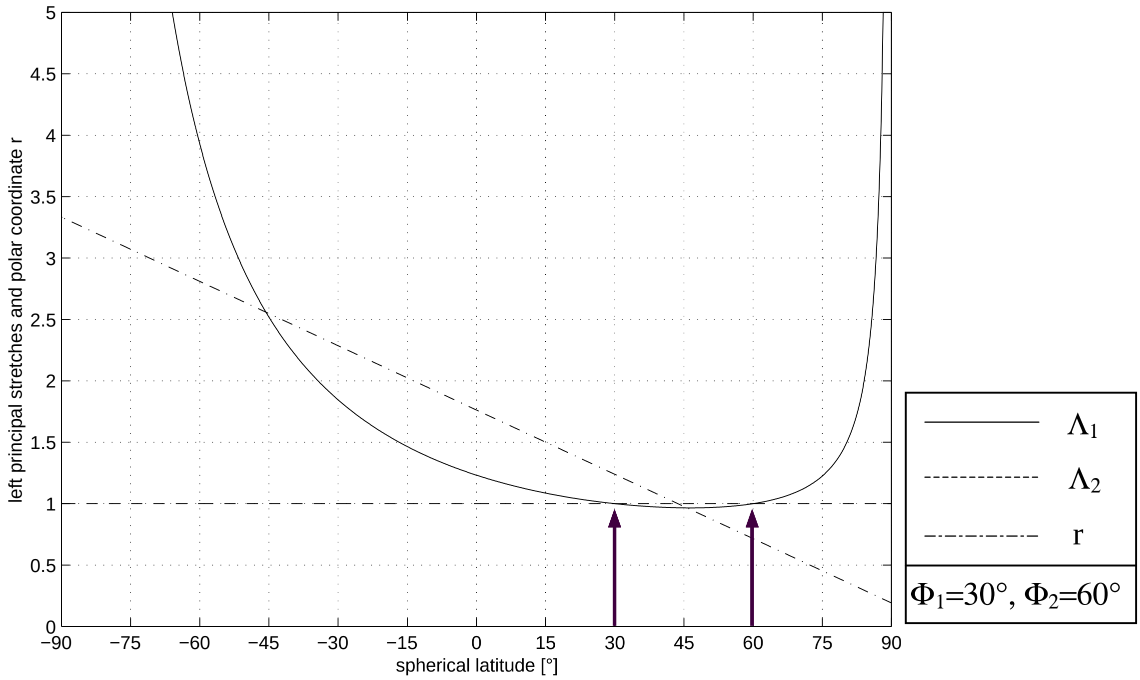
right eigenvectors

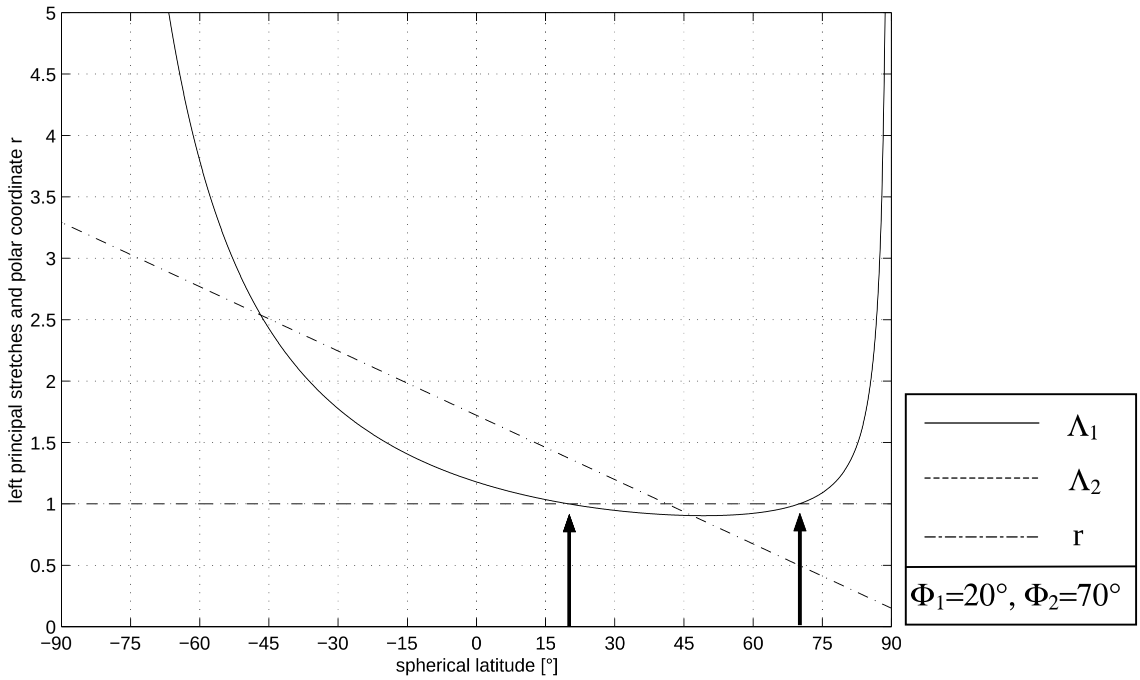
$$\boldsymbol{u_1} = \frac{1}{r}\boldsymbol{g_1} \qquad \boldsymbol{u_2} = \boldsymbol{g_2}$$

EQUIDISTANT CONIC PROJECTION

EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF TWO STANDARD PARALLELS Φ_1,Φ_2

left principal stretches and polar coordinate r as function of the spherical latitude Φ





EQUIDISTANT CONIC PROJECTION

EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF TWO STANDARD PARALLELS Φ_1, Φ_2

minimum polar coordinate r_{min}

$$r_{\min} = r(\Phi = \frac{\pi}{2}) = R\left(\frac{(\frac{\pi}{2} - \Phi_1)\cos\Phi_2 - (\frac{\pi}{2} - \Phi_2)\cos\Phi_1}{\cos\Phi_1 - \cos\Phi_2}\right)$$

maximum polar coordinate r_{max}

$$r_{\max} = r(\Delta = \pi) = R\left(\pi + \frac{(\frac{\pi}{2} - \Phi_1)\cos\Phi_2 - (\frac{\pi}{2} - \Phi_2)\cos\Phi_1}{\cos\Phi_1 - \cos\Phi_2}\right)$$

angle of intersection of coordinate lines, left versus right

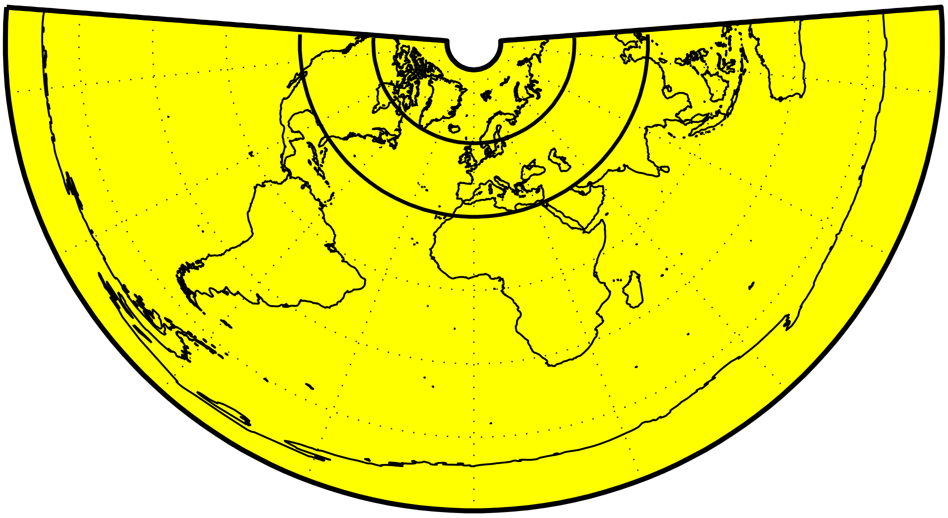
$A = 90°$ $\qquad \alpha = 90°$

left angular shear

$\delta = 0°$

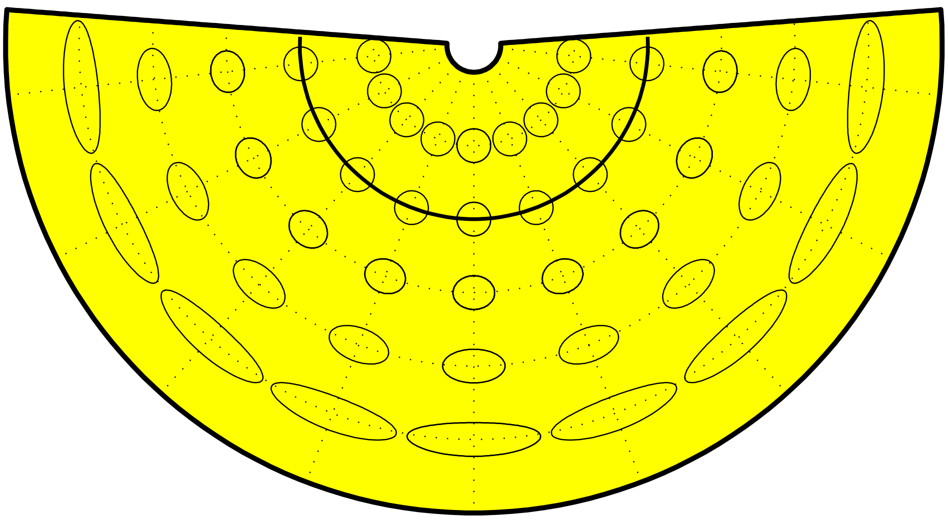
EQUIDISTANT CONIC PROJECTION

EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF TWO STANDARD PARALLELS Φ_1,Φ_2



De l'Isle's projection: world map and left Tissot indicatrices

(30° - graticule, standard parallels Φ_1=30°, Φ_2=60°)



EQUIDISTANT CONIC PROJECTION

EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF THE STANDARD PARALLEL Φ_1, POINTED POLE

MENDELEEV'S PROJECTION

cone constant

$$n = \frac{\cos\Phi_1}{\frac{\pi}{2} - \Phi_1}$$

direct equations, polar coordinates

$$\alpha = n\Lambda$$
$$r = R(\frac{\pi}{2} - \Phi)$$

direct equations, cartesian coordinates

$$x = R(\frac{\pi}{2} - \Phi)\cos(n\Lambda)$$
$$y = R(\frac{\pi}{2} - \Phi)\sin(n\Lambda)$$

left Jacobi matrix

$$\boldsymbol{J}_l = \begin{pmatrix} \alpha_\Lambda & \alpha_\Phi \\ r_\Lambda & r_\Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & -R \end{pmatrix}$$

left Cauchy-Green deformation tensor

$$[c_{KL}] = \begin{pmatrix} R^2 n^2 (\frac{\pi}{2} - \Phi)^2 & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix}$$

left distance function

$$ds^2 = R^2 n^2 (\frac{\pi}{2} - \Phi)^2 d\Lambda^2 + R^2 d\Phi^2$$

EQUIDISTANT CONIC PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF THE STANDARD PARALLEL Φ_1, POINTED POLE

left principal stretches

$$\Lambda_1 = \frac{n(\frac{\pi}{2} - \Phi)}{\cos\Phi}$$

$$\Lambda_2 = 1$$

left eigenvectors

$$\boldsymbol{U_1} = \frac{1}{R\cos\Phi}\boldsymbol{G_1} \qquad \boldsymbol{U_2} = \frac{1}{R}\boldsymbol{G_2}$$

maximum angular deformation

$$\Omega = 2\arcsin\left|\frac{n(\frac{\pi}{2} - \Phi) - \cos\Phi}{n(\frac{\pi}{2} - \Phi) + \cos\Phi}\right|$$

EQUIDISTANT CONIC PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF THE STANDARD PARALLEL Φ_1, POINTED POLE

cone constant

$$n = \frac{\cos \Phi_1}{\frac{\pi}{2} - \Phi_1}$$

inverse equations

$$\boxed{\begin{aligned} \Lambda &= \frac{\alpha}{n} \\ \Phi &= \frac{\pi}{2} - \frac{r}{R} \end{aligned}}$$

right Jacobi matrix

$$\boldsymbol{J}_r = \begin{pmatrix} \Lambda_\alpha & \Lambda_r \\ \Phi_\alpha & \Phi_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R} \end{pmatrix}$$

right Cauchy-Green deformation tensor

$$[C_{kl}] = \begin{pmatrix} \frac{R^2}{n^2}\cos^2(\frac{r}{R}) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

right distance function

$$dS^2 = \frac{R^2}{n^2}\cos^2(\frac{r}{R})d\alpha^2 + dr^2$$

EQUIDISTANT CONIC PROJECTION

EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF THE STANDARD PARALLEL Φ_1, POINTED POLE

right principal stretches

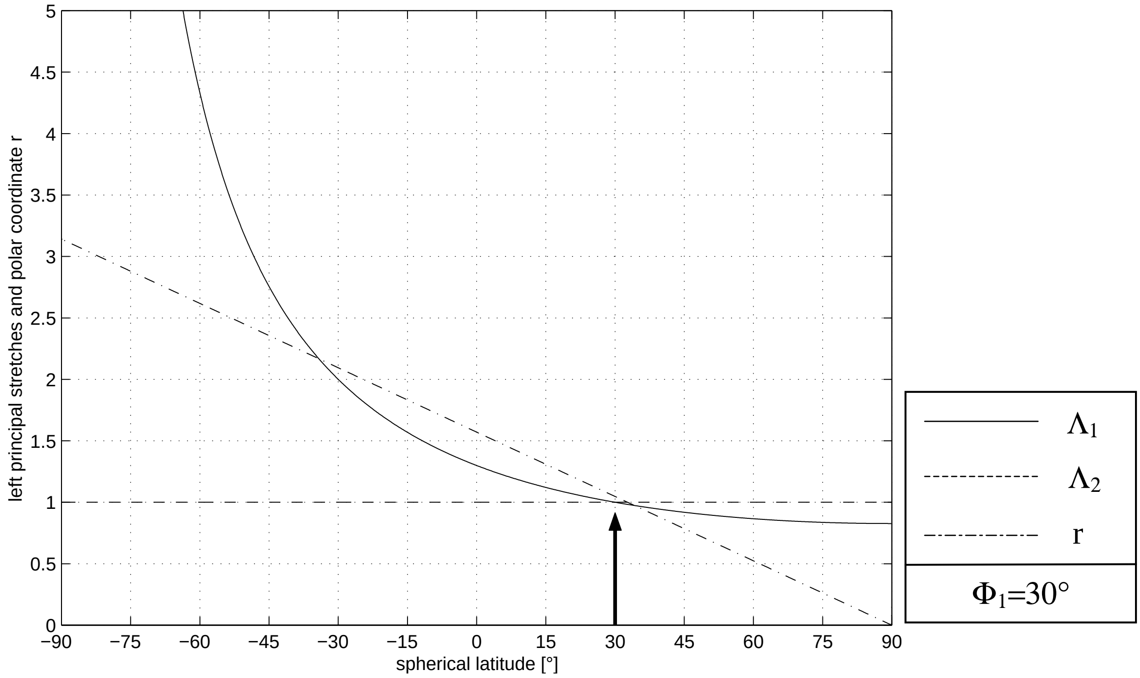
$$\lambda_1 = \frac{R}{nr}\cos(\frac{r}{R})$$
$$\lambda_2 = 1$$

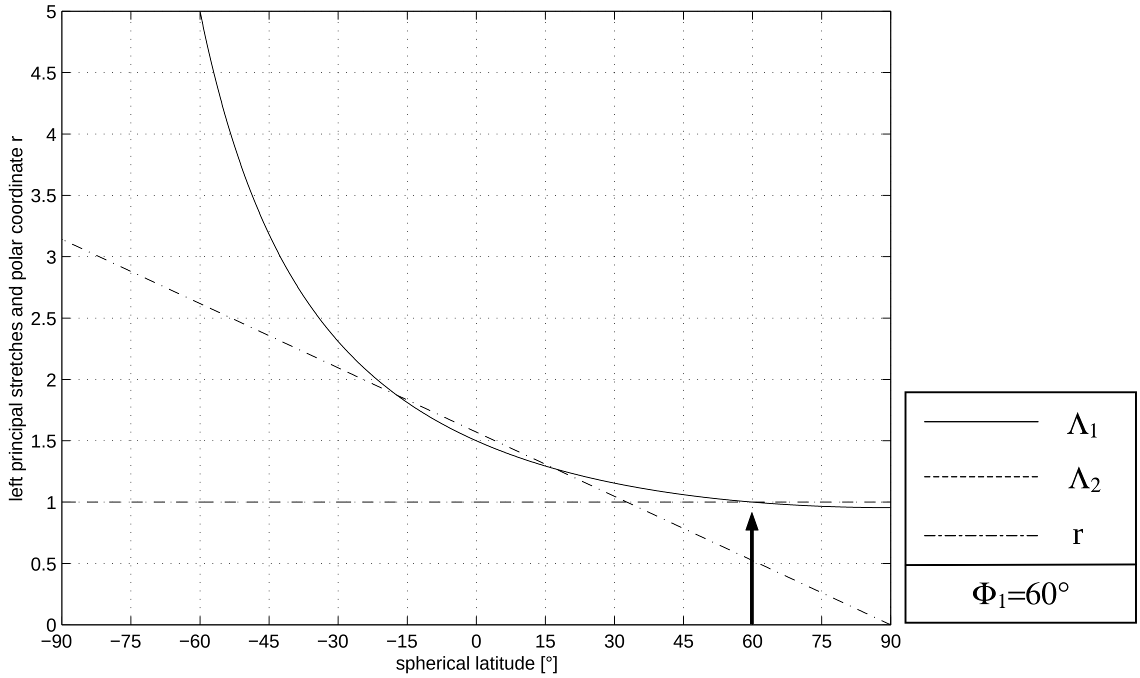
right eigenvectors

$$\boldsymbol{u_1} = \frac{1}{r}\boldsymbol{g_1} \qquad \boldsymbol{u_2} = \boldsymbol{g_2}$$

EQUIDISTANT CONIC PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF THE STANDARD PARALLEL Φ_1, POINTED POLE

left principal stretches and polar coordinate r as function of the spherical latitude Φ





EQUIDISTANT CONIC PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF THE STANDARD PARALLEL Φ_1, POINTED POLE

minimum polar coordinate r_{min}

$$r_{\min} = r(\Phi = \frac{\pi}{2}) = 0$$

maximum polar coordinate r_{max}

$$r_{\max} = r(\Phi = \frac{\pi}{2}) = R\pi$$

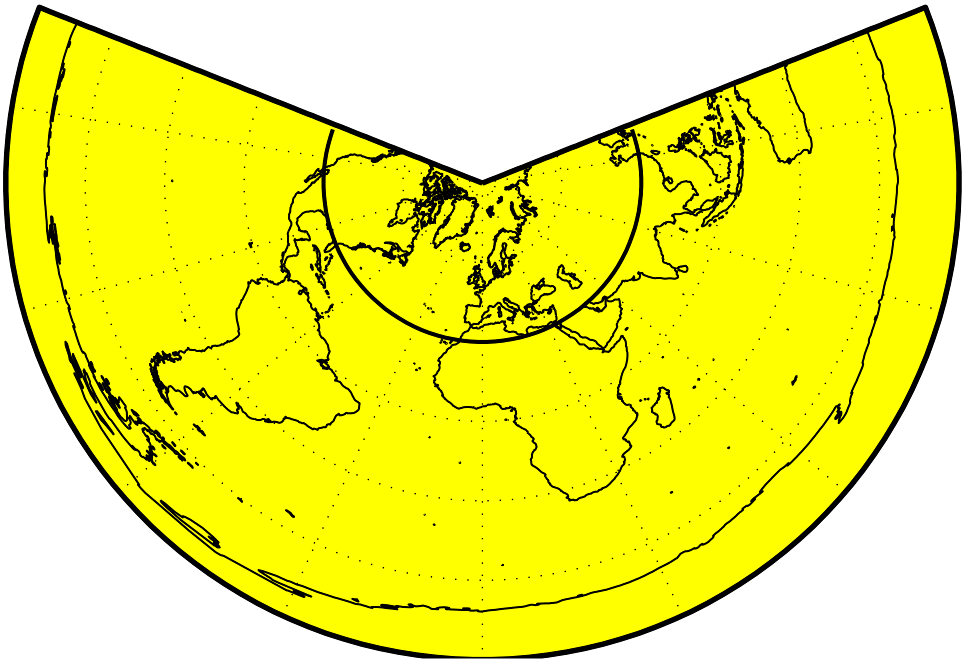
angle of intersection of coordinate lines, left versus right

$A = 90°$ $\qquad$ $\alpha = 90°$

left angular shear

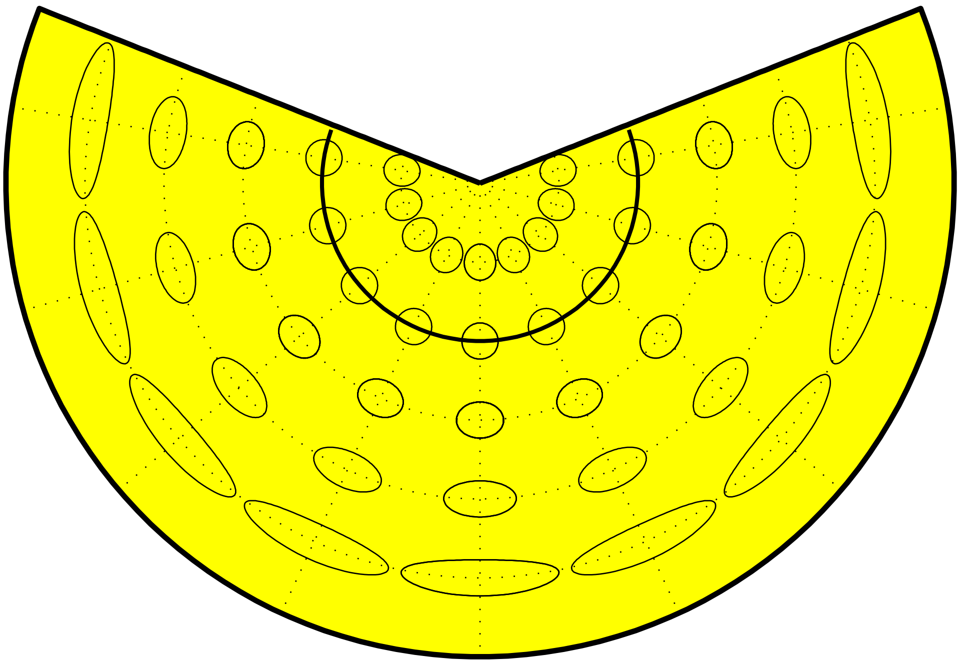
$\delta = 0°$

EQUIDISTANT CONIC PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF THE STANDARD PARALLEL Φ_1, POINTED POLE



Mendeleev's projection: world map and left Tissot indicatrices

(30° - graticule, standard parallel Φ_1=30°)



LOW-ERROR EQUIDISTANT CONIC PROJECTION

EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF TWO STANDARD PARALLELS

MURDOCH III - PROJECTION

cone constant

$$n = \frac{\sin(\frac{\Phi_S + \Phi_N}{2})\sin(\frac{\Phi_N - \Phi_S}{2})\tan(\frac{\Phi_N - \Phi_S}{2})}{\left(\frac{\Phi_N - \Phi_S}{2}\right)^2}$$

direct equations, polar coordinates

$$\boxed{\begin{aligned} &\alpha = n\Lambda \\ &r = R\left(\frac{\Phi_N - \Phi_S}{2}\cot(\frac{\Phi_N - \Phi_S}{2})\cot(\frac{\Phi_N + \Phi_S}{2}) + \frac{\Phi_N + \Phi_S}{2} - \Phi\right) \end{aligned}}$$

direct equations, cartesian coordinates

$$x = R\left(\frac{\Phi_N - \Phi_S}{2}\cot(\frac{\Phi_N - \Phi_S}{2})\cot(\frac{\Phi_N + \Phi_S}{2}) + \frac{\Phi_N + \Phi_S}{2} - \Phi\right)\cos(n\Lambda)$$

$$y = R\left(\frac{\Phi_N - \Phi_S}{2}\cot(\frac{\Phi_N - \Phi_S}{2})\cot(\frac{\Phi_N + \Phi_S}{2}) + \frac{\Phi_N + \Phi_S}{2} - \Phi\right)\sin(n\Lambda)$$

left Jacobi matrix

$$\boldsymbol{J}_l = \begin{pmatrix} \alpha_\Lambda & \alpha_\Phi \\ r_\Lambda & r_\Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & -R \end{pmatrix}$$

left Cauchy-Green deformation tensor

$$[c_{KL}] = \begin{pmatrix} R^2 n^2\left(\frac{\Phi_N - \Phi_S}{2}\cot(\frac{\Phi_N - \Phi_S}{2})\cot(\frac{\Phi_N + \Phi_S}{2}) + \frac{\Phi_N + \Phi_S}{2} - \Phi\right)^2 & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix}$$

left distance function

$$ds^2 = R^2 n^2\left(\frac{\Phi_N - \Phi_S}{2}\cot(\frac{\Phi_N - \Phi_S}{2})\cot(\frac{\Phi_N + \Phi_S}{2}) + \frac{\Phi_N + \Phi_S}{2} - \Phi\right)^2 d\Lambda^2 + R^2 d\Phi^2$$

LOW-ERROR EQUIDISTANT CONIC PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF TWO STANDARD PARALLELS

left principal stretches

$$\Lambda_1 = \frac{n}{\cos\Phi}\left(\frac{\Phi_N - \Phi_S}{2}\cot(\frac{\Phi_N - \Phi_S}{2})\cot(\frac{\Phi_N + \Phi_S}{2}) + \frac{\Phi_N + \Phi_S}{2} - \Phi\right)$$

$$\Lambda_2 = 1$$

left eigenvectors

$$\boldsymbol{U_1} = \frac{1}{R\cos\Phi}\boldsymbol{G_1} \qquad \boldsymbol{U_2} = \frac{1}{R}\boldsymbol{G_2}$$

maximum angular deformation

$$\Omega = 2\arcsin\left|\frac{n\left(\frac{\Phi_N - \Phi_S}{2}\cot(\frac{\Phi_N - \Phi_S}{2})\cot(\frac{\Phi_N + \Phi_S}{2}) + \frac{\Phi_N + \Phi_S}{2} - \Phi\right) - \cos\Phi}{n\left(\frac{\Phi_N - \Phi_S}{2}\cot(\frac{\Phi_N - \Phi_S}{2})\cot(\frac{\Phi_N + \Phi_S}{2}) + \frac{\Phi_N + \Phi_S}{2} - \Phi\right) + \cos\Phi}\right|$$

LOW-ERROR EQUIDISTANT CONIC PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF TWO STANDARD PARALLELS

cone constant

$$n = \frac{\sin(\frac{\Phi_S + \Phi_N}{2})\sin(\frac{\Phi_N - \Phi_S}{2})\tan(\frac{\Phi_N - \Phi_S}{2})}{\left(\frac{\Phi_N - \Phi_S}{2}\right)^2}$$

inverse equations

$$\Lambda = \frac{\alpha}{n}$$
$$\Phi = \frac{\Phi_N - \Phi_S}{2}\cot(\frac{\Phi_N - \Phi_S}{2})\cot(\frac{\Phi_N + \Phi_S}{2}) + \frac{\Phi_N + \Phi_S}{2} - \frac{r}{R}$$

right Jacobi matrix

$$\boldsymbol{J}_r = \begin{pmatrix} \Lambda_\alpha & \Lambda_r \\ \Phi_\alpha & \Phi_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R} \end{pmatrix}$$

right Cauchy-Green deformation tensor

$$[C_{kl}] = \begin{pmatrix} \frac{R^2}{n^2}\sin^2\left(\frac{\Phi_N - \Phi_S}{2}\cot(\frac{\Phi_N - \Phi_S}{2})\cot(\frac{\Phi_N + \Phi_S}{2}) + \frac{\Phi_N + \Phi_S}{2} - \frac{r}{R}\right) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

right distance function

$$dS^2 = \frac{R^2}{n^2}\sin^2\left(\frac{\Phi_N - \Phi_S}{2}\cot(\frac{\Phi_N - \Phi_S}{2})\cot(\frac{\Phi_N + \Phi_S}{2}) + \frac{\Phi_N + \Phi_S}{2} - \frac{r}{R}\right)d\alpha^2 + dr^2$$

LOW-ERROR EQUIDISTANT CONIC PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF TWO STANDARD PARALLELS

right principal stretches

$$\lambda_1 = \frac{R}{nr}\sin\left(\frac{\Phi_N - \Phi_S}{2}\cot(\frac{\Phi_N - \Phi_S}{2})\cot(\frac{\Phi_N + \Phi_S}{2}) + \frac{\Phi_N + \Phi_S}{2} - \frac{r}{R}\right)$$

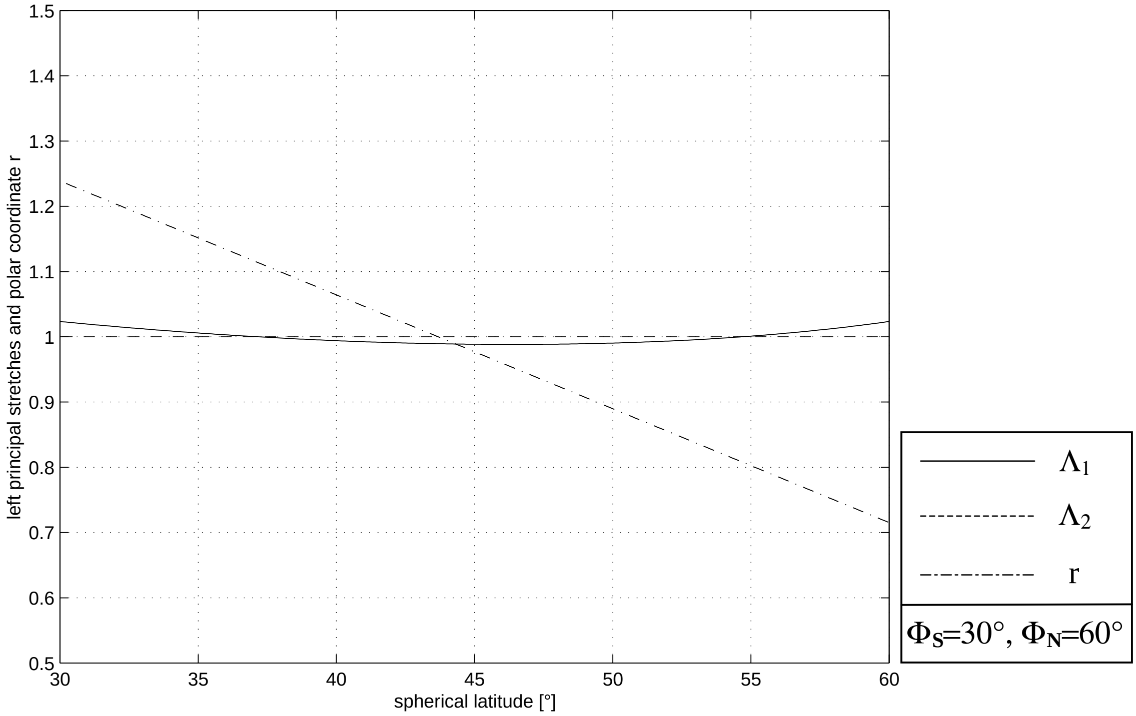
$$\lambda_2 = 1$$

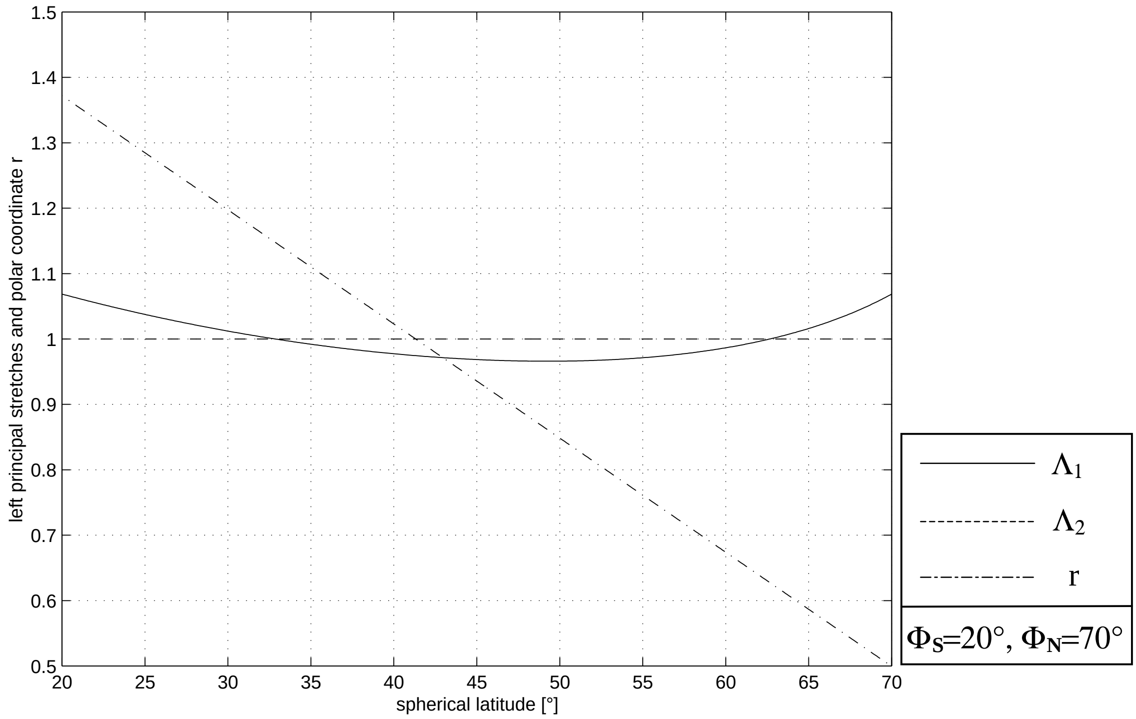
right eigenvectors

$$\boldsymbol{u_1} = \frac{1}{r}\boldsymbol{g_1} \qquad\qquad \boldsymbol{u_2} = \boldsymbol{g_2}$$

LOW-ERROR EQUIDISTANT CONIC PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF TWO STANDARD PARALLELS

left principal stretches and polar coordinate r as function of the spherical latitude Φ





LOW-ERROR EQUIDISTANT CONIC PROJECTION

EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF TWO STANDARD PARALLELS

minimum polar coordinate r_{min}

$$r_{\min} = r(\Phi = \Phi_N) = R\left(\frac{\Phi_N - \Phi_S}{2} \cot(\frac{\Phi_N - \Phi_S}{2}) \cot(\frac{\Phi_N + \Phi_S}{2}) + \frac{\Phi_S - \Phi_N}{2} \right)$$

maximum polar coordinate r_{max}

$$r_{\max} = r(\Phi = \Phi_S) = R\left(\frac{\Phi_N - \Phi_S}{2} \cot(\frac{\Phi_N - \Phi_S}{2}) \cot(\frac{\Phi_N + \Phi_S}{2}) + \frac{\Phi_N - \Phi_S}{2} \right)$$

angle of intersection of coordinate lines, left versus right

$A = 90°$ $\alpha = 90°$

left angular shear

$\delta = 0°$

3-2. KONFORME KEGELABBILDUNGEN DER KUGEL

In diesem Abschnitt soll zunächst ein Überblick über die behandelten speziellen Kegelabbildungen hinsichtlich ihrer Eigenschaften, Einsatzgebiete und Entstehungsgeschichte gegeben werden, bevor dann im Anschluß die einzelnen Abbildungen ausführlich vorgestellt werden.

Die nachfolgend beschriebenen Eigenschaften der einzelnen Abbildungen gelten wiederum nur für den Fall einer normalständigen Kegelabbildung, die als Hauptpunkt den Nord- oder Südpol der Kugel besitzt. Für die zu jeder Abbildung gehörenden Diagramme und Weltkarten wird als Hauptpunkt der Nordpol gewählt.

An dieser Stelle werden sämtliche Einsatzgebiete der behandelten Abbildungen aufgeführt, unabhängig davon, ob als Urbild die Kugel oder das Rotationsellipsoid zugrunde liegt.

Bei den hier behandelten speziellen Kegelabbildungen der Kugel handelt es sich um die folgenden konformen Abbildungen:

KONFORME KEGELABBILDUNG, ÄQUIDISTANT AUF DEN BEIDEN STANDARDPARALLELKREISEN Φ_1 UND Φ_2	
Andere Bezeichnung	→ **LAMBERT konforme Kegelabbildung** → Orthomorphe Kegelabbildung (conical orthomorphic)
Eigenschaften	Sämtliche Parallelkreise, mit Ausnahme der Pole, werden als Bogenstücke konzentrischer Kreise abgebildet. Die Abstände benachbarter Parallelkreise werden umso größer, je weiter man sich von den beiden Standardparallelen nach Norden bzw. nach Süden entfernt. Die Meridiane werden als Geraden abgebildet und schneiden die Parallelkreise im rechten Winkel. Der Hauptpunkt (als einer der beiden Pole) wird als Punkt abgebildet, der andere Pol wird im Unendlichen abgebildet. Die beiden gewählten Standardparallelkreise werden äquidistant abgebildet, besitzen also den Maßstab 1. Entlang aller anderen Parallelkreise ist der Maßstab zwar verschieden von 1, aber konstant. Die Abbildung ist mit Ausnahme der beiden Pole überall konform.
Einsatzgebiete	→ Weltluftfahrtkarte 1 : 1 000 000 → Luftfahrtkarten 1 : 500 000 → Übersichtskarten aller Staaten der USA → Karten der Aläuten-Inselkette → Mondkarten → Karten von Merkur, Mars sowie von einigen Jupitermonden
Ursprung	Entwickelt von Johann Heinrich Lambert (1728-1777) im Jahre 1772. Er stellte die Abbildungsgleichungen sowohl für die Kugel als auch für das Rotationsellipsoid vor [29].

KONFORME KEGELABBILDUNG, ÄQUIDISTANT AUF DEM STANDARDPARALLELKREIS Φ_0

Die Abbildungsgleichungen für den Entwurf mit einem Standardparallelkreis gehen aus den Gleichungen für zwei Standardparallelkreise hervor, indem man z.B. den Grenzübergang $\Phi_1 \rightarrow \Phi_2$ durchführt.

Andere Bezeichnung	→ **LAMBERT konforme Kegelabbildung** → Orthomorphe Kegelabbildung (conical orthomorphic)
Eigenschaften	Sämtliche Parallelkreise, mit Ausnahme der Pole, werden als Bogenstücke konzentrischer Kreise abgebildet. Die Abstände benachbarter Parallelkreise werden umso größer, je weiter man sich vom Standardparallelkreis nach Norden bzw. nach Süden entfernt. Die Meridiane werden als Geraden abgebildet und schneiden die Parallelkreise im rechten Winkel. Der Hauptpunkt (als einer der beiden Pole) wird als Punkt abgebildet, der andere Pol wird im Unendlichen abgebildet. Der gewählte Standardparallelkreis wird äquidistant abgebildet, besitzt also den Maßstab 1. Entlang aller anderen Parallelkreise ist der Maßstab zwar verschieden von 1, aber konstant. Die Abbildung ist mit Ausnahme der beiden Pole überall konform.
Einsatzgebiete	---
Ursprung	Entwickelt von Johann Heinrich Lambert (1728-1777) im Jahre 1772 [29].

CONFORMAL CONIC PROJECTION

EQUIDISTANT MAPPING OF TWO STANDARD PARALLELS Φ_1,Φ_2

LAMBERT CONFORMAL CONIC PROJECTION

cone constant

$$n = \frac{\ln\left(\dfrac{\cos\Phi_1}{\cos\Phi_2}\right)}{\ln\left(\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\Phi_1}{2}\right)\right) - \ln\left(\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\Phi_2}{2}\right)\right)}$$

direct equations, polar coordinates

$$\alpha = n\Lambda$$

$$r = R\frac{\cos\Phi_1}{n}\left(\frac{\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\Phi}{2}\right)}{\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\Phi_1}{2}\right)}\right)^n$$

direct equations, cartesian coordinates

$$x = R\frac{\cos\Phi_1}{n}\left(\frac{\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\Phi}{2}\right)}{\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\Phi_1}{2}\right)}\right)^n \cos(n\Lambda)$$

$$y = R\frac{\cos\Phi_1}{n}\left(\frac{\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\Phi}{2}\right)}{\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\Phi_1}{2}\right)}\right)^n \sin(n\Lambda)$$

left Jacobi matrix

$$\boldsymbol{J}_l = \begin{pmatrix} \alpha_\Lambda & \alpha_\Phi \\ r_\Lambda & r_\Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & -\dfrac{R\cos\Phi_1}{\cos\Phi}\left(\dfrac{\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\Phi}{2}\right)}{\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\Phi_1}{2}\right)}\right)^n \end{pmatrix}$$

CONFORMAL CONIC PROJECTION

EQUIDISTANT MAPPING OF TWO STANDARD PARALLELS Φ_1,Φ_2

left Cauchy-Green deformation tensor

$$[c_{KL}] = \begin{pmatrix} R^2\cos^2\Phi_1\left(\dfrac{\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\Phi}{2})}{\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\Phi_1}{2})}\right)^{2n} & 0 \\ 0 & \dfrac{R^2\cos^2\Phi_1}{\cos^2\Phi}\left(\dfrac{\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\Phi}{2})}{\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\Phi_1}{2})}\right)^{2n} \end{pmatrix}$$

left distance function

$$ds^2 = R^2\cos^2\Phi_1\left(\frac{\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\Phi}{2})}{\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\Phi_1}{2})}\right)^{2n} d\Lambda^2 + \frac{R^2\cos^2\Phi_1}{\cos^2\Phi}\left(\frac{\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\Phi}{2})}{\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\Phi_1}{2})}\right)^{2n} d\Phi^2$$

left principal stretches

$$\Lambda_1 = \frac{\cos\Phi_1}{\cos\Phi}\left(\frac{\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\Phi}{2})}{\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\Phi_1}{2})}\right)^{n}$$

$$\Lambda_2 = \frac{\cos\Phi_1}{\cos\Phi}\left(\frac{\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\Phi}{2})}{\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\Phi_1}{2})}\right)^{n}$$

left eigenvectors

$$\boldsymbol{U_1} = \frac{1}{R\cos\Phi}\boldsymbol{G_1} \qquad \boldsymbol{U_2} = \frac{1}{R}\boldsymbol{G_2}$$

maximum angular deformation

$$\Omega = 0$$

CONFORMAL CONIC PROJECTION

EQUIDISTANT MAPPING OF TWO STANDARD PARALLELS Φ_1,Φ_2

cone constant

$$n = \frac{\ln\left(\dfrac{\cos\Phi_1}{\cos\Phi_2}\right)}{\ln\left(\tan(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\Phi_1}{2})\right)-\ln\left(\tan(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\Phi_2}{2})\right)}$$

inverse equations

$$\Lambda = \frac{\alpha}{n}$$

$$\Phi = \frac{\pi}{2} - 2\arctan\left[\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\Phi_1}{2})\left(\frac{rn}{R\cos\Phi_1}\right)^{1/n}\right]$$

right Jacobi matrix

$$\boldsymbol{J}_r = \begin{pmatrix} \Lambda_\alpha & \Lambda_r \\ \Phi_\alpha & \Phi_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{n} & 0 \\ 0 & -\dfrac{2\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\Phi_1}{2})(Rrn\cos\Phi_1)^{1/n}}{rn\left((R\cos\Phi_1)^{2/n}+\tan^2(\frac{\pi}{4}-\frac{\Phi_1}{2})(rn)^{2/n}\right)} \end{pmatrix}$$

CONFORMAL CONIC PROJECTION
EQUIDISTANT MAPPING OF TWO STANDARD PARALLELS Φ_1, Φ_2

right Cauchy-Green deformation tensor

$$[C_{kl}] = \begin{pmatrix} \dfrac{4R^2 \tan^2(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi_1}{2})(Rrn\cos\Phi_1)^{2/n}}{n^2\left((R\cos\Phi_1)^{2/n} + \tan^2(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi_1}{2})(rn)^{2/n}\right)^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{4R^2 \tan^2(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi_1}{2})(Rrn\cos\Phi_1)^{2/n}}{r^2 n^2\left((R\cos\Phi_1)^{2/n} + \tan^2(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi_1}{2})(rn)^{2/n}\right)^2} \end{pmatrix}$$

right distance function

$$dS^2 = \frac{4R^2 \tan^2(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi_1}{2})(Rrn\cos\Phi_1)^{2/n}}{n^2\left((R\cos\Phi_1)^{2/n} + \tan^2(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi_1}{2})(rn)^{2/n}\right)^2} d\alpha^2 + \frac{4R^2 \tan^2(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi_1}{2})(Rrn\cos\Phi_1)^{2/n}}{r^2 n^2\left((R\cos\Phi_1)^{2/n} + \tan^2(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi_1}{2})(rn)^{2/n}\right)^2} dr^2$$

right principal stretches

$$\lambda_1 = \frac{2R\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi_1}{2})(Rrn\cos\Phi_1)^{1/n}}{rn\left((R\cos\Phi_1)^{2/n} + \tan^2(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi_1}{2})(rn)^{2/n}\right)}$$

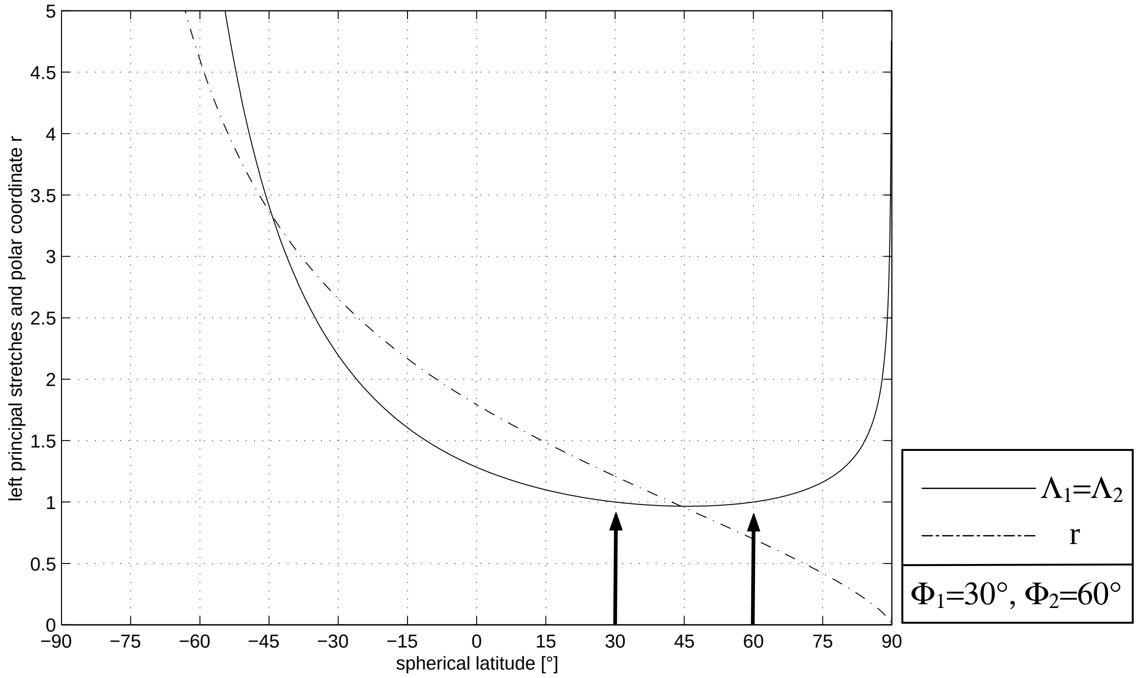
$$\lambda_2 = \frac{2R\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi_1}{2})(Rrn\cos\Phi_1)^{1/n}}{rn\left((R\cos\Phi_1)^{2/n} + \tan^2(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi_1}{2})(rn)^{2/n}\right)}$$

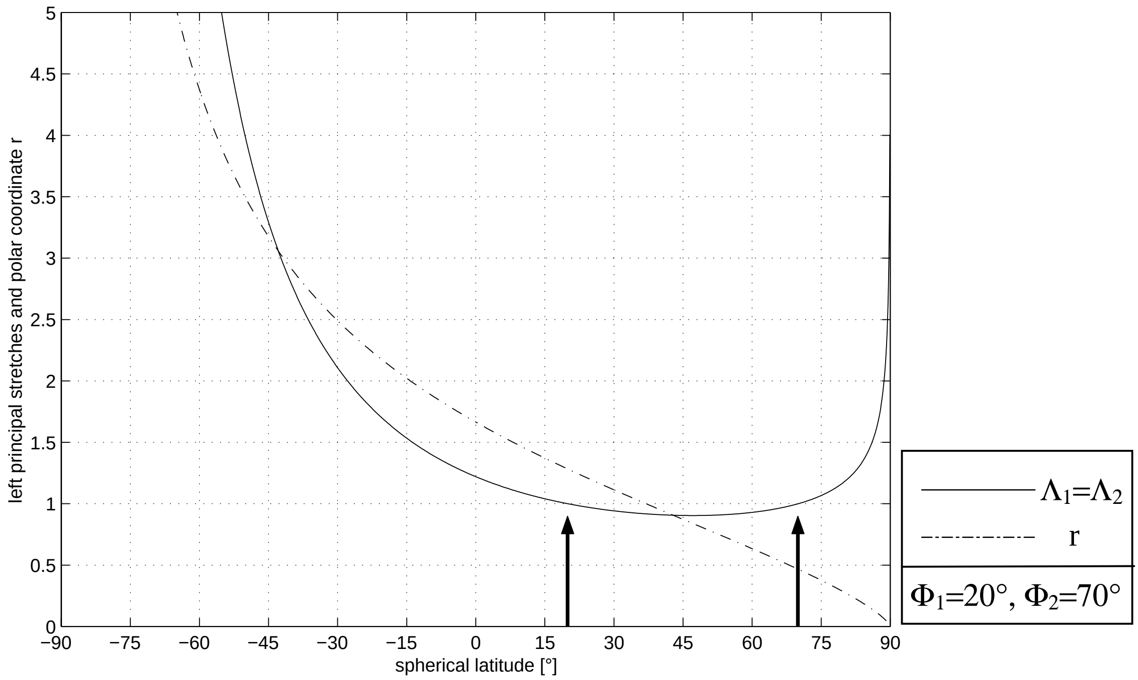
right eigenvectors

$$\boldsymbol{u_1} = \frac{1}{r}\boldsymbol{g_1} \qquad \boldsymbol{u_2} = \boldsymbol{g_2}$$

CONFORMAL CONIC PROJECTION
EQUIDISTANT MAPPING OF TWO STANDARD PARALLELS Φ_1,Φ_2

left principal stretches and polar coordinate r as function of the spherical latitude Φ





CONFORMAL CONIC PROJECTION

EQUIDISTANT MAPPING OF TWO STANDARD PARALLELS Φ_1,Φ_2

minimum polar coordinate r_{min}

$$r_{\min} = r(\Phi = \frac{\pi}{2}) = 0$$

maximum polar coordinate r_{max}

$$r_{\max} = r(\Phi = -\frac{\pi}{2}) = \infty$$

angle of intersection of coordinate lines, left versus right

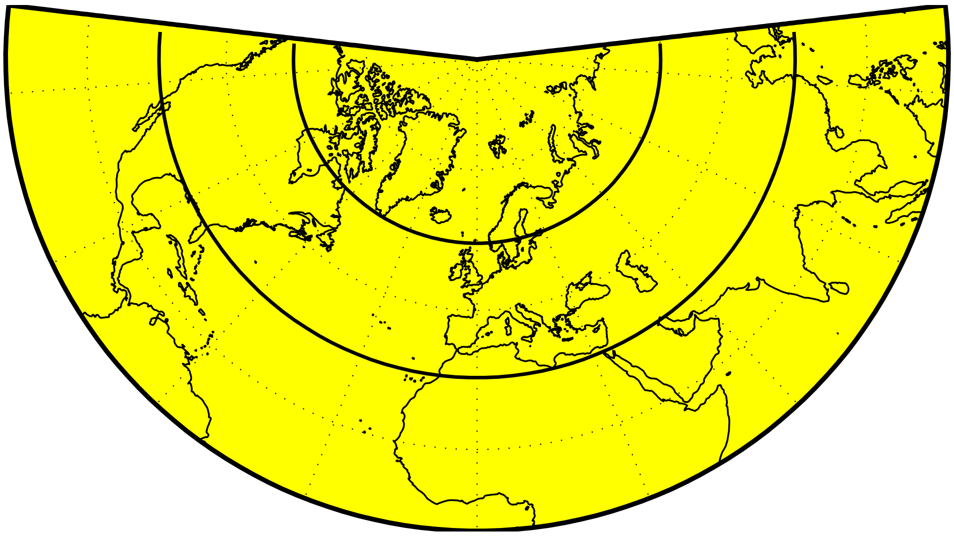
$A = 90°$ $\alpha = 90°$

left angular shear

$\delta = 0°$

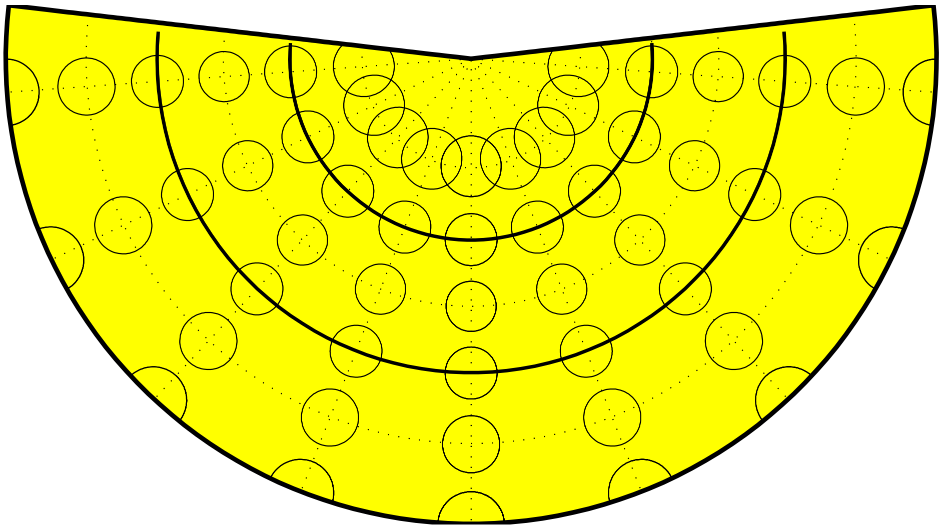
CONFORMAL CONIC PROJECTION

EQUIDISTANT MAPPING OF TWO STANDARD PARALLELS Φ_1,Φ_2



Lambert conformal conic projection: world map and left Tissot indicatrices

(30° x 15° - graticule, standard parallels Φ_1=30°, Φ_2=60°)



CONFORMAL CONIC PROJECTION

EQUIDISTANT MAPPING OF THE STANDARD PARALLEL Φ_0

LAMBERT CONFORMAL CONIC PROJECTION

cone constant

$$n = \sin\Phi_0$$

direct equations, polar coordinates

$$\alpha = n\Lambda$$

$$r = R\cot\Delta_0 \left(\frac{\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi}{2})}{\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi_0}{2})} \right)^n$$

direct equations, cartesian coordinates

$$x = R\cot\Delta_0 \left(\frac{\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi}{2})}{\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi_0}{2})} \right)^n \cos(n\Lambda)$$

$$y = R\cot\Delta_0 \left(\frac{\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi}{2})}{\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi_0}{2})} \right)^n \sin(n\Lambda)$$

left Jacobi matrix

$$\boldsymbol{J}_l = \begin{pmatrix} \alpha_\Lambda & \alpha_\Phi \\ r_\Lambda & r_\Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & -\dfrac{Rn\cot\Phi_0}{\cos\Phi} \left(\dfrac{\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi}{2})}{\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi_0}{2})} \right)^n \end{pmatrix}$$

CONFORMAL CONIC PROJECTION

EQUIDISTANT MAPPING OF THE STANDARD PARALLEL Φ_0

left Cauchy-Green deformation tensor

$$[c_{KL}] = \begin{pmatrix} R^2 n^2 \cot^2 \Phi_0 \left(\dfrac{\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi}{2})}{\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi_0}{2})} \right)^{2n} & 0 \\ 0 & \dfrac{R^2 n^2 \cot^2 \Phi_0}{\cos^2 \Phi} \left(\dfrac{\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi}{2})}{\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi_0}{2})} \right)^{2n} \end{pmatrix}$$

left distance function

$$ds^2 = R^2 n^2 \cot^2 \Phi_0 \left(\frac{\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi}{2})}{\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi_0}{2})} \right)^{2n} d\Lambda^2 + \frac{R^2 n^2 \cot^2 \Phi_0}{\cos^2 \Phi} \left(\frac{\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi}{2})}{\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi_0}{2})} \right)^{2n} d\Phi^2$$

left principal stretches

$$\Lambda_1 = \frac{n \cot \Phi_0}{\cos \Phi} \left(\frac{\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi}{2})}{\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi_0}{2})} \right)^{n}$$

$$\Lambda_2 = \frac{n \cot \Phi_0}{\cos \Phi} \left(\frac{\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi}{2})}{\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi_0}{2})} \right)^{n}$$

left eigenvectors

$$\boldsymbol{U_1} = \frac{1}{R \cos \Phi} \boldsymbol{G_1} \qquad \boldsymbol{U_2} = \frac{1}{R} \boldsymbol{G_2}$$

maximum angular deformation

$$\Omega = 0$$

CONFORMAL CONIC PROJECTION

EQUIDISTANT MAPPING OF THE STANDARD PARALLEL Φ_0

cone constant

$$n = \sin\Phi_0$$

inverse equations

$$\Lambda = \frac{\alpha}{n}$$

$$\Phi = \frac{\pi}{2} - 2\arctan\left[\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi_0}{2}\right)\left(\frac{r}{R\cot\Phi_0}\right)^{\frac{1}{n}}\right]$$

right Jacobi matrix

$$\boldsymbol{J}_r = \begin{pmatrix} \Lambda_\alpha & \Lambda_r \\ \Phi_\alpha & \Phi_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{n} & 0 \\ 0 & -\dfrac{2\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi_0}{2}\right)(Rr\cot\Phi_0)^{1/n}}{nr\left((R\cot\Phi_0)^{2/n} + \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi_0}{2}\right)r^{2/n}\right)} \end{pmatrix}$$

CONFORMAL CONIC PROJECTION

EQUIDISTANT MAPPING OF THE STANDARD PARALLEL Φ_0

right Cauchy-Green deformation tensor

$$[C_{kl}] = \begin{pmatrix} \dfrac{4R^2 \tan^2(\frac{\pi}{4}-\frac{\Phi_0}{2})(Rr\cot\Phi_0)^{2/n}}{n^2\left((R\cot\Phi_0)^{2/n}+\tan^2(\frac{\pi}{4}-\frac{\Phi_0}{2})r^{2/n}\right)^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{4R^2 \tan^2(\frac{\pi}{4}-\frac{\Phi_0}{2})(Rr\cot\Phi_0)^{2/n}}{n^2 r^2\left((R\cot\Phi_0)^{2/n}+\tan^2(\frac{\pi}{4}-\frac{\Phi_0}{2})r^{2/n}\right)^2} \end{pmatrix}$$

right distance function

$$dS^2 = \frac{4R^2 \tan^2(\frac{\pi}{4}-\frac{\Phi_0}{2})(Rr\cot\Phi_0)^{2/n}}{n^2\left((R\cot\Phi_0)^{2/n}+\tan^2(\frac{\pi}{4}-\frac{\Phi_0}{2})r^{2/n}\right)^2}d\alpha^2 + \frac{4R^2 \tan^2(\frac{\pi}{4}-\frac{\Phi_0}{2})(Rr\cot\Phi_0)^{2/n}}{n^2 r^2\left((R\cot\Phi_0)^{2/n}+\tan^2(\frac{\pi}{4}-\frac{\Phi_0}{2})r^{2/n}\right)^2}dr^2$$

right principal stretches

$$\lambda_1 = \frac{2R\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\Phi_0}{2})(Rr\cot\Phi_0)^{1/n}}{nr\left((R\cot\Phi_0)^{2/n}+\tan^2(\frac{\pi}{4}-\frac{\Phi_0}{2})r^{2/n}\right)}$$

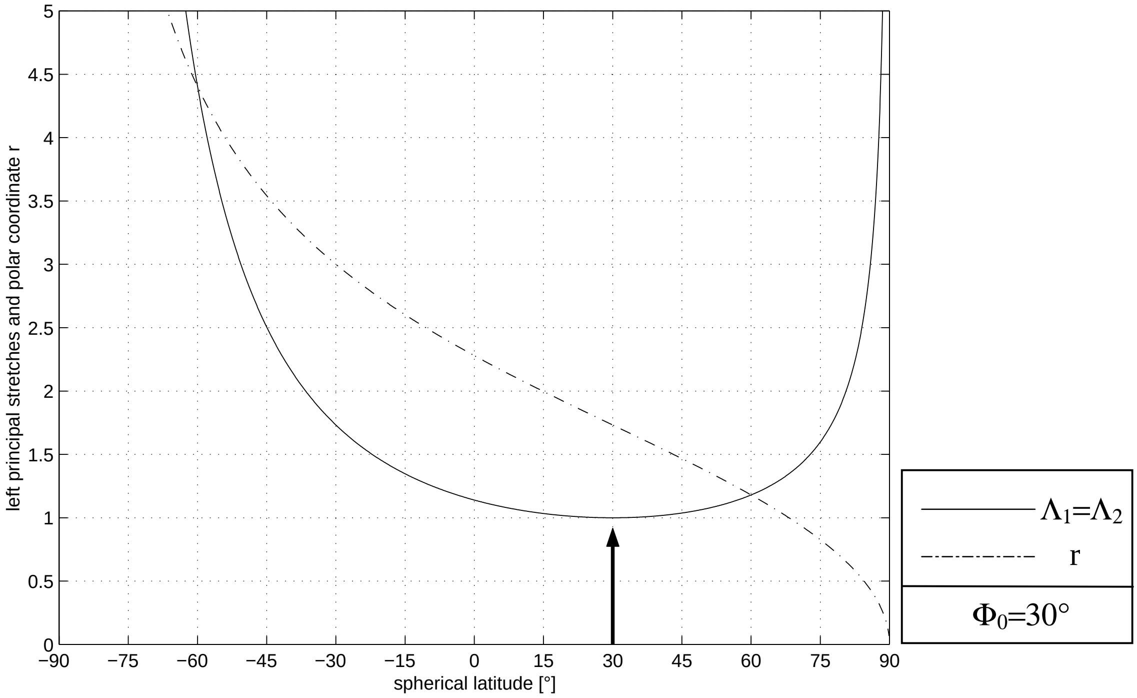
$$\lambda_2 = \frac{2R\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\Phi_0}{2})(Rr\cot\Phi_0)^{1/n}}{nr\left((R\cot\Phi_0)^{2/n}+\tan^2(\frac{\pi}{4}-\frac{\Phi_0}{2})r^{2/n}\right)}$$

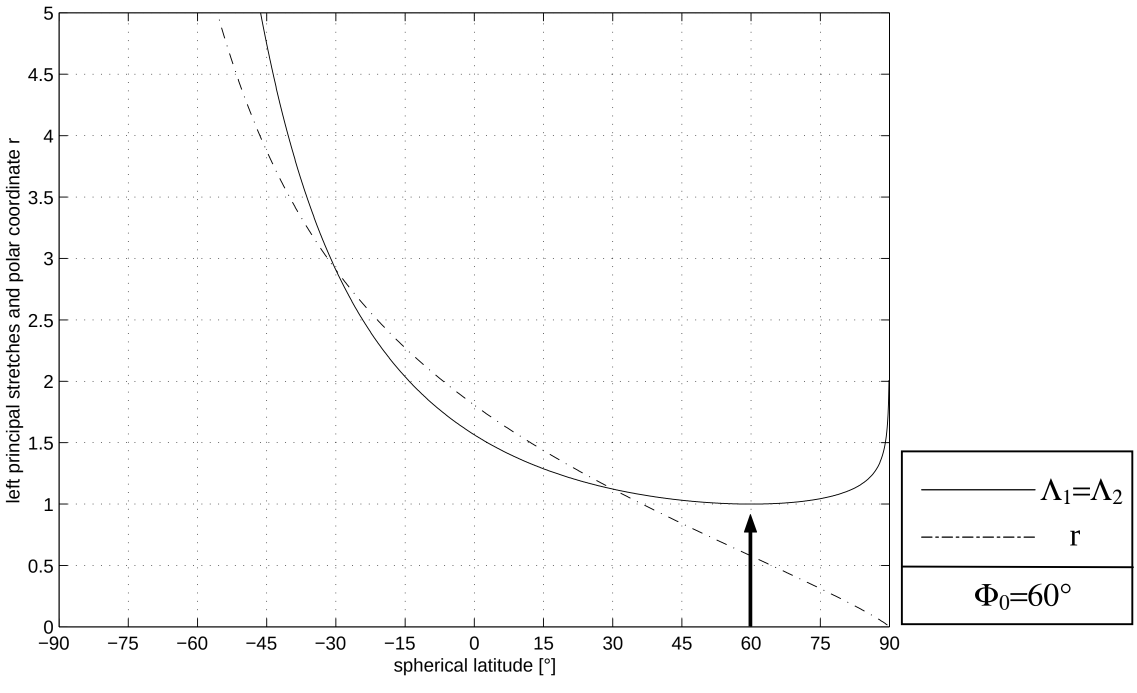
right eigenvectors

$$\boldsymbol{u_1} = \frac{1}{r}\boldsymbol{g_1} \qquad \boldsymbol{u_2} = \boldsymbol{g_2}$$

CONFORMAL CONIC PROJECTION
EQUIDISTANT MAPPING OF THE STANDARD PARALLEL Φ_0

left principal stretches and polar coordinate r as function of the spherical latitude Φ





CONFORMAL CONIC PROJECTION

EQUIDISTANT MAPPING OF THE STANDARD PARALLEL Φ_0

minimum polar coordinate r_{min}

$$r_{\min} = r(\Phi = \frac{\pi}{2}) = 0$$

maximum polar coordinate r_{max}

$$r_{\max} = r(\Phi = -\frac{\pi}{2}) = \infty$$

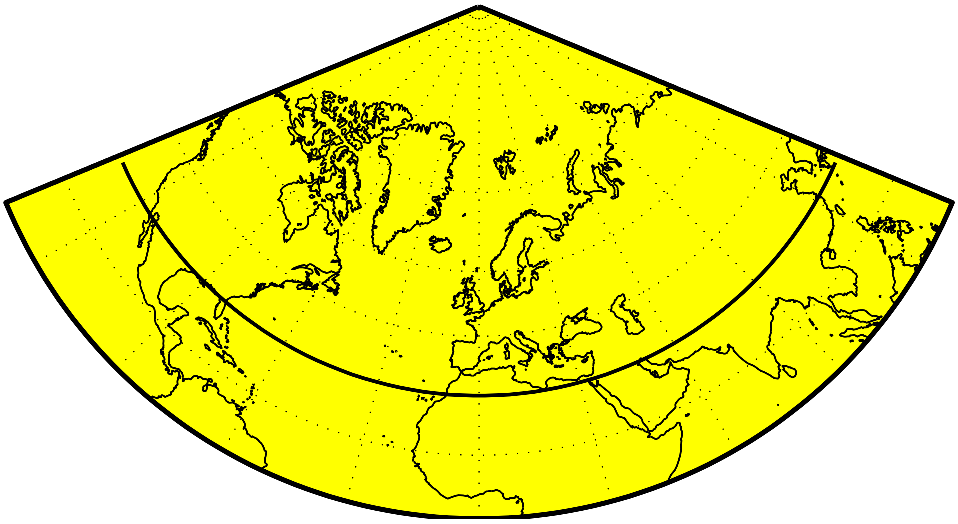
angle of intersection of coordinate lines, left versus right

$A = 90°$ $\quad\quad$ $\alpha = 90°$

left angular shear

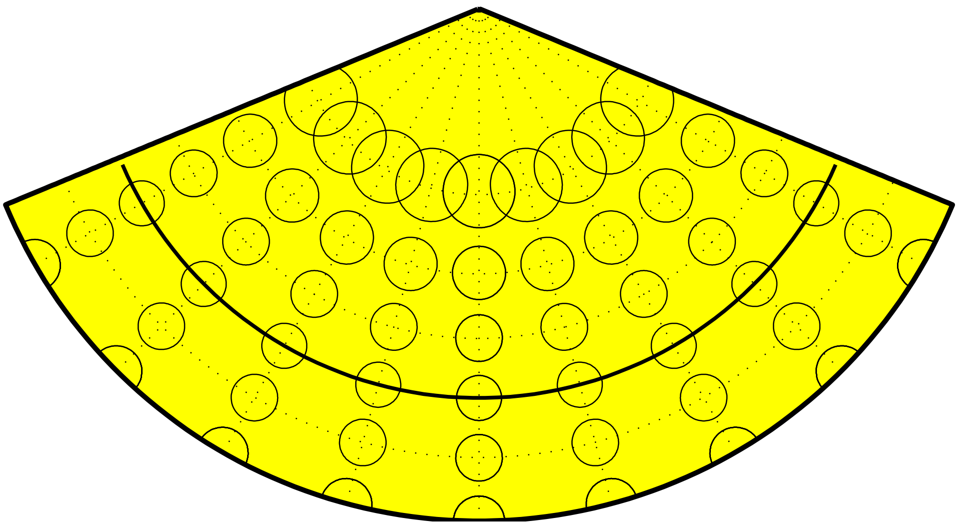
$\delta = 0°$

CONFORMAL CONIC PROJECTION
EQUIDISTANT MAPPING OF THE STANDARD PARALLEL Φ_0



Lambert conformal conic projection: world map and left Tissot indicatrices

(30° x 15° - graticule, standard parallel Φ_0=30°)



3-3. FLÄCHENTREUE KEGELABBILDUNGEN DER KUGEL

In diesem Abschnitt soll zunächst ein Überblick über die behandelten speziellen Kegelabbildungen hinsichtlich ihrer Eigenschaften, Einsatzgebiete und Entstehungsgeschichte gegeben werden, bevor dann im Anschluß die einzelnen Abbildungen ausführlich vorgestellt werden.

Die nachfolgend beschriebenen Eigenschaften der einzelnen Abbildungen gelten wiederum nur für den Fall einer normalständigen Kegelabbildung, die als Hauptpunkt den Nord- oder Südpol der Kugel besitzt. Für die zu jeder Abbildung gehörenden Diagramme und Weltkarten wird als Hauptpunkt der Nordpol gewählt.

Wiederum werden sämtliche Einsatzgebiete der behandelten Abbildungen aufgeführt, unabhängig davon, ob als Urbild die Kugel oder das Rotationsellipsoid zugrunde liegt.

Bei den hier behandelten speziellen Kegelabbildungen der Kugel handelt es sich um die folgenden flächentreuen Abbildungen:

FLÄCHENTREUE KEGELABBILDUNG, ÄQUIDISTANT UND KONFORM AUF DEN BEIDEN STANDARDPARALLELKREISEN Φ_1 UND Φ_2	
Andere Bezeichnung	**ALBERS flächentreue Kegelabbildung**
Eigenschaften	Sämtliche Parallelkreise, auch die beiden Pole, werden als Bogenstücke konzentrischer Kreise abgebildet. Die Abstände benachbarter Parallelkreise werden umso kleiner, je weiter man sich von den beiden Standardparallelen nach Norden bzw. nach Süden entfernt. Im Gebiet zwischen beiden sind diese Abstände am größten. Die Meridiane werden als Geraden abgebildet und schneiden die Parallelkreise im rechten Winkel. Die beiden gewählten Standardparallelkreise werden äquidistant abgebildet, besitzen also den Maßstab 1. Entlang aller anderen Parallelkreise ist der Maßstab zwar verschieden von 1, aber konstant. Der Maßstabsfaktor in einem beliebigen Meridianpunkt ist der Kehrwert des Maßstabsfaktors in Richtung des zugehörigen Parallelkreises. Beide Standardparallelen werden zudem konform abgebildet.
Einsatzgebiete	→ alle Einzelkarten des „National Atlas“ der USA (1970) → Karten der USA mit Maßstäben 1 : 2 500 000 oder kleiner → Tektonische Karte der USA → Geologische Karte der USA → Karten von Indien mit Maßstäben < 1 : 1 000 000 → Karten von Teilen Afrikas und Europas
Ursprung	Entwickelt von Heinrich Christian Albers (1773–1833) im Jahre 1805 für die Kugel. Diese Abbildung wurde erstmals 1817 für eine Karte Europas verwendet [2].

FLÄCHENTREUE KEGELABBILDUNG,
ÄQUIDISTANT UND KONFORM AUF DEM STANDARDPARALLELKREIS Φ_0

Die Abbildungsgleichungen für den Entwurf mit einem Standardparallelkreis gehen aus den Gleichungen für zwei Standardparallelkreise hervor, indem man $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_0$ setzt. Dieser Fall besitzt so gut wie keine praktische Bedeutung.

Andere Bezeichnung	**ALBERS flächentreue Kegelabbildung**
Eigenschaften	Sämtliche Parallelkreise, auch die beiden Pole, werden als Bogenstücke konzentrischer Kreise abgebildet. Die Abstände benachbarter Parallelkreise werden umso kleiner, je weiter man sich vom Standardparallelkreis nach Norden bzw. nach Süden entfernt. Die Meridiane werden als Geraden abgebildet und schneiden die Parallelkreise im rechten Winkel. Der gewählte Standardparallelkreis wird äquidistant abgebildet, besitzt also den Maßstab 1. Entlang aller anderen Parallelkreise ist der Maßstab zwar verschieden von 1, aber konstant. Der Maßstabsfaktor in einem beliebigen Meridianpunkt ist der Kehrwert des Maßstabsfaktors in Richtung des zugehörigen Parallelkreises. Der Standardparallelkreis wird zudem konform abgebildet.
Einsatzgebiete	---
Ursprung	Entwickelt von Heinrich Christian Albers (1773–1833) im Jahre 1805 für die Kugel [2].

FLÄCHENTREUE KEGELABBILDUNG,
PUNKTARTIGES BILD DES HAUPTPUNKTES,
ÄQUIDISTANT UND KONFORM AUF DEM STANDARDPARALLELKREIS Φ_1

Sonderfall der ALBERS flächentreuen Kegelabbildung mit 2 Standardparallelen, der dadurch entsteht, daß für eine der beiden Standardparallelen der Nordpol ($\Phi = 90°$) gewählt wird.

Andere Bezeichnung	**LAMBERT flächentreue Kegelabbildung**
Eigenschaften	Alle Parallelkreise, mit Ausnahme des Hauptpunktes, werden als Bogenstücke konzentrischer Kreise abgebildet. Die Abstände benachbarter Parallelkreise werden umso kleiner, je weiter man sich vom Nordpol entfernt. Die Meridiane werden als Geraden abgebildet und schneiden die Parallelkreise im rechten Winkel. Der Hauptpunkt wird als Punkt abgebildet. Der gewählte von Φ=90° verschiedene Standardparallelkreis wird äquidistant abgebildet, besitzt also den Maßstab 1. Entlang aller anderen Parallelkreise ist der Maßstab zwar verschieden von 1, aber konstant. Der Maßstabsfaktor in einem beliebigen Meridianpunkt ist der Kehrwert des Maßstabsfaktors in Richtung des zugehörigen Parallelkreises. Der von Φ=90° verschiedene Standardparallelkreis wird zudem konform abgebildet.
Einsatzgebiete	---
Ursprung	Vorgestellt von Johann Heinrich Lambert (1728-1777) im Jahre 1772 [29].

FLÄCHENTREUE LOW-ERROR-KEGELABBILDUNG, ÄQUIDISTANT UND KONFORM AUF ZWEI STANDARDPARALLELKREISEN	
Diese flächentreue Kegelabbildung besitzt im allgemeinen zwei Standardparallelen, die allerdings nicht vorgegeben werden, sondern aus der nördlichen und südlichen Kartenbegrenzung Φ_N und Φ_S berechnet werden können. Diese Abbildung weist die kleinste maximale Winkelverzerrung aller flächentreuen Kegelabbildungen auf. *Sinnvolle Werte für die Hauptstreckungen dieser Abbildung erhält man nur dann, wenn die beiden Kartenbegrenzungen nicht symmetrisch bezüglich des Äquators gewählt werden, da andernfalls die Projektionskonstante n und somit die Hauptstreckungen zu Null werden.*	
Andere Bezeichnung	**TISSOT-Abbildung**
Eigenschaften	Die Parallelkreise werden im allgemeinen als Bogestücke konzentrischer Kreise dargestellt. Wird als nördliche Kartenbegrenzung der Nordpol gewählt, so wird dieser punktförmig abgebildet, andernfalls als Kreisbogenstück. Die Meridiane werden als Geraden abgebildet und schneiden die Parallelkreise im rechten Winkel. Die beiden Standardparallelkreise werden äquidistant abgebildet, besitzen also den Maßstab 1. Entlang aller anderen Parallelkreise ist der Maßstab zwar verschieden von 1, aber konstant. Solange als nördliche Kartenbegrenzung nicht der Nordpol gewählt wird, besitzen die beiden Begrenzungsparallelkreise denselben Maßstab; dieser ist der Kehrwert des kleinsten in der Karte vorkommenden Maßstabs entlang eines Parallelkreises. Beide Standardparallelkreise werden dann zudem konform abgebildet, wenn als nördliche Kartenbegrenzung nicht der Nordpol gewählt wird. Die beiden **Standardparallelen** berechnen sich zu $\Phi_1 = \arcsin(n - \sqrt{n^2 - 2na + 1})$ $\Phi_2 = \arcsin(n + \sqrt{n^2 - 2na + 1})$ (Zur Definition von n und a siehe Seite 102)
Einsatzgebiete	---
Ursprung	Entwickelt von Nicolas Auguste Tissot (1824 – 1897) im Jahre 1881 [39]. Die Tatsache, daß diese Abbildung die kleinste maximale Winkelverzerrung aller flächentreuen Kegelabbildungen liefert, wurde allerdings erst später von Kavrayskiy festgestellt [28].

EQUAL-AREA CONIC PROJECTION

EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF TWO STANDARD PARALLELS Φ_1,Φ_2

ALBERS EQUAL-AREA CONIC PROJECTION

cone constant

$$n = \frac{1}{2}(\sin\Phi_1 + \sin\Phi_2)$$

direct equations, polar coordinates

$$\alpha = n\Lambda$$
$$r = \frac{R}{n}\sqrt{\cos^2\Phi_1 + 2n(\sin\Phi_1 - \sin\Phi)}$$

direct equations, cartesian coordinates

$$x = \frac{R}{n}\sqrt{\cos^2\Phi_1 + 2n(\sin\Phi_1 - \sin\Phi)}\ \cos(n\Lambda)$$
$$y = \frac{R}{n}\sqrt{\cos^2\Phi_1 + 2n(\sin\Phi_1 - \sin\Phi)}\ \sin(n\Lambda)$$

left Jacobi matrix

$$\boldsymbol{J}_l = \begin{pmatrix} \alpha_\Lambda & \alpha_\Phi \\ r_\Lambda & r_\Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & -\dfrac{R\cos\Phi}{\sqrt{\cos^2\Phi_1 + 2n(\sin\Phi_1 - \sin\Phi)}} \end{pmatrix}$$

left Cauchy-Green deformation tensor

$$[c_{KL}] = \begin{pmatrix} R^2(\cos^2\Phi_1 + 2n(\sin\Phi_1 - \sin\Phi)) & 0 \\ 0 & \dfrac{R^2\cos^2\Phi}{\cos^2\Phi_1 + 2n(\sin\Phi_1 - \sin\Phi)} \end{pmatrix}$$

left distance function

$$ds^2 = R^2(\cos^2\Phi_1 + 2n(\sin\Phi_1 - \sin\Phi))d\Lambda^2 + \frac{R^2\cos^2\Phi}{\cos^2\Phi_1 + 2n(\sin\Phi_1 - \sin\Phi)}d\Phi^2$$

EQUAL-AREA CONIC PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF TWO STANDARD PARALLELS Φ_1, Φ_2

left principal stretches

$$\Lambda_1 = \frac{\sqrt{\cos^2\Phi_1 + 2n(\sin\Phi_1 - \sin\Phi)}}{\cos\Phi}$$

$$\Lambda_2 = \frac{\cos\Phi}{\sqrt{\cos^2\Phi_1 + 2n(\sin\Phi_1 - \sin\Phi)}}$$

left eigenvectors

$$\boldsymbol{U_1} = \frac{1}{R\cos\Phi}\boldsymbol{G_1} \qquad \boldsymbol{U_2} = \frac{1}{R}\boldsymbol{G_2}$$

maximum angular deformation

$$\Omega = 2\arcsin\left|\frac{\cos^2\Phi_1 + 2n(\sin\Phi_1 - \sin\Phi) - \cos^2\Phi}{\cos^2\Phi_1 + 2n(\sin\Phi_1 - \sin\Phi) + \cos^2\Phi}\right|$$

EQUAL-AREA CONIC PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF TWO STANDARD PARALLELS Φ_1,Φ_2

cone constant

$$n = \frac{1}{2}(\sin\Phi_1 + \sin\Phi_2)$$

inverse equations

$$\Lambda = \frac{\alpha}{n}$$

$$\Phi = \frac{\pi}{2} - \arccos\left[\frac{R^2(\cos^2\Phi_1 + 2n\sin\Phi_1) - r^2n^2}{2R^2n}\right]$$

right Jacobi matrix

$$\boldsymbol{J}_r = \begin{pmatrix} \Lambda_\alpha & \Lambda_r \\ \Phi_\alpha & \Phi_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{n} & 0 \\ 0 & -\dfrac{2rn^2}{\sqrt{4R^4n^2 - \left(R^2(\cos^2\Phi_1 + 2n\sin\Phi_1) - r^2n^2\right)^2}} \end{pmatrix}$$

right Cauchy-Green deformation tensor

$$[C_{kl}] = \begin{pmatrix} \dfrac{4R^4n^2 - \left(R^2(\cos^2\Phi_1 + 2n\sin\Phi_1) - r^2n^2\right)^2}{4R^2n^4} & 0 \\ 0 & \dfrac{4R^2r^2n^4}{4R^4n^2 - \left(R^2(\cos^2\Phi_1 + 2n\sin\Phi_1) - r^2n^2\right)^2} \end{pmatrix}^2$$

right distance function

$$dS^2 = \frac{4R^4n^2 - \left(R^2(\cos^2\Phi_1 + 2n\sin\Phi_1) - r^2n^2\right)^2}{4R^2n^4}d\alpha^2 + \frac{4R^2r^2n^4}{4R^4n^2 - \left(R^2(\cos^2\Phi_1 + 2n\sin\Phi_1) - r^2n^2\right)^2}dr^2$$

EQUAL-AREA CONIC PROJECTION

EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF TWO STANDARD PARALLELS Φ_1,Φ_2

right principal stretches

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{4R^4n^2 - \left(R^2(\cos^2\Phi_1 + 2n\sin\Phi_1) - r^2n^2\right)^2}}{2Rrn^2}$$

$$\lambda_2 = \frac{2Rrn^2}{\sqrt{4R^4n^2 - \left(R^2(\cos^2\Phi_1 + 2n\sin\Phi_1) - r^2n^2\right)^2}}$$

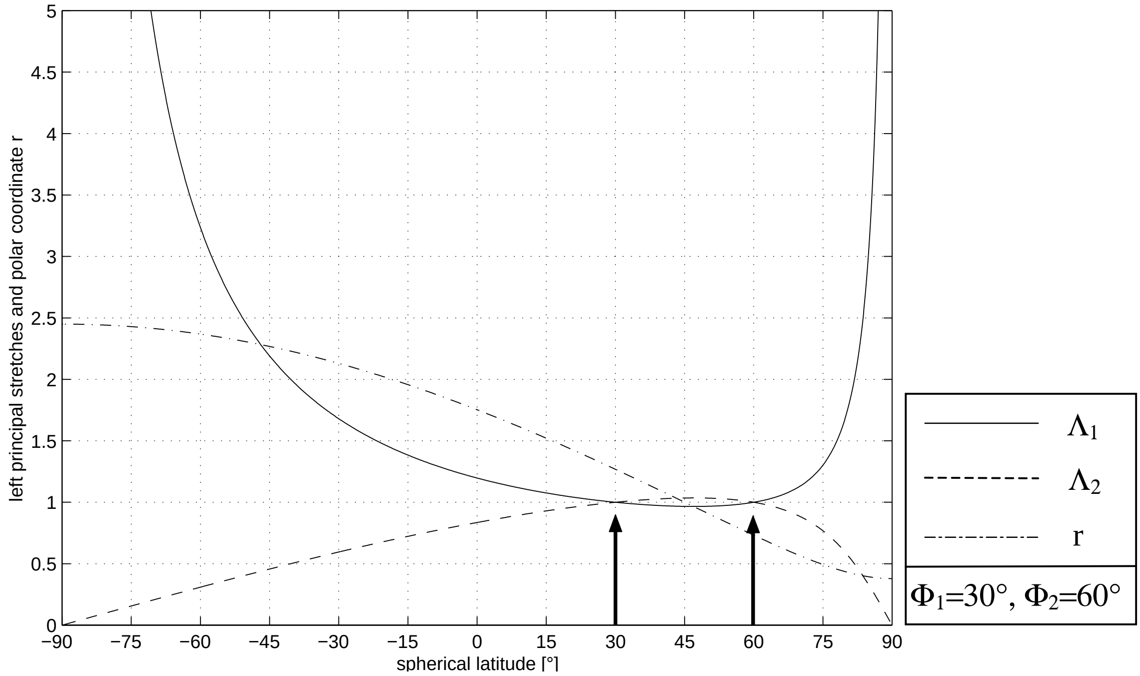
right eigenvectors

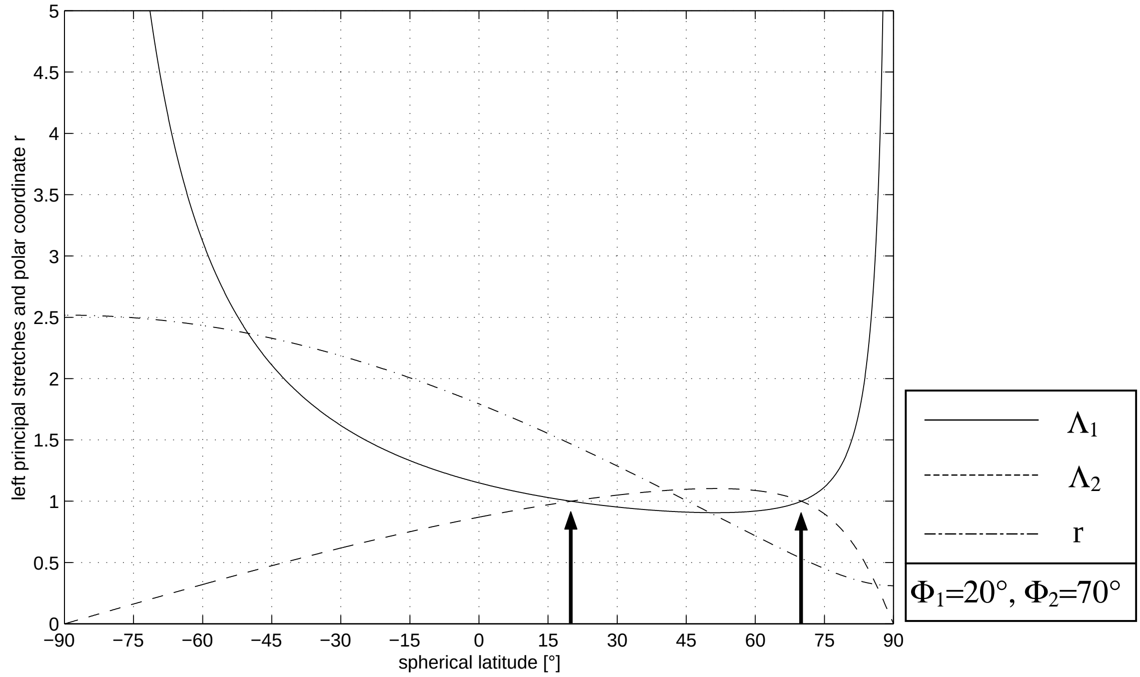
$$\boldsymbol{u_1} = \frac{1}{r}\boldsymbol{g_1} \qquad \boldsymbol{u_2} = \boldsymbol{g_2}$$

EQUAL-AREA CONIC PROJECTION

EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF TWO STANDARD PARALLELS Φ_1,Φ_2

left principal stretches and polar coordinate r as function of the spherical latitude Φ





EQUAL-AREA CONIC PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF TWO STANDARD PARALLELS Φ_1, Φ_2

minimum polar coordinate r_{min}

$$r_{\min} = r(\Phi = \frac{\pi}{2}) = \frac{2R\sqrt{1 - \sin\Phi_1(1 - \sin\Phi_2) + \sin\Phi_2}}{\sin\Phi_1 + \sin\Phi_2}$$

maximum polar coordinate r_{max}

$$r_{\max} = r(\Phi = -\frac{\pi}{2}) = \frac{2R\sqrt{1 + \sin\Phi_1(1 - \sin\Phi_2) + \sin\Phi_2}}{\sin\Phi_1 + \sin\Phi_2}$$

angle of intersection of coordinate lines, left versus right

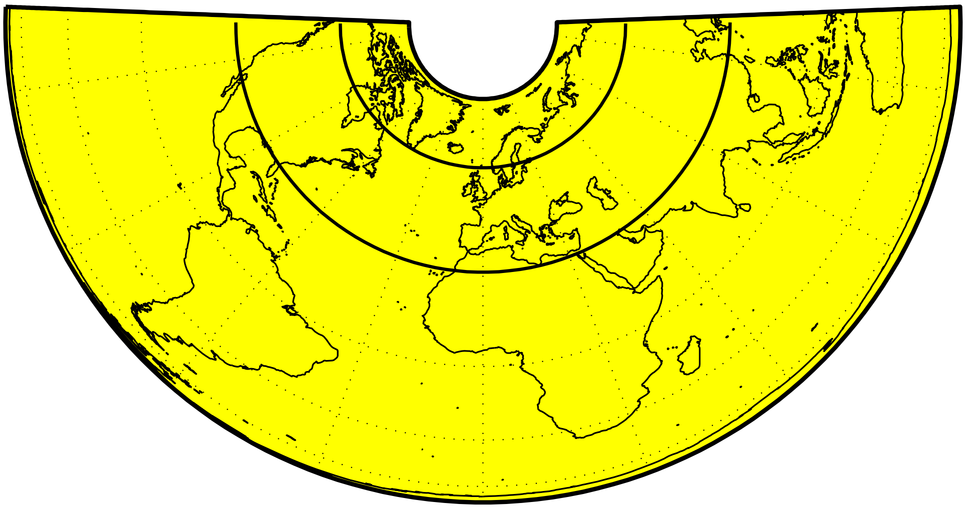
$A = 90°$ $\alpha = 90°$

left angular shear

$\delta = 0°$

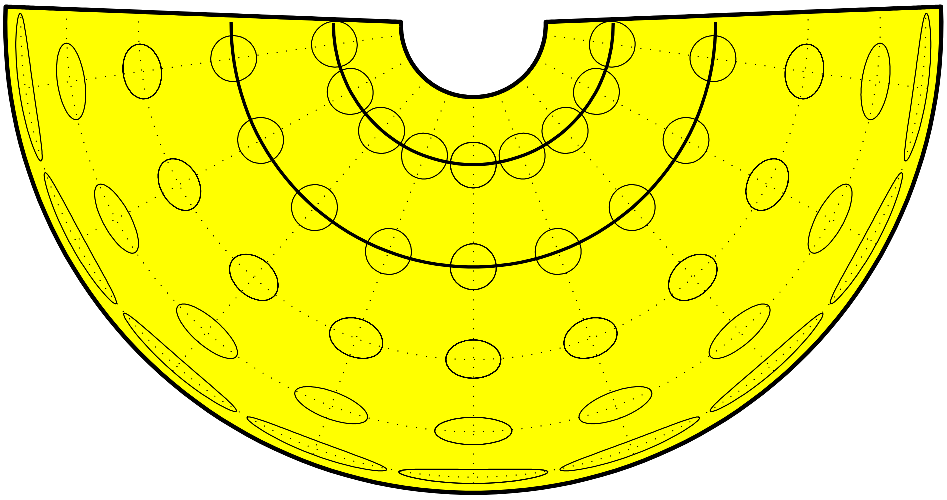
EQUAL-AREA CONIC PROJECTION

EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF TWO STANDARD PARALLELS Φ_1,Φ_2



Albers equal-area conic projection: world map and left Tissot indicatrices

(30° - graticule, standard parallels Φ_1=30°, Φ_2=60°)



EQUAL-AREA CONIC PROJECTION

EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF THE STANDARD PARALLEL Φ_0

ALBERS EQUAL-AREA CONIC PROJECTION

cone constant

$$n = \sin\Phi_0$$

direct equations, polar coordinates

$$\alpha = n\Lambda$$
$$r = \frac{R}{n}\sqrt{n^2 - 2n\sin\Phi + 1}$$

direct equations, cartesian coordinates

$$x = \frac{R}{n}\sqrt{n^2 - 2n\sin\Phi + 1}\,\cos(n\Lambda)$$
$$y = \frac{R}{n}\sqrt{n^2 - 2n\sin\Phi + 1}\,\sin(n\Lambda)$$

left Jacobi matrix

$$\boldsymbol{J}_l = \begin{pmatrix} \alpha_\Lambda & \alpha_\Phi \\ r_\Lambda & r_\Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & -\dfrac{R\cos\Phi}{\sqrt{n^2 - 2n\sin\Phi + 1}} \end{pmatrix}$$

left Cauchy-Green deformation tensor

$$[c_{KL}] = \begin{pmatrix} R^2(n^2 - 2n\sin\Phi + 1) & 0 \\ 0 & \dfrac{R^2\cos^2\Phi}{n^2 - 2n\sin\Phi + 1} \end{pmatrix}$$

left distance function

$$ds^2 = R^2(n^2 - 2n\sin\Phi + 1)d\Lambda^2 + \frac{R^2\cos^2\Phi}{n^2 - 2n\sin\Phi + 1}d\Phi^2$$

EQUAL-AREA CONIC PROJECTION

EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF THE STANDARD PARALLEL Φ_0

left principal stretches

$$\Lambda_1 = \frac{\sqrt{n^2 - 2n\sin\Phi + 1}}{\cos\Phi}$$

$$\Lambda_2 = \frac{\cos\Phi}{\sqrt{n^2 - 2n\sin\Phi + 1}}$$

left eigenvectors

$$\boldsymbol{U_1} = \frac{1}{R\cos\Phi}\boldsymbol{G_1} \qquad \boldsymbol{U_2} = \frac{1}{R}\boldsymbol{G_2}$$

maximum angular deformation

$$\Omega = 2\arcsin\left|\frac{n^2 - 2n\sin\Phi + 1 - \cos^2\Phi}{n^2 - 2n\sin\Phi + 1 + \cos^2\Phi}\right|$$

EQUAL-AREA CONIC PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF THE STANDARD PARALLEL Φ_0

cone constant

$$n = \sin \Phi_0$$

inverse equations

$$\Lambda = \frac{\alpha}{n}$$

$$\Phi = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{n^2 (R^2 - r^2) + R^2}{2R^2 n} \right)$$

right Jacobi matrix

$$\boldsymbol{J}_r = \begin{pmatrix} \Lambda_\alpha & \Lambda_r \\ \Phi_\alpha & \Phi_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & -\frac{2rn^2}{\sqrt{4R^4 n^2 - \left(n^2 (R^2 - r^2) + R^2\right)^2}} \end{pmatrix}$$

right Cauchy-Green deformation tensor

$$[C_{kl}] = \begin{pmatrix} \frac{4R^4 n^2 - \left(n^2 (R^2 - r^2) + R^2\right)^2}{4R^2 n^4} & 0 \\ 0 & \frac{4R^2 r^2 n^4}{4R^4 n^2 - \left(n^2 (R^2 - r^2) + R^2\right)^2} \end{pmatrix}$$

right distance function

$$dS^2 = \frac{4R^4 n^2 - \left(n^2 (R^2 - r^2) + R^2\right)^2}{4R^2 n^4} d\alpha^2 + \frac{4R^2 r^2 n^4}{4R^4 n^2 - \left(n^2 (R^2 - r^2) + R^2\right)^2} dr^2$$

EQUAL-AREA CONIC PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF THE STANDARD PARALLEL Φ_0

right principal stretches

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{4R^4n^2 - \left(n^2(R^2 - r^2) + R^2\right)^2}}{2Rrn^2}$$

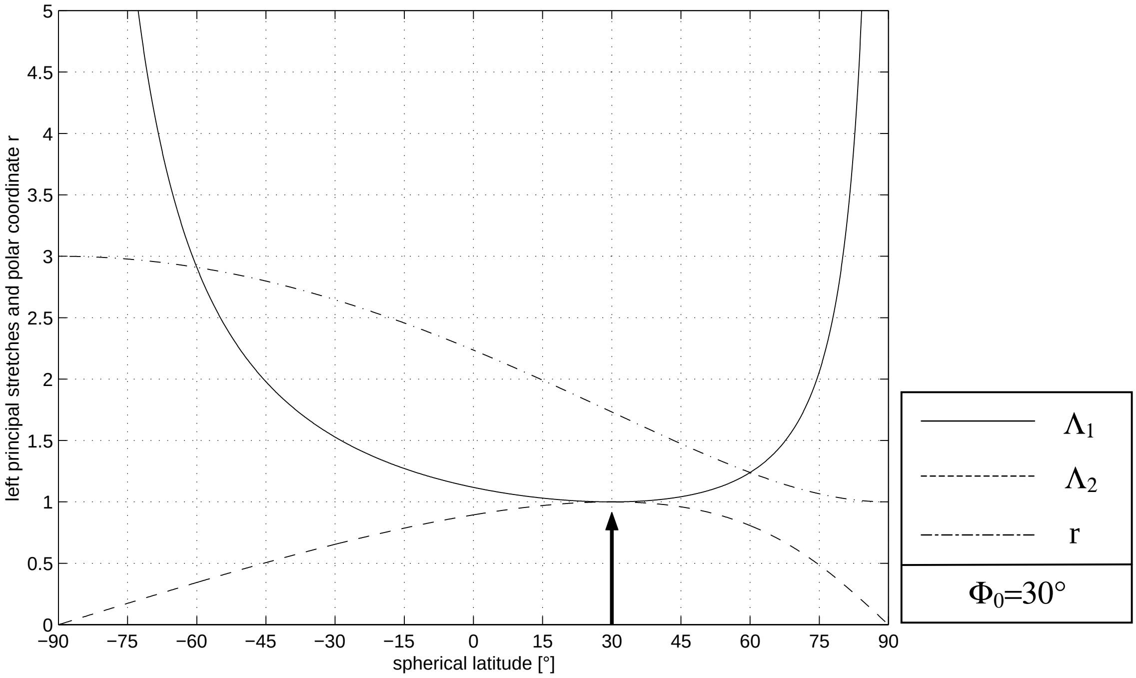
$$\lambda_2 = \frac{2Rrn^2}{\sqrt{4R^4n^2 - \left(n^2(R^2 - r^2) + R^2\right)^2}}$$

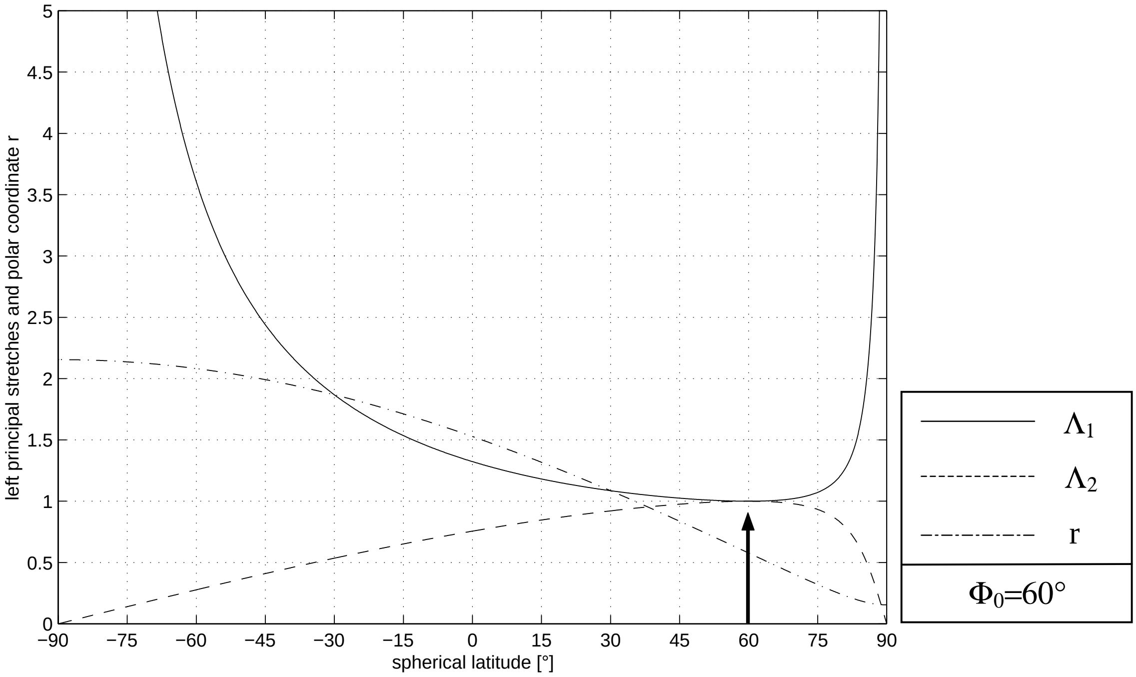
right eigenvectors

$$\boldsymbol{u_1} = \frac{1}{r}\boldsymbol{g_1} \qquad \boldsymbol{u_2} = \boldsymbol{g_2}$$

EQUAL-AREA CONIC PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF THE STANDARD PARALLEL Φ_0

left principal stretches and polar coordinate r as function of the spherical latitude Φ





EQUAL-AREA CONIC PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF THE STANDARD PARALLEL Φ_0

minimum polar coordinate r_{min}

$$r_{\min} = r(\Phi = \frac{\pi}{2}) = \frac{R\left|\sin\Phi_0 - 1\right|}{\sin\Phi_0}$$

maximum polar coordinate r_{max}

$$r_{\max} = r(\Phi = -\frac{\pi}{2}) = \frac{R(\sin\Phi_0 + 1)}{\sin\Phi_0}$$

angle of intersection of coordinate lines, left versus right

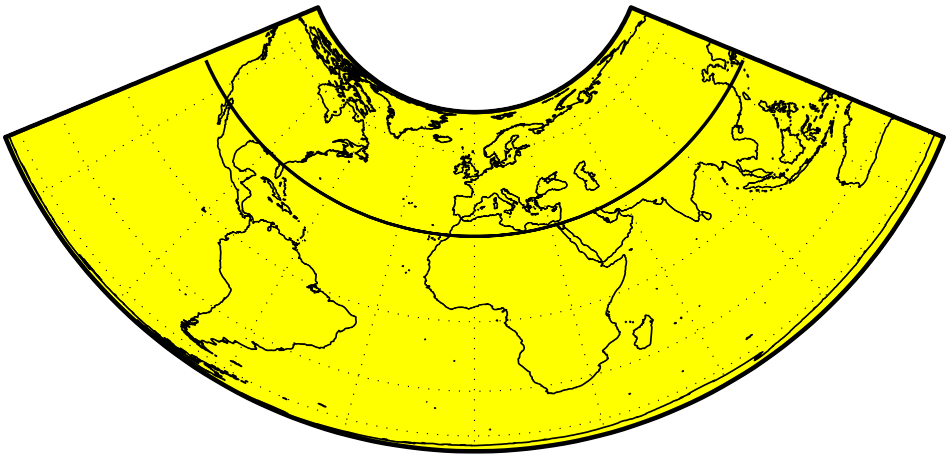
$A = 90°$ $\alpha = 90°$

left angular shear

$\delta = 0°$

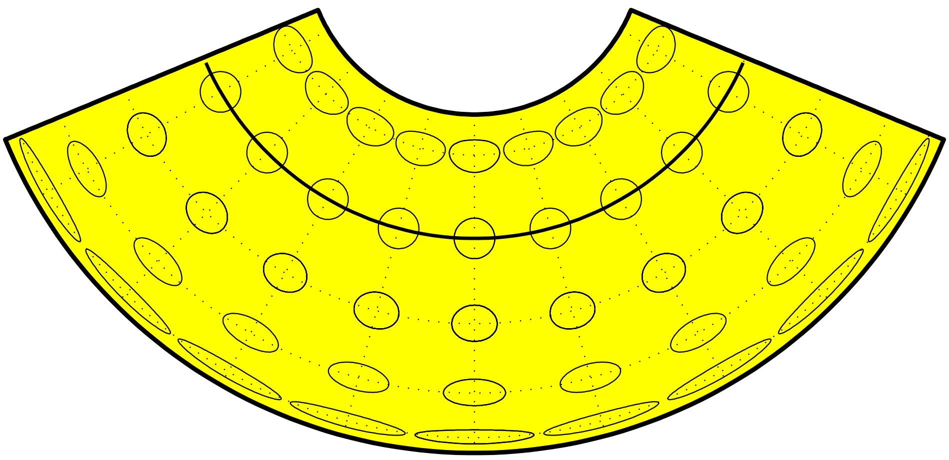
EQUAL-AREA CONIC PROJECTION

EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF THE STANDARD PARALLEL Φ_0



Albers equal-area conic projection: world map and left Tissot indicatrices

(30° - graticule, standard parallel Φ_0=30°)



EQUAL-AREA CONIC PROJECTION

EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF THE STANDARD PARALLEL Φ_1, POINTED POLE

LAMBERT EQUAL-AREA CONIC PROJECTION

cone constant

$$n = \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi_1}{2}\right)$$

direct equations, polar coordinates

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha &= n\Lambda \\ r &= \frac{2R}{\sqrt{n}}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi}{2}\right) \end{aligned}}$$

direct equations, cartesian coordinates

$$x = \frac{2R}{\sqrt{n}}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi}{2}\right)\cos(n\Lambda)$$

$$y = \frac{2R}{\sqrt{n}}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi}{2}\right)\sin(n\Lambda)$$

left Jacobi matrix

$$\boldsymbol{J}_l = \begin{pmatrix} \alpha_\Lambda & \alpha_\Phi \\ r_\Lambda & r_\Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & -\frac{R}{\sqrt{n}}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi}{2}\right) \end{pmatrix}$$

left Cauchy-Green deformation tensor

$$[c_{KL}] = \begin{pmatrix} 4R^2 n\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi}{2}\right) & 0 \\ 0 & \frac{R^2}{n}\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi}{2}\right) \end{pmatrix}$$

left distance function

$$ds^2 = 4R^2 n\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi}{2}\right)d\Lambda^2 + \frac{R^2}{n}\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi}{2}\right)d\Phi^2$$

EQUAL-AREA CONIC PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF THE STANDARD PARALLEL Φ_1, POINTED POLE

left principal stretches

$$\Lambda_1 = \frac{\sqrt{n}}{\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi}{2})}$$

$$\Lambda_2 = \frac{\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi}{2})}{\sqrt{n}}$$

left eigenvectors

$$\boldsymbol{U_1} = \frac{1}{R\cos\Phi}\boldsymbol{G_1} \qquad \boldsymbol{U_2} = \frac{1}{R}\boldsymbol{G_2}$$

maximum angular deformation

$$\Omega = 2\arcsin\left|\frac{n - \cos^2(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi}{2})}{n + \cos^2(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi}{2})}\right|$$

EQUAL-AREA CONIC PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF THE STANDARD PARALLEL Φ_1, POINTED POLE

cone constant

$$n = \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi_1}{2}\right)$$

inverse equations

$$\Lambda = \frac{\alpha}{n}$$

$$\Phi = \frac{\pi}{2} - 2\arcsin\left(\frac{r\sqrt{n}}{2R}\right)$$

right Jacobi matrix

$$\boldsymbol{J}_r = \begin{pmatrix} \Lambda_\alpha & \Lambda_r \\ \Phi_\alpha & \Phi_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & -\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{4R^2 - r^2 n}} \end{pmatrix}$$

right Cauchy-Green deformation tensor

$$[C_{kl}] = \begin{pmatrix} \frac{r^2(4R^2 - r^2 n)}{4R^2 n} & 0 \\ 0 & \frac{4R^2 n}{4R^2 - r^2 n} \end{pmatrix}$$

right distance function

$$dS^2 = \frac{r^2(4R^2 - r^2 n)}{4R^2 n} d\alpha^2 + \frac{4R^2 n}{4R^2 - r^2 n} dr^2$$

EQUAL-AREA CONIC PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF THE STANDARD PARALLEL Φ_1, POINTED POLE

right principal stretches

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{4R^2 - r^2 n}}{2R\sqrt{n}}$$

$$\lambda_2 = \frac{2R\sqrt{n}}{\sqrt{4R^2 - r^2 n}}$$

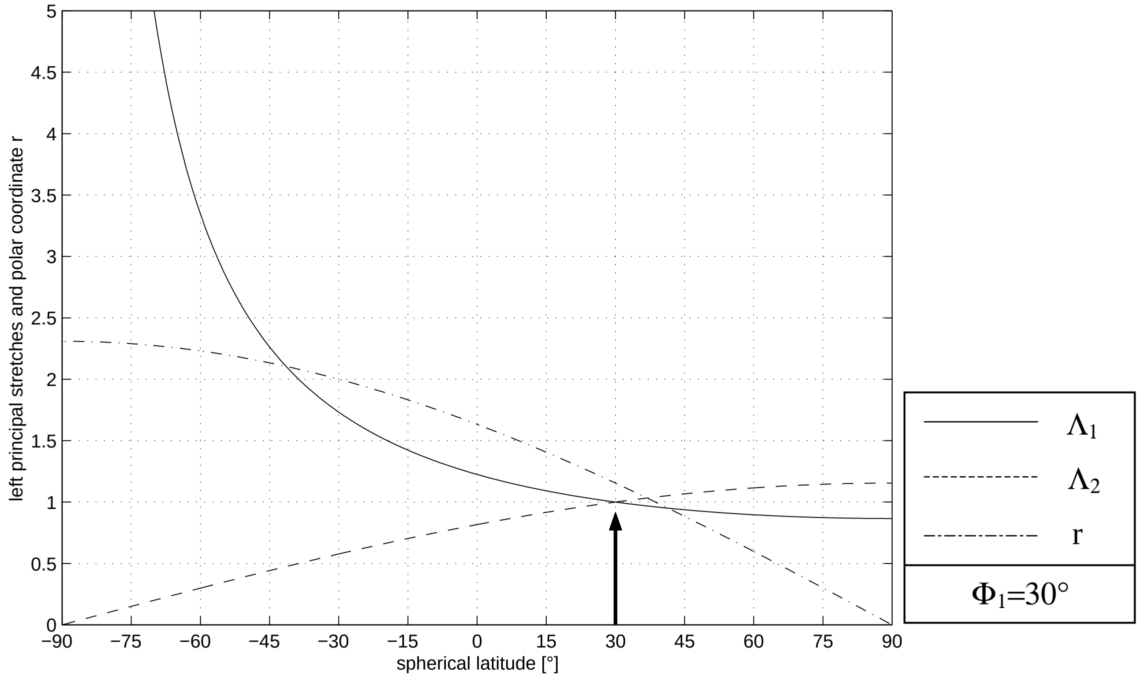
right eigenvectors

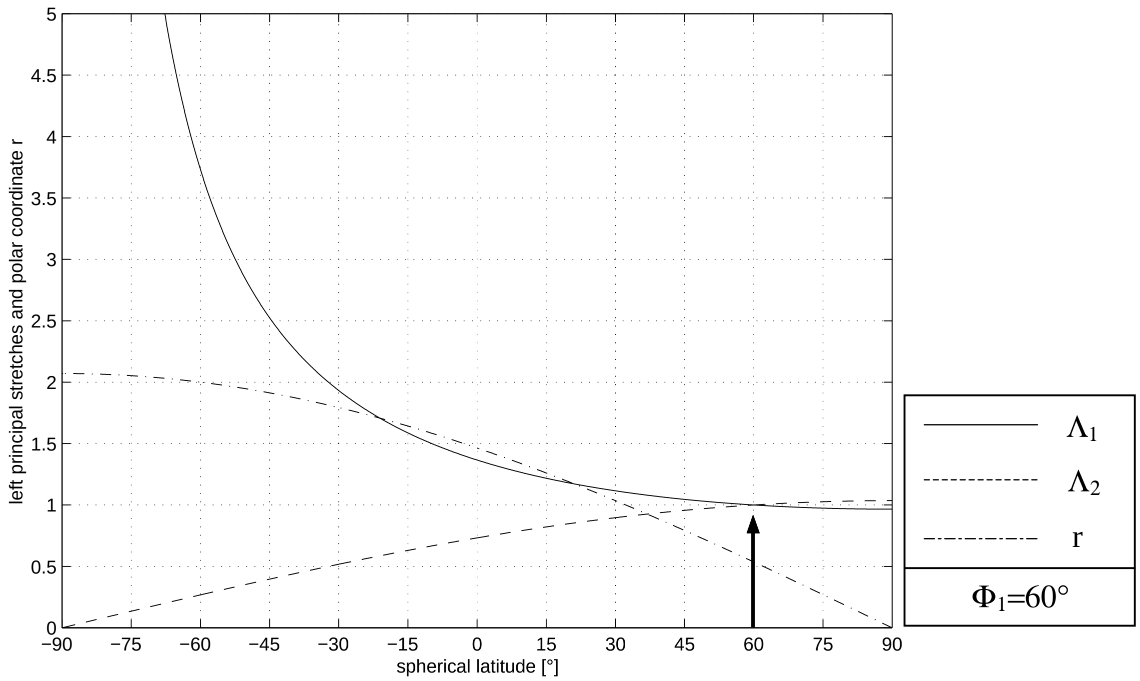
$$\boldsymbol{u_1} = \frac{1}{r}\boldsymbol{g_1} \qquad \boldsymbol{u_2} = \boldsymbol{g_2}$$

EQUAL-AREA CONIC PROJECTION

EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF THE STANDARD PARALLEL Φ_1, POINTED POLE

left principal stretches and polar coordinate r as function of the spherical latitude Φ





EQUAL-AREA CONIC PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF THE STANDARD PARALLEL Φ_1, POINTED POLE

minimum polar coordinate r_{min}

$$r_{\min} = r(\Phi = \frac{\pi}{2}) = 0$$

maximum polar coordinate r_{max}

$$r_{\max} = r(\Phi = -\frac{\pi}{2}) = \frac{2R}{\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi_1}{2})}$$

angle of intersection of coordinate lines, left versus right

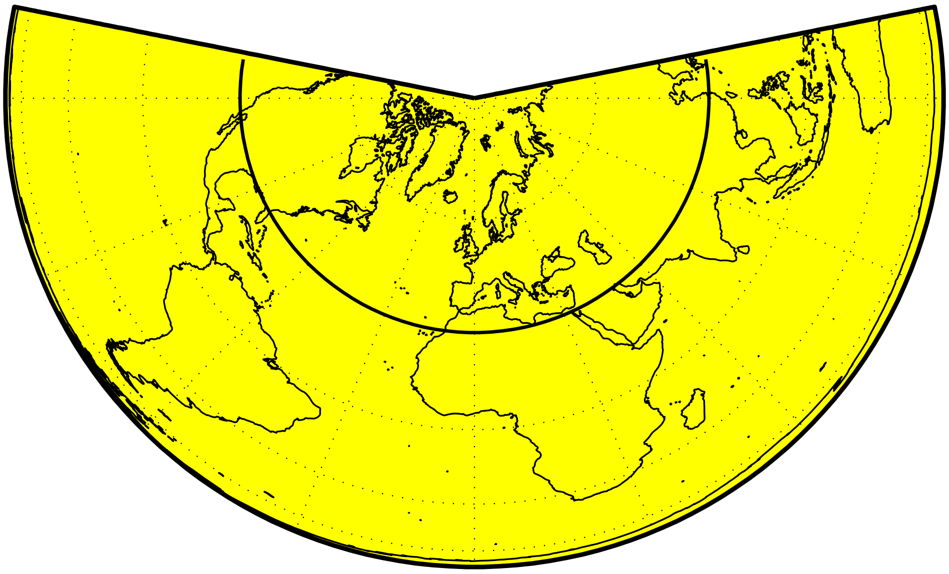
$A = 90°$ $\alpha = 90°$

left angular shear

$\delta = 0°$

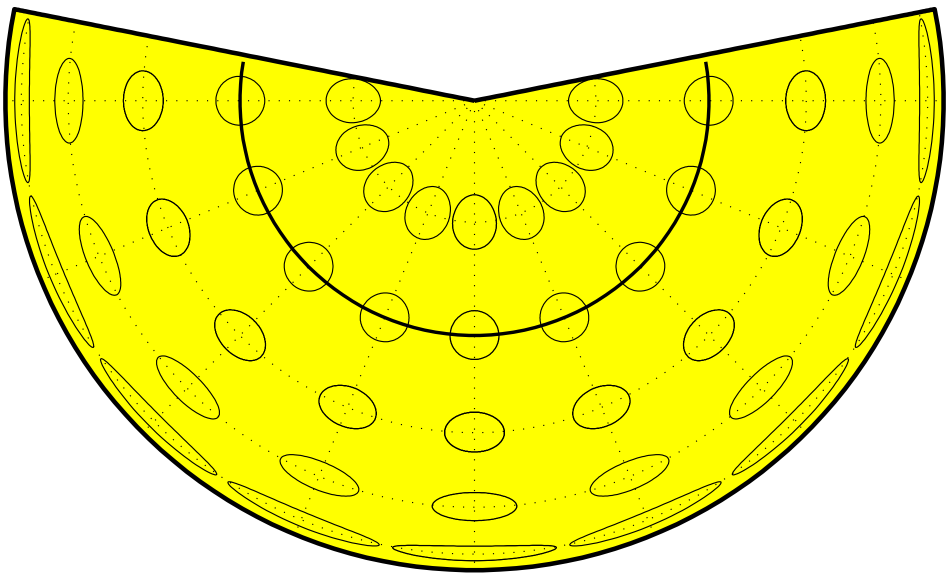
EQUAL-AREA CONIC PROJECTION

EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF THE STANDARD PARALLEL Φ_1, POINTED POLE



Lambert equal-area conic projection: world map and left Tissot indicatrices

(30° - graticule, standard parallel Φ_1=30°)



LOW-ERROR EQUAL-AREA CONIC PROJECTION

EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF TWO STANDARD PARALLELS

TISSOT'S PROJECTION

cone constant

$$n = \sin(\frac{\Phi_S + \Phi_N}{2})$$

direct equations, polar coordinates

$$\alpha = n\Lambda$$
$$r = R\sqrt{\frac{2}{n}(a - \sin\Phi)}$$

mit $a := \frac{1}{2}\left(\frac{n}{\cos(\frac{\Phi_N - \Phi_S}{2})} + \frac{\cos(\frac{\Phi_N - \Phi_S}{2})}{n} \right)$

direct equations, cartesian coordinates

$$x = R\sqrt{\frac{2}{n}(a - \sin\Phi)}\ \cos(n\Lambda)$$
$$y = R\sqrt{\frac{2}{n}(a - \sin\Phi)}\ \sin(n\Lambda)$$

left Jacobi matrix

$$\boldsymbol{J}_l = \begin{pmatrix} \alpha_\Lambda & \alpha_\Phi \\ r_\Lambda & r_\Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & -\dfrac{R\cos\Phi}{n\sqrt{\frac{2}{n}(a - \sin\Phi)}} \end{pmatrix}$$

LOW-ERROR EQUAL-AREA CONIC PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF TWO STANDARD PARALLELS

left Cauchy-Green deformation tensor

$$[c_{KL}] = \begin{pmatrix} 2R^2 n(a-\sin\Phi) & 0 \\ 0 & \dfrac{R^2\cos^2\Phi}{2n(a-\sin\Phi)} \end{pmatrix}$$

left distance function

$$ds^2 = 2R^2 n(a-\sin\Phi)d\Lambda^2 + \frac{R^2\cos^2\Phi}{2n(a-\sin\Phi)}d\Phi^2$$

left principal stretches

$$\Lambda_1 = \frac{n\sqrt{\frac{2}{n}(a-\sin\Phi)}}{\cos\Phi}$$

$$\Lambda_2 = \frac{\cos\Phi}{n\sqrt{\frac{2}{n}(a-\sin\Phi)}}$$

left eigenvectors

$$\boldsymbol{U_1} = \frac{1}{R\cos\Phi}\boldsymbol{G_1} \qquad \boldsymbol{U_2} = \frac{1}{R}\boldsymbol{G_2}$$

maximum angular deformation

$$\Omega = 2\arcsin\left|\frac{2n(a-\sin\Phi)-\cos^2\Phi}{2n(a-\sin\Phi)+\cos^2\Phi}\right|$$

LOW-ERROR EQUAL-AREA CONIC PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF TWO STANDARD PARALLELS

cone constant

$$n = \sin(\frac{\Phi_S + \Phi_N}{2})$$

inverse equations

$$\Lambda = \frac{\alpha}{n}$$
$$\Phi = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(a - \frac{r^2 n}{2R^2}\right)$$

$$\text{mit} \quad a := \frac{1}{2}\left(\frac{n}{\cos(\frac{\Phi_N - \Phi_S}{2})} + \frac{\cos(\frac{\Phi_N - \Phi_S}{2})}{n}\right)$$

right Jacobi matrix

$$\boldsymbol{J}_r = \begin{pmatrix} \Lambda_\alpha & \Lambda_r \\ \Phi_\alpha & \Phi_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & -\frac{2nr}{\sqrt{4R^4 - (2R^2 a - r^2 n)^2}} \end{pmatrix}$$

right Cauchy-Green deformation tensor

$$[C_{kl}] = \begin{pmatrix} \frac{4R^4 - (2R^2 a - r^2 n)^2}{4R^2 n^2} & 0 \\ 0 & \frac{4R^2 n^2 r^2}{4R^4 - (2R^2 a - r^2 n)^2} \end{pmatrix}$$

right distance function

$$dS^2 = \frac{4R^4 - (2R^2 a - r^2 n)^2}{4R^2 n^2} d\alpha^2 + \frac{4R^2 n^2 r^2}{4R^4 - (2R^2 a - r^2 n)^2} dr^2$$

LOW-ERROR EQUAL-AREA CONIC PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF TWO STANDARD PARALLELS

right principal stretches

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{4R^4 - (2R^2 a - r^2 n)^2}}{2Rnr}$$

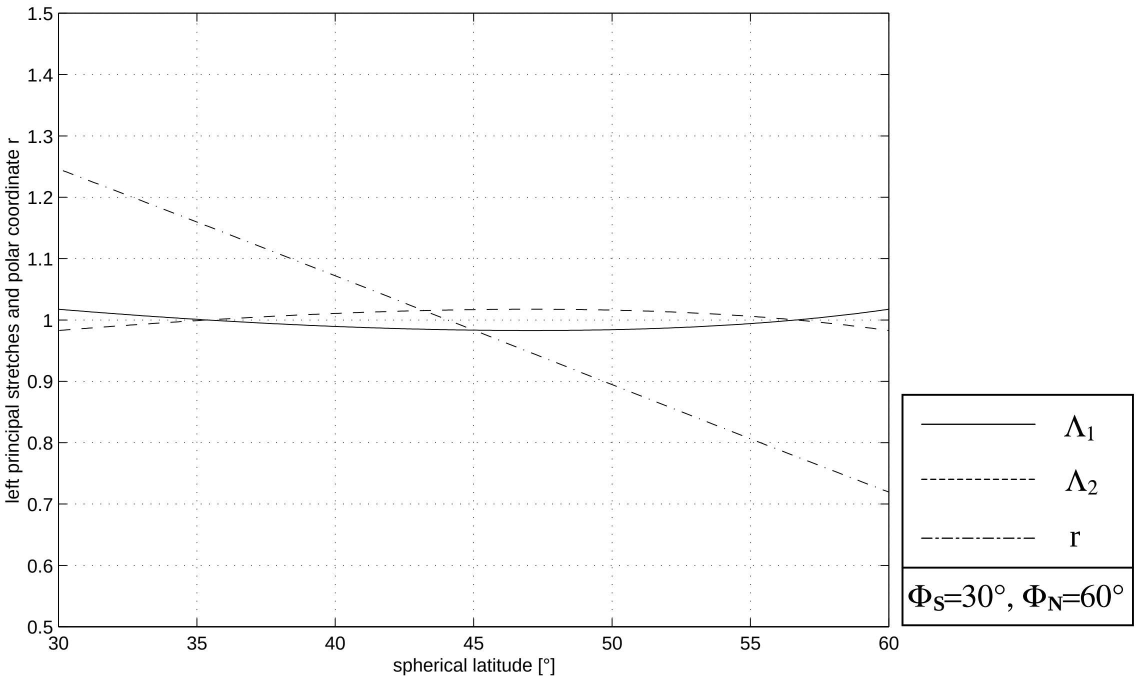
$$\lambda_2 = \frac{2Rnr}{\sqrt{4R^4 - (2R^2 a - r^2 n)^2}}$$

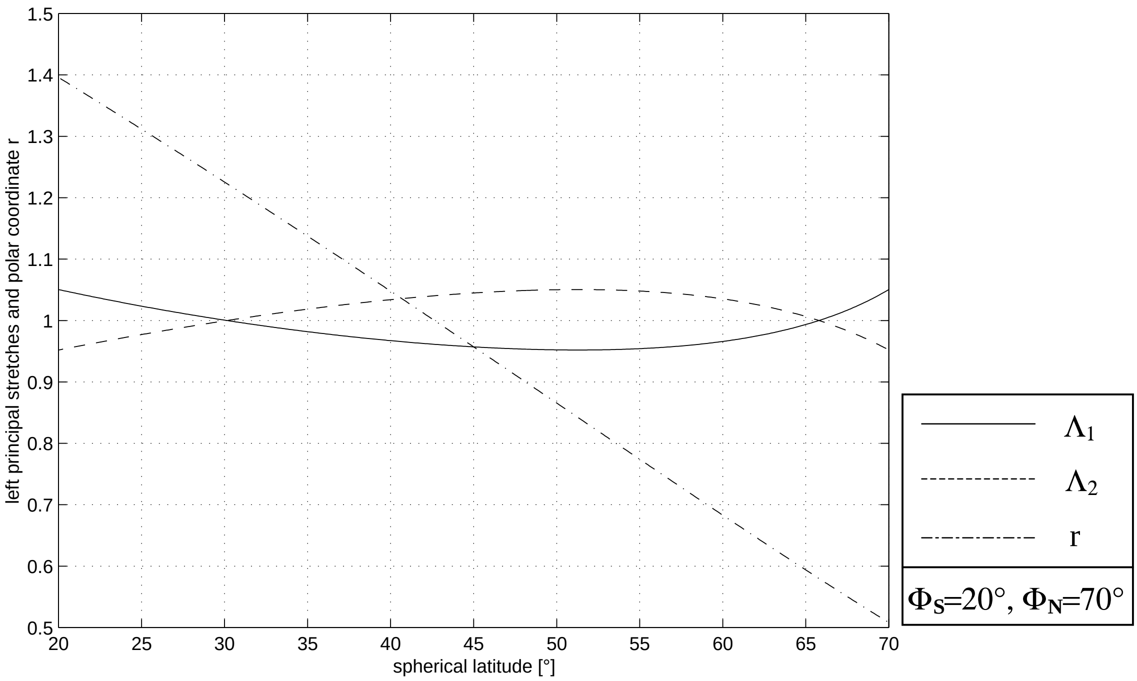
right eigenvectors

$$\boldsymbol{u_1} = \frac{1}{r}\boldsymbol{g_1} \qquad \boldsymbol{u_2} = \boldsymbol{g_2}$$

LOW-ERROR EQUAL-AREA CONIC PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF TWO STANDARD PARALLELS

left principal stretches and polar coordinate r as function of the spherical latitude Φ





LOW-ERROR EQUAL-AREA CONIC PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF TWO STANDARD PARALLELS

minimum polar coordinate r_{min}

$$r_{\min} = r(\Phi = \Phi_N) = R\sqrt{\frac{2}{n}(a - \sin\Phi_N)}$$

maximum polar coordinate r_{max}

$$r_{\max} = r(\Phi = \Phi_S) = R\sqrt{\frac{2}{n}(a - \sin\Phi_S)}$$

angle of intersection of coordinate lines, left versus right

$A = 90°$ $\qquad$ $\alpha = 90°$

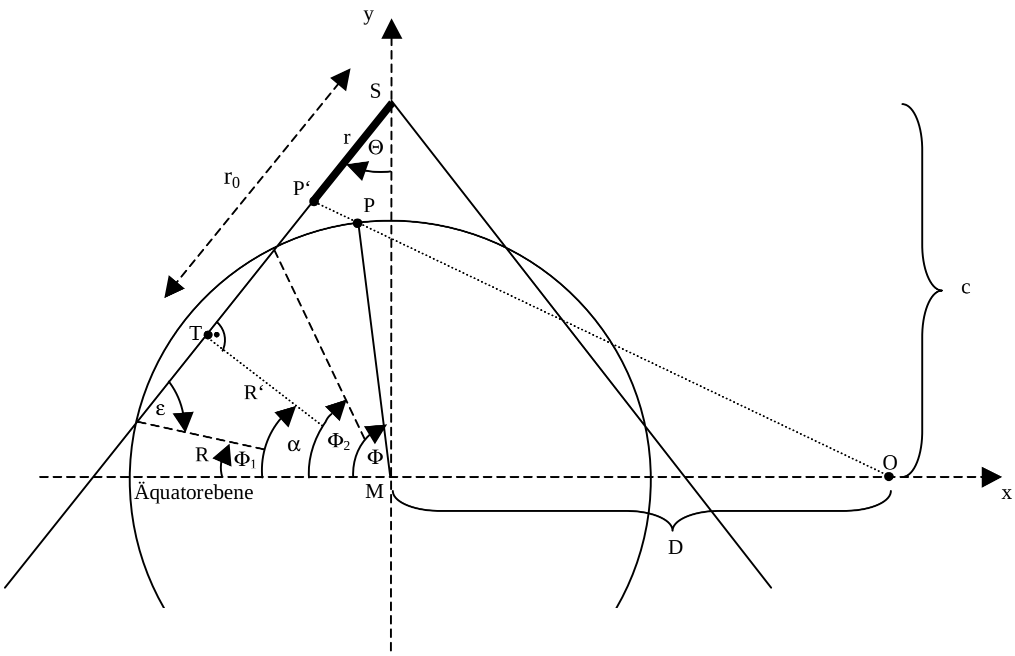
left angular shear

$\delta = 0°$

3-4. PERSPEKTIVISCHE KEGELABBILDUNGEN DER KUGEL

Im Falle perspektivischer Kegelabbildungen werden Punkte der Kugeloberfläche von einem Projektionszentrum aus auf einen Kegel abgebildet. Als Projektionszentrum wird im allgemeinen ein Punkt gewählt, der entweder in der Äquatorebene oder aber auf der Geraden durch die Punkte M (Kugelmittelpunkt) und S (Kegelscheitel) liegt. Für beide Fälle sollen im folgenden die allgemeinen Abbildungsgleichungen hergeleitet werden.

(i) Zunächst sollen die allgemeinen Abbildungsgleichungen einer Kegelabbildung hergeleitet werden, deren Projektionszentrum O sich in der Äquatorebene befindet und den Abstand D vom Kugelmittelpunkt besitzt. Hierzu soll in einem ersten Schritt der geometrische Sachverhalt anhand eines Meridianschnitts verdeutlicht werden:



Für den Winkel α gilt:

$$\alpha = \Phi_1 + \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2} = \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}$$

Für den Winkel ε gilt:

$$2\varepsilon = 180° - (\Phi_2 - \Phi_1)$$

$$\varepsilon = \frac{\pi}{2} - \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2}$$

Ferner gilt für ε:

$$\sin\varepsilon = \frac{R'}{R} \Leftrightarrow R' = R\sin\varepsilon$$

$$\Rightarrow R' = R\cos\left(\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2}\right)$$

Für die Strecke r_0 gilt:

$$r_0 = R'\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = R\cos\left(\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2}\right)\cot\left(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}\right)$$

Für die Strecke c gilt nach Pythagoras:

$$c = \sqrt{R'^2 + r_0^2} = R\frac{\cos\left(\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}\right)}$$

Die **Projektionskonstante *n*** berechnet sich aus dem Öffnungswinkel Θ des Kegels zu

$$n = \sin\Theta = \sin\alpha = \sin(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2})$$

Im zugrundeliegenden (x,y) - Koordinatensystem lassen sich nun die **Ortsvektoren der vier Punkte O, P, S und T** angeben. Sie lauten:

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{x}_T = \begin{pmatrix} -R'\cos(\frac{\Phi_1+\Phi_2}{2}) \\ R'\sin(\frac{\Phi_1+\Phi_2}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R'\cos(\frac{\Phi_1+\Phi_2}{2}) \\ R'n \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_P = \begin{pmatrix} -R\cos\Phi \\ R\sin\Phi \end{pmatrix} \qquad \vec{x}_S = \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ R\dfrac{\cos(\frac{\Phi_2-\Phi_1}{2})}{\sin(\frac{\Phi_1+\Phi_2}{2})} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{R}{n}\cos(\frac{\Phi_2-\Phi_1}{2}) \end{pmatrix}$$

Das weitere Vorgehen zur Herleitung des gesuchten Bildradius r besteht darin, die beiden Geraden g = (OP) und h = (TS) zu schneiden, um die Koordinaten ($x_{P'}$,$y_{P'}$) des Bildpunktes P' bezüglich des oben definierten Koordinatensystems zu bestimmen. Anschließend kann aus den dann bekannten Koordinaten der Punkte S und P' der Bildradius r berechnet werden.

Die **Gleichungen der** beiden **Geraden *g* und *h*** können mit Hilfe der "Zwei-Punkte-Form" aus den Koordinaten der auf den Geraden liegenden Punkten ermittelt werden:

$$g: \quad y - y_0 = \frac{y_P - y_0}{x_P - x_0}(x - x_0)$$

$$y = -\frac{R\sin\Phi}{R\cos\Phi + D}x + \frac{DR\sin\Phi}{R\cos\Phi + D}$$

$$h: \quad y - y_T = \frac{y_S - y_T}{x_S - x_T}(x - x_T)$$

$$y = \cot(\frac{\Phi_1+\Phi_2}{2})x + \frac{R}{n}\cos(\frac{\Phi_2-\Phi_1}{2})$$

Gleichsetzen beider Geradengleichungen liefert die **x-Koordinate des Punktes P'**. Als Ergebnis erhält man:

$$x_{P'} = \frac{\dfrac{DRn\sin\Phi}{R\cos\Phi + D} - R\cos(\dfrac{\Phi_2 - \Phi_1}{2})}{n\left(\dfrac{R\sin\Phi}{R\cos\Phi + D} + \cot(\dfrac{\Phi_1 + \Phi_2}{2})\right)}$$

Einsetzen dieses Ergebnisses in die Gleichung der Geraden *g* liefert **die y-Koordinate des Punktes P'**. Als Ergebnis erhält man:

$$y_{P'} = \frac{\dfrac{R\sin\Phi}{R\cos\Phi + D}\left(R\cos(\dfrac{\Phi_2 - \Phi_1}{2}) - \dfrac{DRn\sin\Phi}{R\cos\Phi + D}\right)}{n\left(\dfrac{R\sin\Phi}{R\cos\Phi + D} + \cot(\dfrac{\Phi_1 + \Phi_2}{2})\right)} + \frac{DR\sin\Phi}{R\cos\Phi + D}$$

Der gesuchte **Bildradius *r*** ergibt sich nun unmittelbar aus den Koordinaten der Punkte S und P' unter Anwendung des Satzes von Pythagoras zu

$$r = \sqrt{(x_{P'} - x_S)^2 + (y_{P'} - y_S)^2} \,,$$

so daß die **allgemeinen Abbildungsgleichungen** folgendes Aussehen besitzen:

(3.1)
$$\alpha = n\Lambda$$
$$r = \frac{R\cos(\dfrac{\Phi_2 - \Phi_1}{2}) - \dfrac{DRn\sin\Phi}{R\cos\Phi + D}}{n^2\left(\dfrac{R\sin\Phi}{R\cos\Phi + D} + \cot(\dfrac{\Phi_1 + \Phi_2}{2})\right)}$$
mit $n = \sin(\dfrac{\Phi_1 + \Phi_2}{2})$

Ausgehend von diesen Abbildungsgleichungen lassen sich die folgenden Sonderfälle unterscheiden:

***D* = 0**

Das Perspektivzentrum befindet sich im Ursprung des zugrunde gelegten Koordinatensystems, also im Mittelpunkt der Kugel. In diesem speziellen Fall erhält man die Abbildungsgleichungen der **"Perspektivischen Kegelabbildung mit 2 Standardparallelen"**, für die gilt:

$$\alpha = n\Lambda$$

$$r = \frac{R\cos(\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2})}{n^2\left(\tan\Phi + \cot(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2})\right)}$$
$$= R\cos(\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2})\left(\cot(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}) - \tan(\Phi - \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2})\right)$$

Wählt man zusätzlich für die beiden Standardparallelen die Werte Φ_1=Φ_2=Φ_0, so ergeben sich die Abbildungsgleichungen der **"Perspektivischen Kegelabbildung mit 1 Standardparallelen"**

***D* = ∞**

Das Perspektivzentrum ist unendlich weit vom Kugelmittelpunkt entfernt, so daß die Projektionsstrahlen parallel einfallen. Als Resultat erhält man eine **"Orthogonale Parallelprojektion mit 2 Standardparallelen und parallel zur Äquatorebene verlaufenden Projektionsstrahlen"**, deren Bildradius sich folgendermaßen berechnet:

$$\alpha = n\Lambda$$

$$r = \frac{R\left(\cos(\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2}) - n\sin\Phi\right)}{n\cos(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2})}$$

Auch diese Abbildung kann mit nur einem Standardparallelkreis konstruiert werden, indem man wiederum Φ_1=Φ_2=Φ_0 wählt.

Im Zuge einer **Deformationsanalyse** für den Bildbereich erhält man ausgehend von (3.1) die folgenden Ergebnisse:

linke Jakobi-Matrix

$$J_l = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & \dfrac{R(R + D\cos\Phi)\left(D\cos(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}) + R\cos(\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2})\right)}{n^2\left(R\sin\Phi + \cot(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2})(R\cos\Phi + D)\right)^2} \end{pmatrix}$$

linker Cauchy-Green-Deformationstensor

$$[c_{KL}] = \begin{pmatrix} \dfrac{R^2\left(\cos(\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2})(R\cos\Phi + D) - Dn\sin\Phi \right)^2}{n^2\left(R\sin\Phi + \cot(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2})(R\cos\Phi + D)\right)^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{R^2(R + D\cos\Phi)^2\left(D\cos(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}) + R\cos(\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2})\right)^2}{n^4\left(R\sin\Phi + \cot(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2})(R\cos\Phi + D)\right)^4} \end{pmatrix}$$

linkes Bogenelement

$$\begin{aligned} ds^2 = {} & \frac{R^2\left(\cos(\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2})(R\cos\Phi + D) - Dn\sin\Phi \right)^2}{n^2\left(R\sin\Phi + \cot(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2})(R\cos\Phi + D)\right)^2} d\Lambda^2 \\ & + \frac{R^2(R + D\cos\Phi)^2\left(D\cos(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}) + R\cos(\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2})\right)^2}{n^4\left(R\sin\Phi + \cot(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2})(R\cos\Phi + D)\right)^4} d\Phi^2 \end{aligned}$$

linke Hauptstreckungen

$$\Lambda_1 = \frac{\cos(\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2})\left(R\cos\Phi + D\right) - Dn\sin\Phi}{n\cos\Phi\left(R\sin\Phi + \cot(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2})\left(R\cos\Phi + D\right)\right)}$$

$$\Lambda_2 = \frac{(R + D\cos\Phi)\left(D\cos(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}) + R\cos(\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2})\right)}{n^2\left(R\sin\Phi + \cot(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2})\left(R\cos\Phi + D\right)\right)^2}$$

linke Eigenvektoren

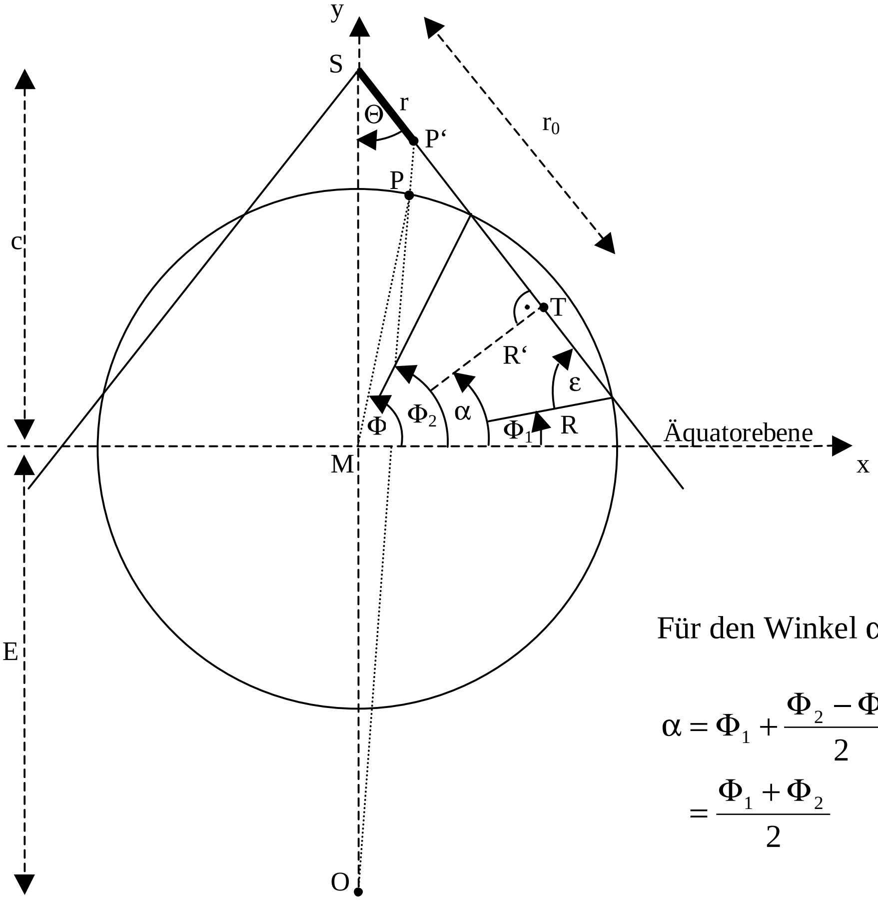
$$\boldsymbol{U_1} = \frac{1}{R\cos\Phi}\boldsymbol{G_1} \qquad \boldsymbol{U_2} = \frac{1}{R}\boldsymbol{G_2}$$

Maximale Winkelverzerrung

$$\Omega = 2\arcsin\left|\frac{n\left(R\sin\Phi + \cot(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2})\left(R\cos\Phi + D\right)\right)\left(R\cos(\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2})\left(R\cos\Phi + D\right) - RDn\sin\Phi\right)}{n\left(R\sin\Phi + \cot(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2})\left(R\cos\Phi + D\right)\right)\left(R\cos(\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2})\left(R\cos\Phi + D\right) - RDn\sin\Phi\right)}\right.\cdots$$

$$\left.\cdots\frac{-R(R + D\cos\Phi)\left(D\cos(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}) + R\cos(\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2})\right)\cos\Phi}{+R(R + D\cos\Phi)\left(D\cos(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}) + R\cos(\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2})\right)\cos\Phi}\right|$$

(ii) Nun sollen die allgemeinen Abbildungsgleichungen einer Kegelabbildung hergeleitet werden, deren Projektionszentrum O auf der Geraden durch die Punkte M (Kugelmittelpunkt) und S (Kegelscheitel), also auf der Kegelachse liegt und sich im Abstand *E* vom Kugelmittelpunkt befindet. Der zugehörige Meridianschnitt besitzt folgendes Aussehen:



Für den Winkel α gilt:

$$\alpha = \Phi_1 + \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2} = \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}$$

Für den Winkel *ε* gilt:

$$2\varepsilon = 180° - (\Phi_2 - \Phi_1)$$

$$\varepsilon = \frac{\pi}{2} - \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2}$$

Ferner gilt für *ε*:

$$\sin\varepsilon = \frac{R'}{R} \Leftrightarrow R' = R\sin\varepsilon$$

$$\Rightarrow R' = R\cos\left(\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2}\right)$$

Für die Strecke r_0 gilt:

$$r_0 = R'\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = R\cos\left(\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2}\right)\cot\left(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}\right)$$

Für die Strecke *c* gilt nach Pythagoras:

$$c = \sqrt{R'^2 + r_0^2} = R\frac{\cos\left(\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}\right)}$$

Die **Projektionskonstante *n*** errechnet sich wiederum zu

$$n = \sin\Theta = \sin\alpha = \sin(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2})$$

Im zugrundeliegenden (x,y)-Koordinatensystem lassen sich erneut die **Ortsvektoren der vier Punkte O, P, S und T** angeben. Sie lauten:

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -E \end{pmatrix} \qquad \vec{x}_T = \begin{pmatrix} R'\cos(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}) \\ R'\sin(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R'\cos(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}) \\ R'n \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_P = \begin{pmatrix} R\cos\Phi \\ R\sin\Phi \end{pmatrix} \qquad \vec{x}_S = \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ R\dfrac{\cos(\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2})}{\sin(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2})} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{R}{n}\cos(\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2}) \end{pmatrix}$$

Analog zum Fall (i) können jetzt die beiden Geraden *g* = (OP) und *h* = (TS) geschnitten werden, um die Koordinaten ($x_{P'}$,$y_{P'}$) des Bildpunktes P' bezüglich des oben definierten Koordinatensystems zu bestimmen. Anschließend kann aus den dann bekannten Koordinaten der Punkte S und P' der Bildradius r berechnet werden.

Die **Gleichungen der** beiden **Geraden *g* und *h*** können wiederum mit Hilfe der "Zwei-Punkte-Form" aus den Koordinaten der auf den Geraden liegenden Punkten ermittelt werden:

$$g: \quad y - y_0 = \frac{y_P - y_0}{x_P - x_0}(x - x_0)$$

$$y = \frac{R\sin\Phi + E}{R\cos\Phi}x - E$$

$$h: \quad y - y_T = \frac{y_S - y_T}{x_S - x_T}(x - x_T)$$

$$y = -\cot(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2})x + \frac{R}{n}\cos(\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2})$$

Gleichsetzen beider Geradengleichungen liefert die **x-Koordinate des Punktes P'**. Als Ergebnis erhält man:

$$x_{P'} = \frac{R\cos(\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2}) + En}{n\left(\frac{R\sin\Phi + E}{R\cos\Phi} + \cot(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2})\right)}$$

Einsetzen dieses Ergebnisses in die Gleichung der Geraden *g* liefert die **y-Koordinate des Punktes P'**. Als Ergebnis erhält man:

$$y_{P'} = \frac{\frac{R\sin\Phi + E}{R\cos\Phi}\left(R\cos(\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2}) + En\right)}{n\left(\frac{R\sin\Phi + E}{R\cos\Phi} + \cot(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2})\right)} - E$$

Der gesuchte **Bildradius *r*** ergibt sich auch hier unmittelbar aus den Koordinaten der Punkte S und P' unter Anwendung des Satzes von Pythagoras zu

$$r = \sqrt{(x_{P'} - x_S)^2 + (y_{P'} - y_S)^2}\ ,$$

so daß die **allgemeinen Abbildungsgleichungen** folgendes Aussehen besitzen:

(3.2)

$$\boxed{\begin{aligned} &\alpha = n\Lambda \\ &r = \frac{R\cos(\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2}) + En}{n^2\left(\frac{R\sin\Phi + E}{R\cos\Phi} + \cot(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2})\right)} \end{aligned}}$$

mit $n = \sin(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2})$

Wiederum lassen sich ausgehend von dieser Beziehung die folgenden Fälle unterscheiden:

E **=** 0

Das Perspektivzentrum befindet sich im Ursprung des zugrunde gelegten Koordinatensystems, also im Mittelpunkt der Kugel. Wie im Fall (i) erhält man die Abbildungsgleichungen der **"Perspektivischen Kegelabbildung mit 2 Standardparallelen"**, für die gilt:

$$\alpha = n\Lambda$$

$$r = \frac{R\cos(\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2})}{n^2\left(\tan\Phi + \cot(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2})\right)}$$

$$= R\cos(\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2})\left(\cot(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}) - \tan(\Phi - \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2})\right)$$

Die Abbildungsgleichungen der **"Perspektivischen Kegelabbildung mit 1 Standardparallelen"** erhält man, wenn für die beiden Standardparallelen die Werte Φ_1=Φ_2=Φ_0 gewählt werden.

E **=** ∞

Das Perspektivzentrum ist unendlich weit vom Kugelmittelpunkt entfernt, so daß die Projektionsstrahlen parallel einfallen. Als Resultat erhält man eine **"Orthogonale Parallelprojektion mit 2 Standardparallelen und parallel zur Kegelachse verlaufenden Projektionsstrahlen"**, deren Bildradius sich folgendermaßen berechnet:

$$\alpha = n\Lambda$$

$$r = \frac{R\cos\Phi}{n}$$

Auch diese Abbildung kann mit nur einem Standardparallelkreis konstruiert werden, indem man Φ_1=Φ_2=Φ_0 wählt.

E **= R**

Das Perspektivzentrum befindet sich im Südpol der Kugel, so daß sich die Abbildungsgleichungen der **"Stereographischen Kegelabbildung mit 2 Standardparallelen"** ergeben. Für den Bildradius r gilt somit:

$$\alpha = n\Lambda$$

$$r = \frac{R\cos\Phi\left(\cos(\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2}) + n\right)}{n^2\left(\sin\Phi + \cot(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2})\cos\Phi + 1\right)} = \frac{R\sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi}{2})\left(\cos(\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2}) + n\right)}{n^2\left(\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi}{2}) + \cot(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2})\sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi}{2})\right)}$$

Für $\Phi_1=\Phi_2=\Phi_0$ ergeben sich die Abbildungsgleichungen der **"Stereographischen Kegelabbildung mit 1 Standardparallelen".**

Einen Spezialfall der stereographischen Kegelabbildung mit einer Standardparallelen stellt die **BRAUN–Abbildung** dar. Sie besitzt den Standardparallekreis $\Phi_1=\Phi_2=\Phi_0=30°$.

Im Zuge einer **Deformationsanalyse** für den Bildbereich erhält man ausgehend von (3.2) die folgenden Ergebnisse:

linke Jakobi-Matrix

$$J_l = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & \dfrac{R(R+E\sin\Phi)\left(R\cos(\frac{\Phi_2-\Phi_1}{2})+En\right)}{n^2\left(R\sin\Phi+R\cos\Phi\cot(\frac{\Phi_1+\Phi_2}{2})+E\right)^2} \end{pmatrix}$$

linker Cauchy-Green-Deformationstensor

$$[c_{KL}] = \begin{pmatrix} \dfrac{R^2\cos^2\Phi\left(R\cos(\frac{\Phi_2-\Phi_1}{2})+En\right)^2}{n^2\left(R\sin\Phi+R\cos\Phi\cot(\frac{\Phi_1+\Phi_2}{2})+E\right)^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{R^2(R+E\sin\Phi)^2\left(R\cos(\frac{\Phi_2-\Phi_1}{2})+En\right)^2}{n^4\left(R\sin\Phi+R\cos\Phi\cot(\frac{\Phi_1+\Phi_2}{2})+E\right)^4} \end{pmatrix}$$

linkes Bogenelement

$$ds^2 = \frac{R^2\cos^2\Phi\left(R\cos(\frac{\Phi_2-\Phi_1}{2})+En\right)^2}{n^2\left(R\sin\Phi+R\cos\Phi\cot(\frac{\Phi_1+\Phi_2}{2})+E\right)^2}d\Lambda^2+\frac{R^2(R+E\sin\Phi)^2\left(R\cos(\frac{\Phi_2-\Phi_1}{2})+En\right)^2}{n^4\left(R\sin\Phi+R\cos\Phi\cot(\frac{\Phi_1+\Phi_2}{2})+E\right)^4}d\Phi^2$$

linke Hauptstreckungen

$$\Lambda_1 = \frac{R\cos(\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2}) + En}{n\left(R\sin\Phi + R\cos\Phi\cot(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}) + E\right)}$$

$$\Lambda_2 = \frac{(R + E\sin\Phi)\left(R\cos(\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2}) + En\right)}{n^2\left(R\sin\Phi + R\cos\Phi\cot(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}) + E\right)^2}$$

linke Eigenvektoren

$$\boldsymbol{U_1} = \frac{1}{R\cos\Phi}\boldsymbol{G_1} \qquad \boldsymbol{U_2} = \frac{1}{R}\boldsymbol{G_2}$$

Maximale Winkelverzerrung

$$\Omega = 2\arcsin\left|\frac{n\left(R\sin\Phi + R\cos\Phi\cot(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}) + E\right) - (R + E\sin\Phi)}{n\left(R\sin\Phi + R\cos\Phi\cot(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}) + E\right) + (R + E\sin\Phi)}\right|$$

Im folgenden sollen zunächst die in diesem Abschnitt behandelten speziellen Kegelabbildungen hinsichtlich ihrer Eigenschaften, Einsatzgebiete und Entstehungsgeschichte beschrieben werden, bevor sie schließlich ausführlich vorgestellt werden.

Die nachfolgend beschriebenen Eigenschaften der einzelnen Abbildungen gelten wiederum nur für den Fall einer normalständigen Kegelabbildung, die als Hauptpunkt den Nord- oder Südpol der Kugel besitzt. Für die zu jeder Abbildung gehörenden Diagramme wird als Hauptpunkt der Nordpol gewählt.

Bei den hier behandelten speziellen Kegelabbildungen der Kugel handelt es sich um die folgenden perspektivischen Abbildungen:

PERSPEKTIVISCHE KEGELABBILDUNG, ÄQUIDISTANT AUF DEN BEIDEN STANDARDPARALLELKREISEN Φ_1 UND Φ_2, PROJEKTIONSZENTRUM IM KUGELMITTELPUNKT	
Das Projektionszentrum dieser Abbildung befindet sich im Kugelmittelpunkt. Für $\Phi_1=\Phi_2=\Phi_0$ erhält man die Abbildungsgleichungen für den Fall eines Standardparallelkreises.	
Andere Bezeichnung	**Perspektivische Kegelabbildung** (perspective conic)
Eigenschaften	Sämtliche Parallelkreise, mit Ausnahme der beiden Pole, werden als Bogenstücke konzentrischer Kreise abgebildet. Die Abstände benachbarter Parallelkreise werden umso größer, je weiter man sich von den beiden Standardparallelen bzw. vom einzigen Standardparallelkreis Φ_0 nach Norden bzw. nach Süden entfernt. Die Meridiane werden als Geraden abgebildet und schneiden die Parallelkreise im rechten Winkel. Der Hauptpunkt wird als Punkt abgebildet, der andere Pol kann überhaupt nicht dargestellt werden, da der Bildradius für $(\Phi_1+\Phi_2)/2$-90° bzw. für Φ_0-90° eine Singularität besitzt. Somit können nur Punkte mit sphärischen Breiten von $\Phi > (\Phi_1+\Phi_2)/2$-90° bzw. $\Phi > \Phi_0$–90° dargestellt werden. Die beiden gewählten Standardparallelkreise werden äquidistant abgebildet, besitzen also den Maßstab 1. Entlang aller anderen Parallelkreise ist der Maßstab zwar verschieden von 1, aber konstant. Die Abbildung ist konform auf dem Parallelkreis $\Phi=(\Phi_1+\Phi_2)/2$. Wird die Abbildung mit nur einem Standardparallelkreis konstruiert, so wird dieser äquidistant und konform abgebildet. Die Abbildung ist weder konform noch flächentreu.
Einsatzgebiete	---
Ursprung	Der Ursprung dieser Abbildung ist unbekannt. Erstmals erwähnt wurde dieser Abbildungstyp vom Iren Christopher Colles (1739-1816) im Jahre 1794 [5].

PERSPEKTIVISCHE KEGELABBILDUNG, ÄQUIDISTANT AUF DEN BEIDEN STANDARDPARALLELKREISEN Φ_1 UND Φ_2, PROJEKTIONSZENTRUM IM SÜDPOL	
Das Projektionszentrum dieser Abbildung befindet sich im dem Hauptpunkt gegenüberliegenden Pol, im vorliegenden Fall im Südpol. Für $\Phi_1=\Phi_2=\Phi_0$ erhält man die Abbildungsgleichungen für den Fall eines Standardparallelkreises.	
Andere Bezeichnung	**Stereographische Kegelabbildung**
Eigenschaften	Die Parallelkreise und das Projektionszentrum werden als Bogenstücke konzentrischer Kreise abgebildet. Die Meridiane werden als Geraden abgebildet und schneiden die Parallelkreise im rechten Winkel. Der Hauptpunkt wird als Punkt abgebildet, der dem Hauptpunkt gegenüberliegende Pol (das Projektionszentrum) wird als Kreisbogen dargestellt Die gewählten Standardparallelkreise werden äquidistant abgebildet, besitzen also den Maßstab 1. Entlang aller anderen Parallelkreise ist der Maßstab zwar verschieden von 1, aber konstant. Die Abbildung ist konform auf dem Parallelkreis $\Phi=(\Phi_1+\Phi_2)/2$. Wird die Abbildung mit nur einem Standardparallelkreis konstruiert, so wird dieser äquidistant <u>und</u> konform abgebildet. Die Abbildung ist weder konform noch flächentreu.
Einsatzgebiete	---
Ursprung	Vorgeschlagen von Carl Braun im Jahr 1867, der seinerzeit allerdings einen Spezialfall mit dem Standardparallelkreis $\Phi_1=\Phi_2=\Phi_0=30°$ vorstellte [3].

PERSPEKTIVISCHE KEGELABBILDUNG, ÄQUIDISTANT AUF DEN BEIDEN STANDARDPARALLELKREISEN Φ_1 UND Φ_2, PARALLEL ZUR ÄQUATOREBENE VERLAUFENDE PROJEKTIONSSTRAHLEN	
Das Projektionszentrum dieser Abbildung ist unendlich weit vom Kugelmittelpunkt entfernt. Die Projektionsstrahlen verlaufen parallel zur Äquatorebene. Für $\Phi_1=\Phi_2=\Phi_0$ erhält man die Abbildungsgleichungen für den Fall eines Standardparallelkreises.	
Andere Bezeichnung	**Orthogonale Parallelprojektion mit orthogonal zur Äquatorebene verlaufenden Projektionsstrahlen**
Eigenschaften	Sämtliche Parallelkreise, auch die beiden Pole, werden als Bogenstücke konzentrischer Kreise abgebildet. Die Meridiane werden als Geraden abgebildet und schneiden die Parallelkreise im rechten Winkel. Der Hauptpunkt (als einer der beiden Pole) wird ebenfalls als Kreisbogenstück abgebildet. Ausgehend vom Nordpol wird der Abstand zweier benachbarter Parallelkreise in Richtung Äquator immer größer, um bei weiterem Fortschreiten in Richtung Südpol wieder kleiner zu werden. Die gewählten Standardparallelkreise werden äquidistant abgebildet, besitzen also den Maßstab 1. Entlang aller anderen Parallelkreise ist der Maßstab zwar verschieden von 1, aber konstant. Wird die Abbildung mit nur einem Standardparallelkreis konstruiert, so wird dieser äquidistant <u>und</u> konform abgebildet. Die Abbildung ist weder konform noch flächentreu.
Einsatzgebiete	---
Ursprung	unbekannt

<table>
<tr><td colspan="2">PERSPEKTIVISCHE KEGELABBILDUNG,
ÄQUIDISTANT AUF DER SCHAR DER LÄNGENKREISE,
PARALLEL ZUR KEGELACHSE VERLAUFENDE PROJEKTIONSSTRAHLEN</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">Das Projektionszentrum dieser Abbildung ist unendlich weit vom Kugelmittelpunkt entfernt. Die Projektionsstrahlen verlaufen parallel zur Kegelachse. Für $\Phi_1=\Phi_2=\Phi_0$ erhält man die Abbildungsgleichungen für den Fall eines Standardparallelkreises.</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>Andere Bezeichnung</td><td>Orthogonale Parallelprojektion mit orthogonal zur Kegelachse verlaufenden Projektionsstrahlen</td></tr>
<tr><td>Eigenschaften</td><td>Die Parallelkreise werden als Bogenstücke konzentrischer Kreise abgebildet. Die Meridiane werden als Geraden abgebildet und schneiden die Parallelkreise im rechten Winkel. Der Hauptpunkt wird als Punkt abgebildet. Die Abbildung ist nur dann eindeutig, wenn entweder die Nord- oder die Südhalbkugel auf den Kegel projiziert wird. Eine natürliche Kartenbegrenzung stellt somit der Äquator dar. Die Abstände benachbarter Parallelkreise werden umso kleiner, je weiter man sich vom Pol der abzubildenden Hemisphäre in Richtung Äquator entfernt.
Sämtliche Parallelkreise werden äquidistant abgebildet, besitzen also den Maßstab 1. Darüber hinaus ist die Abbildung konform auf dem Parallelkreis $\Phi=(\Phi_1+\Phi_2)/2$. Wird die Abbildung mit nur einem Standardparallelkreis konstruiert, so wird dieser äquidistant <u>und</u> konform abgebildet.
Die Abbildung ist weder konform noch flächentreu.</td></tr>
<tr><td>Einsatzgebiete</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Ursprung</td><td>unbekannt</td></tr>
</table>

PERSPECTIVE CONIC PROJECTION

EQUIDISTANT MAPPING OF TWO STANDARD PARALLELS Φ_1,Φ_2,

CENTER OF SPHERE AS POINT OF PERSPECTIVE

PERSPECTIVE CONIC PROJECTION

cone constant

$$n = \sin\left(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}\right)$$

direct equations, polar coordinates

$$\alpha = n\Lambda$$
$$r = R\cos\left(\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2}\right)\left(\cot\left(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}\right) - \tan\left(\Phi - \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}\right)\right)$$

direct equations, cartesian coordinates

$$x = R\cos\left(\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2}\right)\left(\cot\left(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}\right) - \tan\left(\Phi - \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}\right)\right)\cos(n\Lambda)$$
$$y = R\cos\left(\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2}\right)\left(\cot\left(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}\right) - \tan\left(\Phi - \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}\right)\right)\sin(n\Lambda)$$

left Jacobi matrix

$$\boldsymbol{J}_l = \begin{pmatrix} \alpha_\Lambda & \alpha_\Phi \\ r_\Lambda & r_\Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & -\dfrac{R\cos\left(\dfrac{\Phi_2 - \Phi_1}{2}\right)}{\cos^2\left(\Phi - \dfrac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}\right)} \end{pmatrix}$$

PERSPECTIVE CONIC PROJECTION
EQUIDISTANT MAPPING OF TWO STANDARD PARALLELS Φ_1,Φ_2, CENTER OF SPHERE AS POINT OF PERSPECTIVE

left Cauchy-Green deformation tensor

$$[c_{KL}] = \begin{pmatrix} R^2 n^2 \cos^2(\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2})\left(\cot(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}) - \tan(\Phi - \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2})\right)^2 & 0 \\ 0 & \dfrac{R^2 \cos^2(\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2})}{\cos^4(\Phi - \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2})} \end{pmatrix}$$

left distance function

$$ds^2 = R^2 n^2 \cos^2(\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2})\left(\cot(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}) - \tan(\Phi - \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2})\right)^2 d\Lambda^2 + \frac{R^2 \cos^2(\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2})}{\cos^4(\Phi - \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2})} d\Phi^2$$

left principal stretches

$$\Lambda_1 = \frac{n}{\cos\Phi} \cos(\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2})\left(\cot(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}) - \tan(\Phi - \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2})\right)$$

$$\Lambda_2 = \frac{\cos(\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2})}{\cos^2(\Phi - \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2})}$$

left eigenvectors

$$\boldsymbol{U_1} = \frac{1}{R\cos\Phi}\boldsymbol{G_1} \qquad \boldsymbol{U_2} = \frac{1}{R}\boldsymbol{G_2}$$

PERSPECTIVE CONIC PROJECTION

EQUIDISTANT MAPPING OF TWO STANDARD PARALLELS Φ_1,Φ_2, CENTER OF SPHERE AS POINT OF PERSPECTIVE

maximum angular deformation

$$\Omega = 2\arcsin\left|\frac{n\left(\cot(\frac{\Phi_1+\Phi_2}{2}) - \tan(\Phi - \frac{\Phi_1+\Phi_2}{2})\right)\cos^2(\Phi - \frac{\Phi_1+\Phi_2}{2}) - \cos\Phi}{n\left(\cot(\frac{\Phi_1+\Phi_2}{2}) - \tan(\Phi - \frac{\Phi_1+\Phi_2}{2})\right)\cos^2(\Phi - \frac{\Phi_1+\Phi_2}{2}) + \cos\Phi}\right|$$

PERSPECTIVE CONIC PROJECTION

EQUIDISTANT MAPPING OF TWO STANDARD PARALLELS Φ_1,Φ_2, CENTER OF SPHERE AS POINT OF PERSPECTIVE

cone constant

$$n = \sin(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2})$$

inverse equations

$$\Lambda = \frac{\alpha}{n}$$

$$\Phi = \arctan\left[\cot(\frac{\Phi_1+\Phi_2}{2}) - \frac{r}{R\cos(\frac{\Phi_2-\Phi_1}{2})}\right] + \frac{\Phi_1+\Phi_2}{2} \quad = \quad \arctan[\cdots] + \frac{\Phi_1+\Phi_2}{2}$$

right Jacobi matrix

$$\boldsymbol{J}_r = \begin{pmatrix} \Lambda_\alpha & \Lambda_r \\ \Phi_\alpha & \Phi_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R\cos(\frac{\Phi_2-\Phi_1}{2})\left(1+[\cdots]^2\right)} \end{pmatrix}$$

right Cauchy-Green deformation tensor

$$[C_{kl}] = \begin{pmatrix} \frac{R^2}{n^2}\sin^2\left(\arctan[\cdots] + \frac{\Phi_1+\Phi_2}{2}\right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{\cos^2(\frac{\Phi_2-\Phi_1}{2})\left(1+[\cdots]^2\right)^2} \end{pmatrix}$$

PERSPECTIVE CONIC PROJECTION

EQUIDISTANT MAPPING OF TWO STANDARD PARALLELS Φ_1,Φ_2, CENTER OF SPHERE AS POINT OF PERSPECTIVE

right distance function

$$dS^2 = \frac{R^2}{n^2}\sin^2\left(\arctan[\cdots] + \frac{\Phi_1+\Phi_2}{2}\right)d\alpha^2 + \frac{1}{\cos^2(\frac{\Phi_2-\Phi_1}{2})\left(1+[\cdots]^2\right)^2}dr^2$$

right principal stretches

$$\lambda_1 = \frac{R}{nr}\sin\left(\arctan[\cdots] + \frac{\Phi_1+\Phi_2}{2}\right)$$

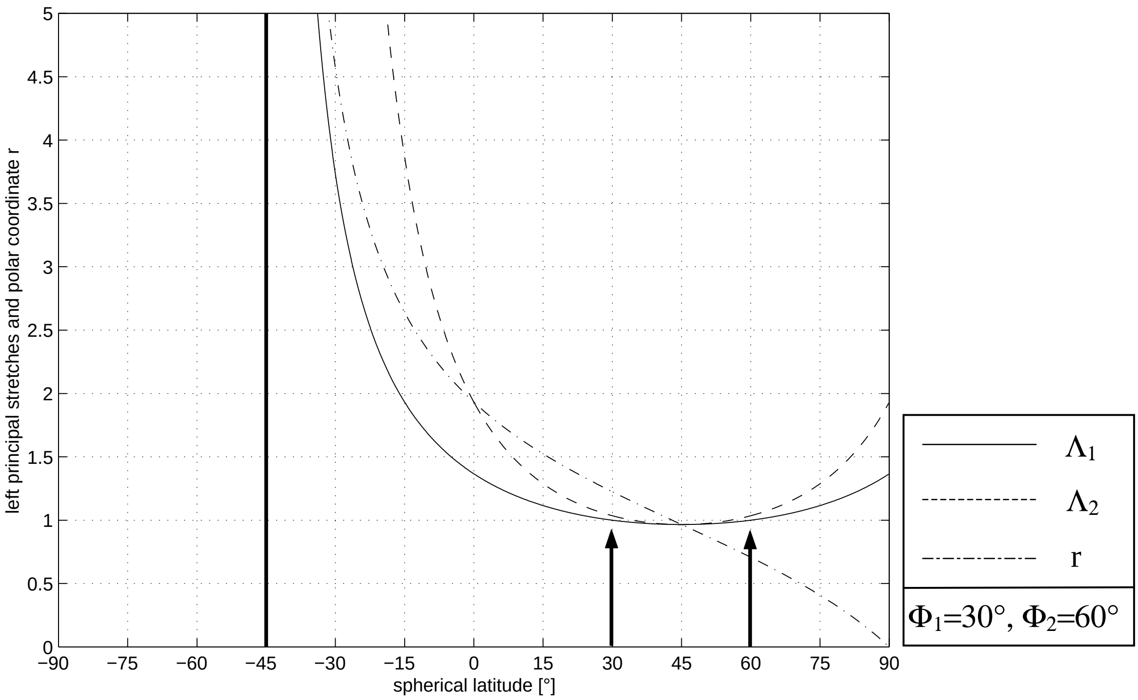
$$\lambda_2 = \frac{1}{\cos(\frac{\Phi_2-\Phi_1}{2})\left(1+[\cdots]^2\right)}$$

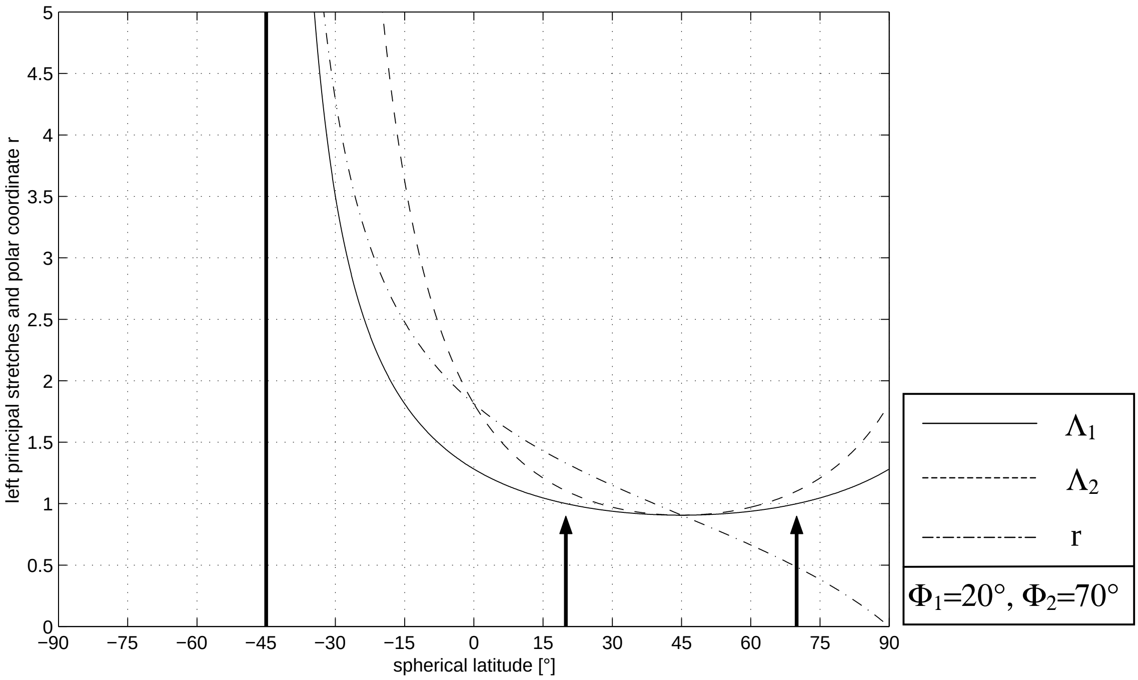
right eigenvectors

$$\boldsymbol{u_1} = \frac{1}{r}\boldsymbol{g_1} \qquad \boldsymbol{u_2} = \boldsymbol{g_2}$$

PERSPECTIVE CONIC PROJECTION
EQUIDISTANT MAPPING OF TWO STANDARD PARALLELS Φ_1,Φ_2, CENTER OF SPHERE AS POINT OF PERSPECTIVE

left principal stretches and polar coordinate r as function of the spherical latitude Φ





PERSPECTIVE CONIC PROJECTION
EQUIDISTANT MAPPING OF TWO STANDARD PARALLELS Φ_1, Φ_2, CENTER OF SPHERE AS POINT OF PERSPECTIVE

minimum polar coordinate r_{min}

$$r_{\min} = r\left(\Phi = \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

maximum polar coordinate r_{max}

$$r_{\max} = r\left(\Phi = \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \infty$$

angle of intersection of coordinate lines, left versus right

$A = 90°$ $\qquad$ $\alpha = 90°$

left angular shear

$\delta = 0°$

PERSPECTIVE CONIC PROJECTION
EQUIDISTANT MAPPING OF TWO STANDARD PARALLELS Φ_1,Φ_2,
SOUTH POLE AS POINT OF PERSPECTIVE

STEREOGRAPHIC CONIC PROJECTION

cone constant

$$n = \sin(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2})$$

direct equations, polar coordinates

$$\alpha = n\Lambda$$

$$r = \frac{R\left(\cos(\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2}) + n\right)\cos\Phi}{n^2\left(\sin\Phi + \cot(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2})\cos\Phi + 1\right)}$$

direct equations, cartesian coordinates

$$x = \frac{R\left(\cos(\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2}) + n\right)\cos\Phi}{n^2\left(\sin\Phi + \cot(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2})\cos\Phi + 1\right)}\cos(n\Lambda)$$

$$y = \frac{R\left(\cos(\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2}) + n\right)\cos\Phi}{n^2\left(\sin\Phi + \cot(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2})\cos\Phi + 1\right)}\sin(n\Lambda)$$

left Jacobi matrix

$$\boldsymbol{J}_l = \begin{pmatrix} \alpha_\Lambda & \alpha_\Phi \\ r_\Lambda & r_\Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & -\dfrac{R\left(\cos(\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2}) + n\right)(1 + \sin\Phi)}{n^2\left(\sin\Phi + \cot(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2})\cos\Phi + 1\right)^2} \end{pmatrix}$$

PERSPECTIVE CONIC PROJECTION
EQUIDISTANT MAPPING OF TWO STANDARD PARALLELS Φ_1,Φ_2, SOUTH POLE AS POINT OF PERSPECTIVE

left Cauchy-Green deformation tensor

$$[c_{KL}] = \begin{pmatrix} \dfrac{R^2\left(\cos(\frac{\Phi_2-\Phi_1}{2})+n\right)^2\cos^2\Phi}{n^2\left(\sin\Phi+\cot(\frac{\Phi_1+\Phi_2}{2})\cos\Phi+1\right)^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{R^2\left(\cos(\frac{\Phi_2-\Phi_1}{2})+n\right)^2}{n^4\left(\sin\Phi+\cot(\frac{\Phi_1+\Phi_2}{2})\cos\Phi+1\right)^4} \end{pmatrix}$$

left distance function

$$ds^2 = \frac{R^2\left(\cos(\frac{\Phi_2-\Phi_1}{2})+n\right)^2\cos^2\Phi}{n^2\left(\sin\Phi+\cot(\frac{\Phi_1+\Phi_2}{2})\cos\Phi+1\right)^2}d\Lambda^2 + \frac{R^2\left(\cos(\frac{\Phi_2-\Phi_1}{2})+n\right)^2}{n^4\left(\sin\Phi+\cot(\frac{\Phi_1+\Phi_2}{2})\cos\Phi+1\right)^4}d\Phi^2$$

left principal stretches

$$\Lambda_1 = \frac{\left(\cos(\frac{\Phi_2-\Phi_1}{2})+n\right)}{n\left(\sin\Phi+\cot(\frac{\Phi_1+\Phi_2}{2})\cos\Phi+1\right)}$$

$$\Lambda_2 = \frac{\left(\cos(\frac{\Phi_2-\Phi_1}{2})+n\right)(1+\sin\Phi)}{n^2\left(\sin\Phi+\cot(\frac{\Phi_1+\Phi_2}{2})\cos\Phi+1\right)^2}$$

left eigenvectors

$$\boldsymbol{U_1} = \frac{1}{R\cos\Phi}\boldsymbol{G_1} \qquad \boldsymbol{U_2} = \frac{1}{R}\boldsymbol{G_2}$$

PERSPECTIVE CONIC PROJECTION

EQUIDISTANT MAPPING OF TWO STANDARD PARALLELS Φ_1,Φ_2, SOUTH POLE AS POINT OF PERSPECTIVE

maximum angular deformation

$$\Omega = 2\arcsin\left|\frac{n\left(\sin\Phi + \cot(\frac{\Phi_1+\Phi_2}{2})\cos\Phi + 1\right) - (1+\sin\Phi)}{n\left(\sin\Phi + \cot(\frac{\Phi_1+\Phi_2}{2})\cos\Phi + 1\right) + (1+\sin\Phi)}\right|$$

PERSPECTIVE CONIC PROJECTION

EQUIDISTANT MAPPING OF TWO STANDARD PARALLELS Φ_1,Φ_2, SOUTH POLE AS POINT OF PERSPECTIVE

cone constant

$$n = \sin\left(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}\right)$$

inverse equations

$$\Lambda = \frac{\alpha}{n}$$

$$\Phi = \frac{\pi}{2} - 2\arctan\left[\frac{rn^2}{a - rn^2\cot\left(\frac{\Phi_1+\Phi_2}{2}\right)}\right]$$

mit $a := R\left(\cos\left(\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2}\right) + n\right)$

right Jacobi matrix

$$\boldsymbol{J}_r = \begin{pmatrix} \Lambda_\alpha & \Lambda_r \\ \Phi_\alpha & \Phi_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & -\frac{2n^2 a}{\left(a - rn^2\cot\left(\frac{\Phi_1+\Phi_2}{2}\right)\right)^2 + r^2 n^4} \end{pmatrix}$$

right Cauchy-Green deformation tensor

$$[C_{kl}] = \begin{pmatrix} \frac{4R^2 r^2 n^2 \left(a - rn^2\cot\left(\frac{\Phi_1+\Phi_2}{2}\right)\right)^2}{\left(\left(a - n^2 r\cot\left(\frac{\Phi_1+\Phi_2}{2}\right)\right)^2 + r^2 n^4\right)^2} & 0 \\ 0 & \frac{4R^2 n^4 a^2}{\left(\left(a - n^2 r\cot\left(\frac{\Phi_1+\Phi_2}{2}\right)\right)^2 + r^2 n^4\right)^2} \end{pmatrix}$$

PERSPECTIVE CONIC PROJECTION
EQUIDISTANT MAPPING OF TWO STANDARD PARALLELS Φ_1,Φ_2, SOUTH POLE AS POINT OF PERSPECTIVE

right distance function

$$dS^2 = \frac{4R^2r^2n^2\left(a - rn^2\cot\left(\frac{\Phi_1+\Phi_2}{2}\right)\right)^2}{\left(\left(a - n^2r\cot\left(\frac{\Phi_1+\Phi_2}{2}\right)\right)^2 + r^2n^4\right)^2}d\alpha^2 + \frac{4R^2n^4a^2}{\left(\left(a - n^2r\cot\left(\frac{\Phi_1+\Phi_2}{2}\right)\right)^2 + r^2n^4\right)^2}dr^2$$

right principal stretches

$$\lambda_1 = \frac{2Rn\left(a - rn^2\cot\left(\frac{\Phi_1+\Phi_2}{2}\right)\right)}{\left(a - n^2r\cot\left(\frac{\Phi_1+\Phi_2}{2}\right)\right)^2 + r^2n^4}$$

$$\lambda_2 = \frac{2Ran^2}{\left(a - n^2r\cot\left(\frac{\Phi_1+\Phi_2}{2}\right)\right)^2 + r^2n^4}$$

right eigenvectors

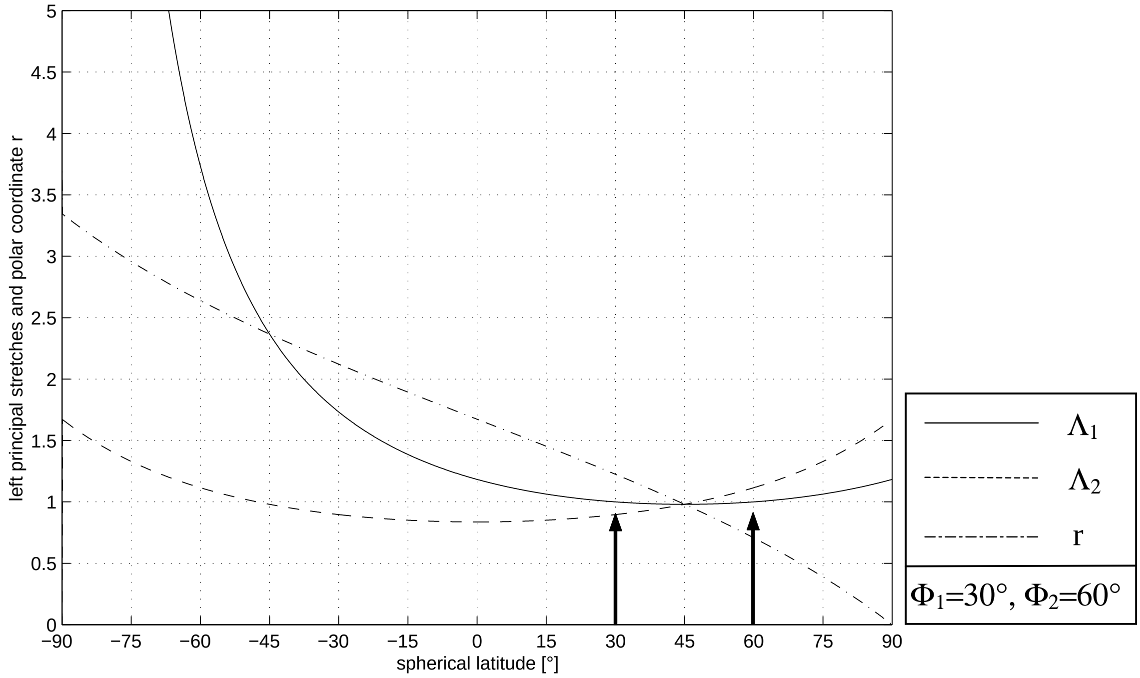
$$\boldsymbol{u_1} = \frac{1}{r}\boldsymbol{g_1} \qquad \boldsymbol{u_2} = \boldsymbol{g_2}$$

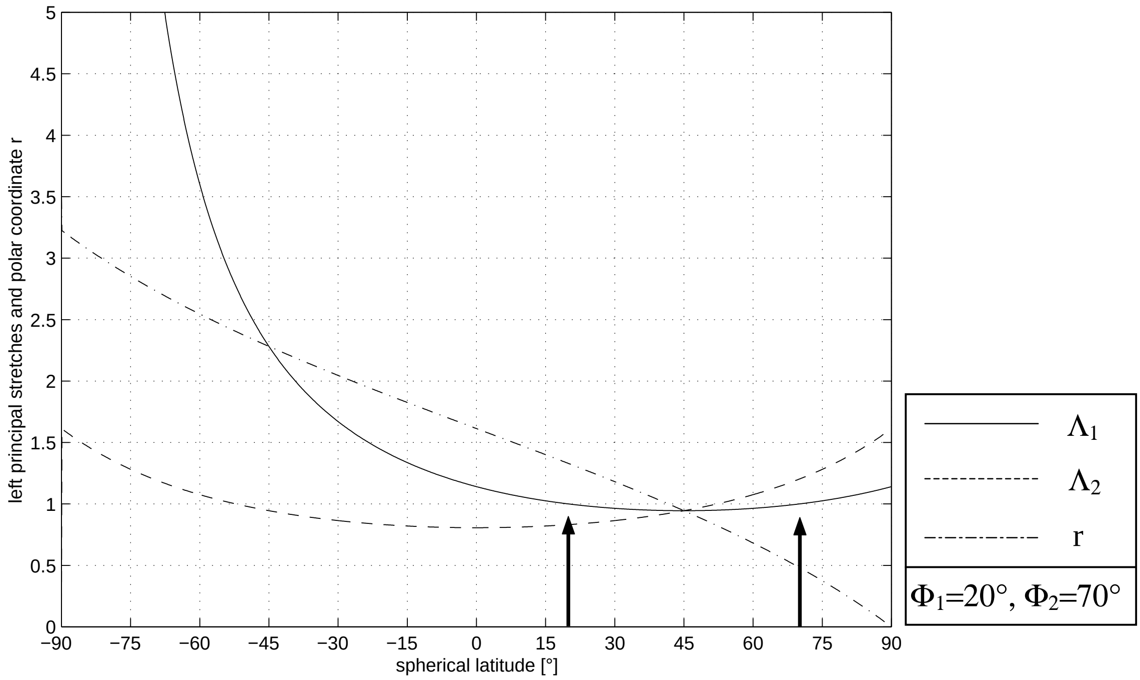
PERSPECTIVE CONIC PROJECTION

EQUIDISTANT MAPPING OF TWO STANDARD PARALLELS Φ_1,Φ_2,

SOUTH POLE AS POINT OF PERSPECTIVE

left principal stretches and polar coordinate r as function of the spherical latitude Φ





PERSPECTIVE CONIC PROJECTION
EQUIDISTANT MAPPING OF TWO STANDARD PARALLELS Φ_1,Φ_2, SOUTH POLE AS POINT OF PERSPECTIVE

minimum polar coordinate r_{min}

$$r_{\min} = r\left(\Phi = \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

maximum polar coordinate r_{max}

$$r_{\max} = r\left(\Phi = -\frac{\pi}{2}\right) = \frac{R\left(\cos(\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2}) + n\right)}{n^2 \cot(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2})}$$

angle of intersection of coordinate lines, left versus right

$A = 90°$ $\qquad$ $\alpha = 90°$

left angular shear

$\delta = 0°$

ORTHOGONAL PARALLEL PROJECTION

EQUIDISTANT MAPPING OF TWO STANDARD PARALLELS Φ_1, Φ_2,

LINES OF PROJECTION PARALLEL TO THE EQUATORIAL PLANE

cone constant

$$n = \sin\left(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}\right)$$

direct equations, polar coordinates

$$\alpha = n\Lambda$$

$$r = \frac{R\left(\cos\left(\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2}\right) - n\sin\Phi\right)}{n\cos\left(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}\right)}$$

direct equations, cartesian coordinates

$$x = \frac{R\left(\cos\left(\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2}\right) - n\sin\Phi\right)}{n\cos\left(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}\right)}\cos(n\Lambda)$$

$$y = \frac{R\left(\cos\left(\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2}\right) - n\sin\Phi\right)}{n\cos\left(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}\right)}\sin(n\Lambda)$$

left Jacobi matrix

$$\boldsymbol{J}_l = \begin{pmatrix} \alpha_\Lambda & \alpha_\Phi \\ r_\Lambda & r_\Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & -\dfrac{R\cos\Phi}{\cos\left(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}\right)} \end{pmatrix}$$

ORTHOGONAL PARALLEL PROJECTION

EQUIDISTANT MAPPING OF TWO STANDARD PARALLELS Φ_1, Φ_2, LINES OF PROJECTION PARALLEL TO THE EQUATORIAL PLANE

left Cauchy-Green deformation tensor

$$[c_{KL}] = \begin{pmatrix} \dfrac{R^2\left(\cos(\frac{\Phi_2-\Phi_1}{2}) - n\sin\Phi\right)^2}{\cos^2(\frac{\Phi_1+\Phi_2}{2})} & 0 \\ 0 & \dfrac{R^2\cos^2\Phi}{\cos^2(\frac{\Phi_1+\Phi_2}{2})} \end{pmatrix}$$

left distance function

$$ds^2 = \frac{R^2\left(\cos(\frac{\Phi_2-\Phi_1}{2}) - n\sin\Phi\right)^2}{\cos^2(\frac{\Phi_1+\Phi_2}{2})} d\Lambda^2 + \frac{R^2\cos^2\Phi}{\cos^2(\frac{\Phi_1+\Phi_2}{2})} d\Phi^2$$

left principal stretches

$$\Lambda_1 = \frac{\cos(\frac{\Phi_2-\Phi_1}{2}) - n\sin\Phi}{\cos(\frac{\Phi_1+\Phi_2}{2})\cos\Phi}$$

$$\Lambda_2 = \frac{\cos\Phi}{\cos(\frac{\Phi_1+\Phi_2}{2})}$$

left eigenvectors

$$\boldsymbol{U_1} = \frac{1}{R\cos\Phi}\boldsymbol{G_1} \qquad \boldsymbol{U_2} = \frac{1}{R}\boldsymbol{G_2}$$

maximum angular deformation

$$\Omega = 2\arcsin\left|\frac{\cos(\frac{\Phi_2-\Phi_1}{2}) - n\sin\Phi - \cos^2\Phi}{\cos(\frac{\Phi_2-\Phi_1}{2}) - n\sin\Phi + \cos^2\Phi}\right|$$

ORTHOGONAL PARALLEL PROJECTION
EQUIDISTANT MAPPING OF TWO STANDARD PARALLELS Φ_1,Φ_2, LINES OF PROJECTION PARALLEL TO THE EQUATORIAL PLANE

cone constant

$$n = \sin(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2})$$

inverse equations

$$\Lambda = \frac{\alpha}{n}$$

$$\Phi = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{R\cos(\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2}) - rn\cos(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2})}{Rn}\right)$$

right Jacobi matrix

$$\boldsymbol{J}_r = \begin{pmatrix} \Lambda_\alpha & \Lambda_r \\ \Phi_\alpha & \Phi_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & -\frac{n\cos(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2})}{\sqrt{R^2 n^2 - \left(R\cos(\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2}) - rn\cos(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2})\right)^2}} \end{pmatrix}$$

right Cauchy-Green deformation tensor

$$[C_{kl}] = \begin{pmatrix} \frac{R^2 n^2 - \left(R\cos(\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2}) - rn\cos(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2})\right)^2}{n^4} & 0 \\ 0 & \frac{R^2 n^2 \cos^2(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2})}{R^2 n^2 - \left(R\cos(\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2}) - rn\cos(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2})\right)^2} \end{pmatrix}$$

ORTHOGONAL PARALLEL PROJECTION
EQUIDISTANT MAPPING OF TWO STANDARD PARALLELS Φ_1,Φ_2, LINES OF PROJECTION PARALLEL TO THE EQUATORIAL PLANE

right distance function

$$dS^2 = \frac{R^2n^2 - \left(R\cos(\frac{\Phi_2-\Phi_1}{2}) - rn\cos(\frac{\Phi_1+\Phi_2}{2})\right)^2}{n^4}\,d\alpha^2$$
$$+\frac{R^2n^2\cos^2(\frac{\Phi_1+\Phi_2}{2})}{R^2n^2 - \left(R\cos(\frac{\Phi_2-\Phi_1}{2}) - rn\cos(\frac{\Phi_1+\Phi_2}{2})\right)^2}\,dr^2$$

right principal stretches

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{R^2n^2 - \left(R\cos(\frac{\Phi_2-\Phi_1}{2}) - rn\cos(\frac{\Phi_1+\Phi_2}{2})\right)^2}}{rn^2}$$

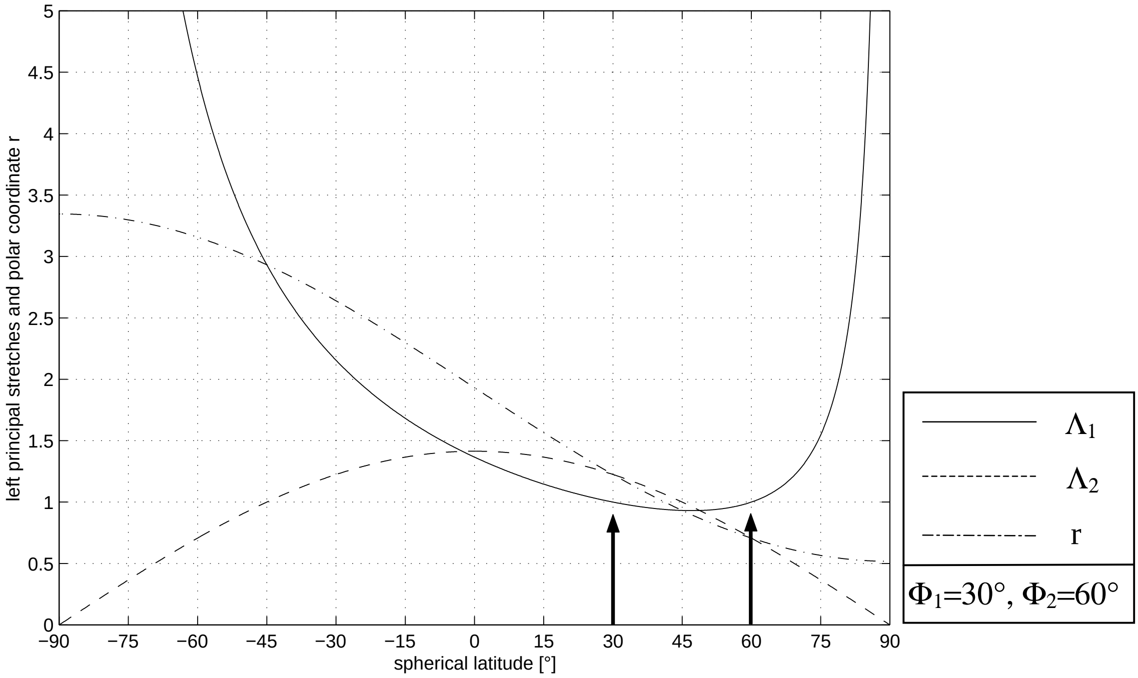
$$\lambda_2 = \frac{Rn\cos(\frac{\Phi_1+\Phi_2}{2})}{\sqrt{R^2n^2 - \left(R\cos(\frac{\Phi_2-\Phi_1}{2}) - rn\cos(\frac{\Phi_1+\Phi_2}{2})\right)^2}}$$

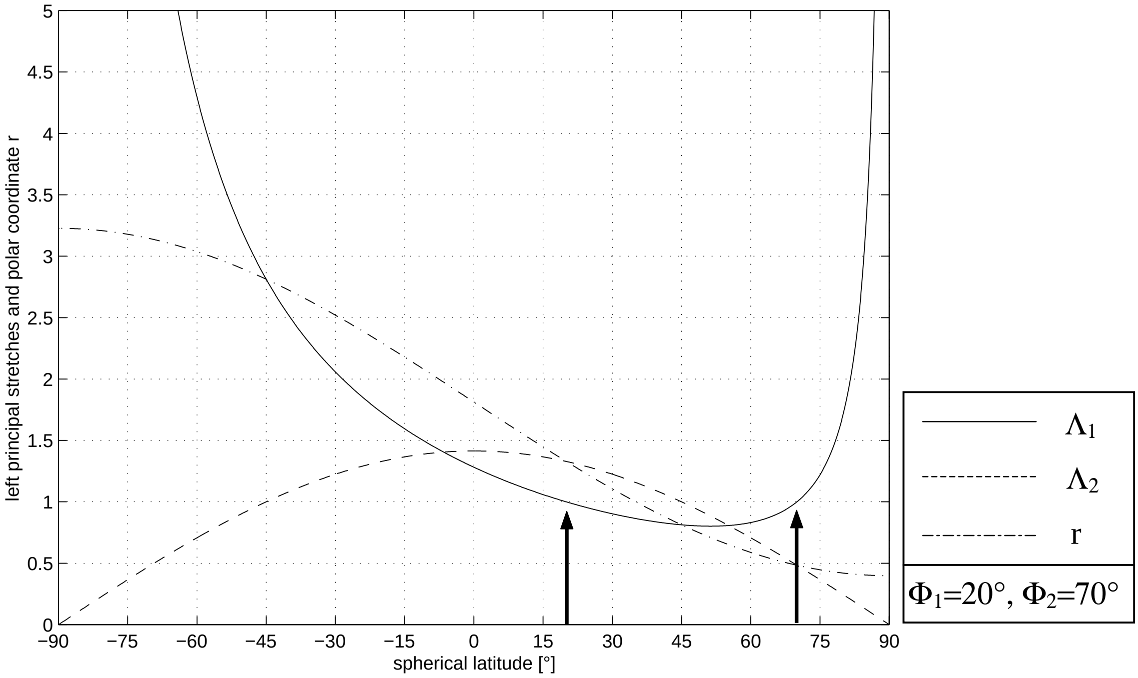
right eigenvectors

$$\boldsymbol{u_1} = \frac{1}{r}\boldsymbol{g_1} \qquad\qquad \boldsymbol{u_2} = \boldsymbol{g_2}$$

ORTHOGONAL PARALLEL PROJECTION
EQUIDISTANT MAPPING OF TWO STANDARD PARALLELS Φ_1,Φ_2, LINES OF PROJECTION PARALLEL TO THE EQUATORIAL PLANE

left principal stretches and polar coordinate r as function of the spherical latitude Φ





ORTHOGONAL PARALLEL PROJECTION

EQUIDISTANT MAPPING OF TWO STANDARD PARALLELS Φ_1,Φ_2, LINES OF PROJECTION PARALLEL TO THE EQUATORIAL PLANE

minimum polar coordinate r_{min}

$$r_{\min} = r\left(\Phi = \frac{\pi}{2}\right) = \frac{R\left(\cos(\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2}) - n\right)}{n\cos(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2})}$$

maximum polar coordinate r_{max}

$$r_{\max} = r\left(\Phi = -\frac{\pi}{2}\right) = \frac{R\left(\cos(\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2}) + n\right)}{n\cos(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2})}$$

angle of intersection of coordinate lines, left versus right

$A = 90°$ $\alpha = 90°$

left angular shear

$\delta = 0°$

ORTHOGONAL PARALLEL PROJECTION

EQUIDISTANT MAPPING OF ALL PARALLELS, LINES OF PROJECTION PARALLEL TO THE CENTRAL LINE OF THE CONE

cone constant

$$n = \sin(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2})$$

direct equations, polar coordinates

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha &= n\Lambda \\ r &= \frac{R\cos\Phi}{n} \end{aligned}}$$

direct equations, cartesian coordinates

$$x = \frac{R\cos\Phi}{n}\cos(n\Lambda)$$
$$y = \frac{R\cos\Phi}{n}\sin(n\Lambda)$$

left Jacobi matrix

$$\boldsymbol{J}_l = \begin{pmatrix} \alpha_\Lambda & \alpha_\Phi \\ r_\Lambda & r_\Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & -\dfrac{R\sin\Phi}{n} \end{pmatrix}$$

left Cauchy-Green deformation tensor

$$[c_{KL}] = \begin{pmatrix} R^2\cos^2\Phi & 0 \\ 0 & \dfrac{R^2\sin^2\Phi}{n^2} \end{pmatrix}$$

left distance function

$$ds^2 = R^2\cos^2\Phi d\Lambda^2 + \frac{R^2\sin^2\Phi}{n^2}d\Phi^2$$

ORTHOGONAL PARALLEL PROJECTION

EQUIDISTANT MAPPING OF ALL PARALLELS, LINES OF PROJECTION PARALLEL TO THE CENTRAL LINE OF THE CONE

left principal stretches

$$\Lambda_1 = 1$$

$$\Lambda_2 = \frac{\sin\Phi}{n}$$

left eigenvectors

$$\boldsymbol{U_1} = \frac{1}{R\cos\Phi}\boldsymbol{G_1} \qquad \boldsymbol{U_2} = \frac{1}{R}\boldsymbol{G_2}$$

maximum angular deformation

$$\Omega = 2\arcsin\left|\frac{n-\sin\Phi}{n+\sin\Phi}\right|$$

ORTHOGONAL PARALLEL PROJECTION
EQUIDISTANT MAPPING OF ALL PARALLELS,
LINES OF PROJECTION PARALLEL TO THE CENTRAL LINE OF THE CONE

cone constant

$$n = \sin(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2})$$

inverse equations

$$\Lambda = \frac{\alpha}{n}$$
$$\Phi = \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{rn}{R}\right)$$

right Jacobi matrix

$$\boldsymbol{J}_r = \begin{pmatrix} \Lambda_\alpha & \Lambda_r \\ \Phi_\alpha & \Phi_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & -\frac{n}{\sqrt{R^2 - r^2 n^2}} \end{pmatrix}$$

right Cauchy-Green deformation tensor

$$[C_{kl}] = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & \frac{R^2 n^2}{R^2 - r^2 n^2} \end{pmatrix}$$

right distance function

$$dS^2 = r^2 d\alpha^2 + \frac{R^2 n^2}{R^2 - r^2 n^2} dr^2$$

ORTHOGONAL PARALLEL PROJECTION
EQUIDISTANT MAPPING OF ALL PARALLELS,
LINES OF PROJECTION PARALLEL TO THE CENTRAL LINE OF THE CONE

right principal stretches

$$\lambda_1 = 1$$

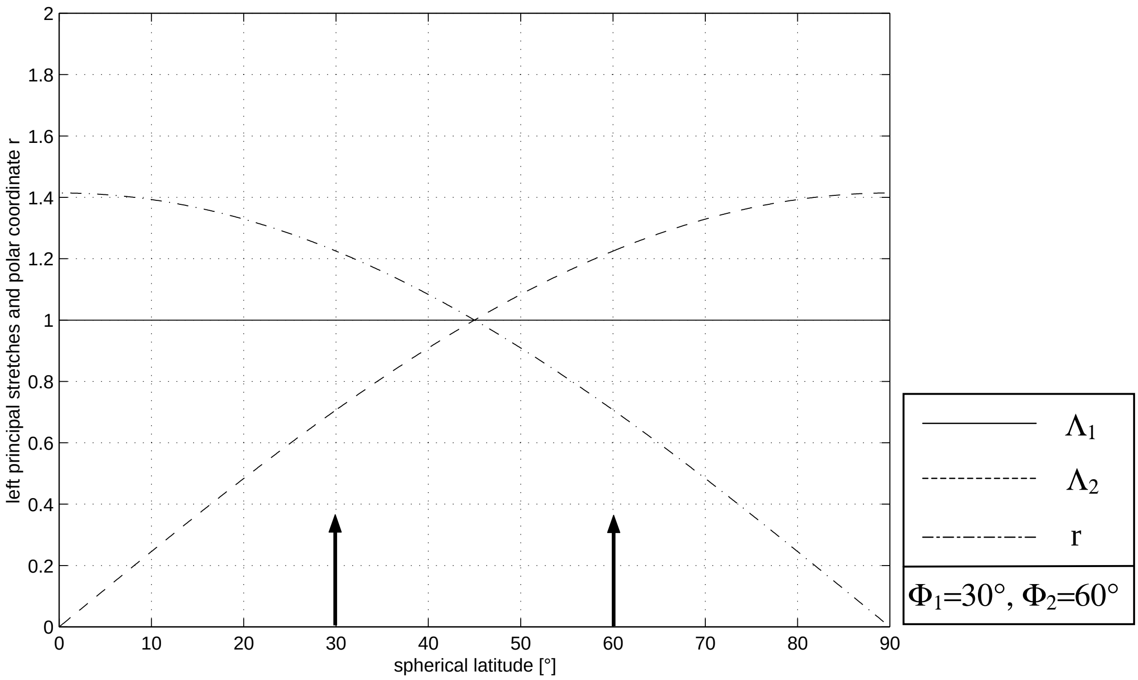
$$\lambda_2 = \frac{Rn}{\sqrt{R^2 - r^2 n^2}}$$

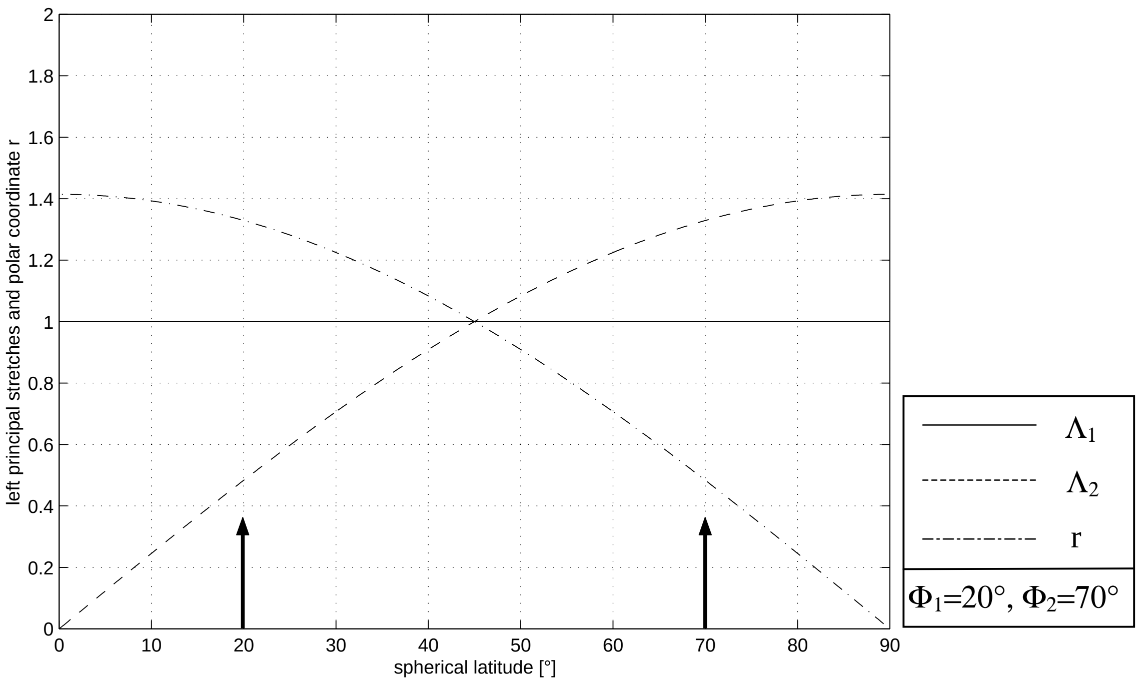
right eigenvectors

$$\boldsymbol{u_1} = \frac{1}{r}\boldsymbol{g_1} \qquad\qquad \boldsymbol{u_2} = \boldsymbol{g_2}$$

ORTHOGONAL PARALLEL PROJECTION
EQUIDISTANT MAPPING OF ALL PARALLELS,
LINES OF PROJECTION PARALLEL TO THE CENTRAL LINE OF THE CONE

left principal stretches and polar coordinate r as function of the spherical latitude Φ





ORTHOGONAL PARALLEL PROJECTION
EQUIDISTANT MAPPING OF ALL PARALLELS,
LINES OF PROJECTION PARALLEL TO THE CENTRAL LINE OF THE CONE

minimum polar coordinate r_{min}

$$r_{\min} = r\left(\Phi = \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

maximum polar coordinate r_{max}

$$r_{\max} = r(\Phi = 0) = \frac{R}{n}$$

angle of intersection of coordinate lines, left versus right

$A = 90°$ $\alpha = 90°$

left angular shear

$\delta = 0°$

KAPITEL 4

ALLGEMEINE ABBILDUNGSGLEICHUNGEN UND VERZERRUNGSMASSE FÜR KEGELABBILDUNGEN DES ROTATIONSELLIPSOIDS

Die **allgemeinen Abbildungsgleichungen** (*direct equations*) im Falle einer **Abbildung des Rotationsellipsoids auf eine Kegelfläche** lassen sich aus denselben Überlegungen gewinnen, wie sie bereits im Falle der Kegelabbildungen der Kugel (Kapitel 2) angestellt wurden. Sie lauten:

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha &= nL \\ r &= f(B) \end{aligned}}$$

n ... Projektionskonstante (*cone constant*) mit 0 < n < 1

Für $n = 0$ geht der Kegel in einen Zylinder über, für $n = 1$ hingegen ergeben sich die allgemeinen Abbildungsgleichungen einer Azimutalabbildung.

Analog zum Kugelfall lassen sich auch hier die Gleichungen der **inversen Abbildung** (*inverse equations*) angeben, die jedem Bildpunkt einen Punkt im Urbild zuordnen. Sie lauten:

$$\boxed{\begin{aligned} L &= \frac{\alpha}{n} \\ B &= f(r) \end{aligned}}$$

Bezüglich der Eindeutigkeit der direkten und inversen Abbildungsgleichungen lassen sich dieselben Aussagen machen wie im Kugelfall; auch hier handelt es sich um nicht umkehrbar eindeutige Abbildungen.

Auf den folgenden Seiten soll wiederum eine Deformationsanalyse für diesen Abbildungstyp durchgeführt werden.

Deformationsanalyse für die allgemeinen Abbildungsgleichungen von Kegelabbildungen des Rotationsellipsoids

Der **Metriktensor des Urbildes** (Rotationsellipsoid) besitzt folgendes Aussehen:

$$[G_{KL}] = \begin{pmatrix} \dfrac{A^2 \cos^2 B}{1 - E^2 \sin^2 B} & 0 \\ 0 & \dfrac{A^2 (1 - E^2)^2}{(1 - E^2 \sin^2 B)^3} \end{pmatrix}$$

Mit den Definitionen für den Meridiankrümmungsradius M und den Querkrümmungsradius N

$$M = \frac{A(1 - E^2)}{(1 - E^2 \sin^2 B)^{3/2}}$$

$$N = \frac{A}{\sqrt{1 - E^2 \sin^2 B}}$$

folgt unmittelbar:

$$[G_{KL}] = \begin{pmatrix} N^2 \cos^2 B & 0 \\ 0 & M^2 \end{pmatrix}$$

Da es sich beim Kegel um eine abwickelbare Fläche handelt, besitzt diese den Metriktensor

$$[g_{kl}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

bei Verwendung von kartesischen Koordinaten (x,y), beziehungsweise

$$[g_{kl}] = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

bei Verwendung von Polarkoordinaten (α, r) .

Im Falle der vorliegenden Kegelabbildung mit der allgemeinen Abbildungsvorschrift $r = f\,(\mathrm{B})$ sowie der Verwendung von Polarkoordinaten (α, r) im Bild lautet der **Metriktensor des Bildes**:

$$[g_{kl}] = \begin{pmatrix} f^2(B) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ausgangspunkt der nun folgenden Betrachtungen sind die bereits angegebenen allgemeinen Abbildungsgleichungen

$$\boxed{\begin{aligned}\alpha &= nL \\ r &= f(B)\end{aligned}} \qquad\qquad \boxed{\begin{aligned}L &= \frac{\alpha}{n} \\ B &= f(r)\end{aligned}}$$

"direkt"/"links"
"direct"/"left"

"invers"/"rechts"
"inverse"/"right"

Zur Berechnung der Deformationstensoren müssen zunächst die **Jakobi-Matrizen**, also die Matrizen der partiellen Ableitungen bereitgestellt werden:

$$\boldsymbol{J}_l = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \alpha}{\partial L} & \dfrac{\partial \alpha}{\partial B} \\ \dfrac{dr}{\partial L} & \dfrac{dr}{\partial B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_L & \alpha_B \\ r_L & r_B \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{J}_r = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial L}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial L}{\partial r} \\ \dfrac{dB}{\partial \alpha} & \dfrac{dB}{\partial r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_\alpha & L_r \\ B_\alpha & B_r \end{pmatrix}$$

Ausgehend von den obigen allgemeinen Abbildungsgleichungen erhält man somit:

$$\boldsymbol{J}_l = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & \dfrac{df(B)}{dB} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{J}_r = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{n} & 0 \\ 0 & \dfrac{df(r)}{dr} \end{pmatrix}$$

linke Jakobi-Matrix
(left Jacobi matrix)

rechte Jakobi-Matrix
(right Jacobi matrix)

Die **Cauchy-Greenschen Deformationstensoren** $[c_{KL}]$ und $[C_{kl}]$ berechnen sich nun zu

$$[c_{KL}] = \boldsymbol{J}_l^T [g_{kl}] \boldsymbol{J}_l = \begin{pmatrix} n^2 f^2(B) & 0 \\ 0 & \left(\dfrac{df(B)}{dB}\right)^2 \end{pmatrix}$$

linker Cauchy-Green-Deformationstensor
(left Cauchy-Green deformation tensor)

$$[C_{kl}] = \boldsymbol{J}_r^T [G_{KL}] \boldsymbol{J}_r = \begin{pmatrix} \dfrac{A^2 \sin^2\big(f(r)\big)}{n^2[1-E^2\cos^2\big(f(r)\big)]} & 0 \\ 0 & \dfrac{A^2(1-E^2)^2\left(\dfrac{df(r)}{dr}\right)^2}{[1-E^2\cos^2\big(f(r)\big)]^3} \end{pmatrix}$$

rechter Cauchy-Green-Deformationstensor
(right Cauchy-Green deformation tensor)

Mit Hilfe dieser beiden Deformationstensoren läßt sich das **Bogenelement *ds²* des Bildes** (Ebene) als Funktion der Urbildkoordinaten (L,B) sowie das **Bogenelement *dS²* des Urbildes** (Rotationsellipsoid) als Funktion der Bildkoordinaten (α,r) darstellen:

$$ds^2 = n^2 f^2(B) dL^2 + \left(\frac{df(B)}{dB}\right)^2 dB^2$$

linkes Bogenelement
(left distance function)

$$dS^2 = \frac{A^2 \sin^2\big(f(r)\big)}{n^2[1 - E^2 \cos^2\big(f(r)\big)]} d\alpha^2 + \frac{A^2 (1-E^2)^2 \left(\frac{df(r)}{dr}\right)^2}{[1 - E^2 \cos^2\big(f(r)\big)]^3} dr^2$$

rechtes Bogenelement
(right distance function)

Da sich die Parameterlinien des Urbilds auch im Bild orthogonal schneiden ($c_{12} = c_{21} = C_{12} = C_{21} = 0$), sind die **Hauptstreckungen Λ_1, Λ_2 und λ_1, λ_2** identisch mit den Streckungen entlang der Parameterlinien und so muß zur Bestimmung beider Größen nicht die allgemeine Eigenwertaufgabe ausgewertet werden; die Berechnungen vereinfachen sich zu:

$$\Lambda_1 = \sqrt{\frac{c_{11}}{G_{11}}} = \frac{nf(B)}{N(B)\cos B} \qquad \lambda_1 = \sqrt{\frac{C_{11}}{g_{11}}} = \frac{M\big(f(r)\big)\sin\big(f(r)\big)}{nr}$$

$$\Lambda_2 = \sqrt{\frac{c_{22}}{G_{22}}} = \frac{1}{M(B)}\left|\frac{df(B)}{dB}\right| \qquad \lambda_2 = \sqrt{\frac{C_{22}}{g_{22}}} = M\big(f(r)\big)\left|\frac{df(r)}{dr}\right|$$

M ... Meridiankrümmungsradius
N ... Querkrümmungsradius

linke Hauptstreckungen *(left principal stretches)*

rechte Hauptstreckungen *(right principal stretches)*

Die linken und rechten Hauptstreckungen stellen die Eigenwerte der jeweiligen Cauchy-Greenschen Deformationstensoren dar. Ausgehend von der in Kapitel 1 vorgestellten allgemeinen Eigenwertaufgabe lassen sich auch die zugehörigen Eigenvektoren $\boldsymbol{U_1},\boldsymbol{U_2}$ bzw. $\boldsymbol{u_1},\boldsymbol{u_2}$ bestimmen, welche als Basis die ebenfalls in Kapitel 1 hergeleiteten GAUSSschen Tangentenvektoren für das Rotationsellipsoid ($\boldsymbol{G_1},\boldsymbol{G_2}$) bzw. für die Ebene ($\boldsymbol{g_1},\boldsymbol{g_2}$) besitzen. Als Ergebnis erhält man:

$$\boldsymbol{U_1} = \frac{1}{\sqrt{G_{11}}}\boldsymbol{G_1} = \frac{\sqrt{1-E^2\sin^2 B}}{A\cos B}\boldsymbol{G_1}$$

$$\boldsymbol{U_2} = \frac{1}{\sqrt{G_{22}}}\boldsymbol{G_2} = \frac{(1-E^2\sin^2 B)^{3/2}}{A(1-E^2)}\boldsymbol{G_2}$$

linke Eigenvektoren
(left eigenvectors)

$$\boldsymbol{u_1} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\boldsymbol{g_1} = \frac{1}{r}\boldsymbol{g_1}$$

$$\boldsymbol{u_2} = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\boldsymbol{g_2} = \boldsymbol{g_2}$$

rechte Eigenvektoren
(right eigenvectors)

Aus den oben berechneten Hauptstreckungen kann eine **maximale Winkelverzerrung** Ω (*maximum angular deformation*) definiert werden. Sie wird an dieser Stelle nur für den Bildbereich angegeben und berechnet sich zu:

$$\Omega = 2\arcsin\left|\frac{\Lambda_1-\Lambda_2}{\Lambda_1+\Lambda_2}\right| = 2\arcsin\left|\frac{nM(B)f(B) - N(B)\left|\frac{df(B)}{dB}\right|\cos B}{nM(B)f(B) + N(B)\left|\frac{df(B)}{dB}\right|\cos B}\right|$$

Unter **Scherung** δ (*left angular shear*) versteht man die Differenz aus dem Winkel zwischen den Parameterlinien im Bild und dem Winkel zwischen den Parameterlinien im Urbild. Sei A der Winkel zwischen den Parameterlinien im Urbild und α der Winkel zwischen den Parameterlinien im Bild, so gilt für die Scherung δ:

$$\delta = A - \alpha$$

$$\delta = \arccos\frac{G_{12}}{\sqrt{G_{11}G_{22}}} - \arccos\frac{c_{12}}{\sqrt{c_{11}c_{22}}}$$

Für die hier behandelten Kegelabbildungen gilt stets $c_{12} = G_{12} = 0$, so daß für alle Abbildungen die Scherung δ den Wert Null besitzt.

Im folgenden Kapitel werden, ausgehend von den jeweiligen direkten Abbildungsgleichungen, die eben berechneten Größen für eine Reihe spezieller Kegelabbildungen des Rotationsellipsoids explizit angegeben. Auf die entsprechenden Berechnungen für den Urbildbereich wird verzichtet, da sich die vorliegenden Abbildungsgleichungen nicht ohne weiteres invertieren lassen.

Ferner werden für jede Abbildung der minimale und maximale Bildradius (*minimum and maximum polar coordinate r*) sowie der Schnittwinkel der Parameterlinien im Bild und im Urbild angegeben (*angle of intersection of coordinate lines, left versus right*). Zu jeder speziellen Abbildung wird ferner ein Diagramm angefertigt, in dem für den Bildbereich die Hauptstreckungen Λ_1 und Λ_2 sowie der Bildradius r als Funktion der ellipsoidnormalen Breite B aufgetragen sind (*left principal stretches and polar coordinate r as function of the ellipsoidal normal latitude B*). Die große Halbachse des Rotationsellipsoids wurde dabei zu Eins gesetzt, als Quadrat der ersten numerischen Exzentrizität wird die des WGS 84 – Ellipsoids zugrunde gelegt ($E^2 = 0.00669437999013$). Zudem werden mit Hilfe von MATLAB für die in der Mapping-Toolbox zur Verfügung stehenden Abbildungen Weltkarten erstellt. Jeder Weltkarte wird eine zweite Karte gegenübergestellt, in der die in der Karte bestehenden Verzerrungsverhältnisse mit Hilfe von TISSOT-Ellipsen (*tissot indicatrices*) dargestellt werden. Diese Ellipsen besitzen als Halbachsen die Hauptstreckungen Λ_1 und Λ_2. Für beide Karten wird als Quadrat der ersten numerischen Exzentrizität der Wert $E^2 = 0{,}0067$ gewählt, obwohl der Unterschied zum Kugelfall mit $E^2 = 0$ beim vorliegenden Abbildungsmaßstab nicht erkennbar ist.

KAPITEL 5

SPEZIELLE KEGELABBILDUNGEN DES ROTATIONSELLIPSOIDS

5-1. KONFORME KEGELABBILDUNGEN DES ROTATIONSELLIPSOIDS

Die Eigenschaften und Einsatzgebiete der in diesem Abschnitt behandelten speziellen Kegelabbildungen des Rotationsellipsoids sind identisch mit denen für den Kugelfall.

Die nachfolgend beschriebenen Eigenschaften der einzelnen Abbildungen gelten wiederum nur für den Fall einer normalständigen Kegelabbildung, die als Hauptpunkt den Nord- oder Südpol der Kugel besitzt. Für die zu jeder Abbildung gehörenden Diagramme und Weltkarten wird als Hauptpunkt der Nordpol gewählt.

An dieser Stelle werden sämtliche Einsatzgebiete der behandelten Abbildungen aufgeführt, unabhängig davon, ob als Urbild die Kugel oder das Rotationsellipsoid zugrunde liegt.

Bei den hier behandelten speziellen Kegelabbildungen des Rotationsellipsoids handelt es sich um die folgenden konformen Abbildungen:

KONFORME KEGELABBILDUNG, ÄQUIDISTANT AUF DEN BEIDEN STANDARDPARALLELKREISEN B_1 UND B_2	
Andere Bezeichnung	→ **LAMBERT konforme Kegelabbildung** → Orthomorphe Kegelabbildung (conical orthomorphic)
Eigenschaften	Sämtliche Parallelkreise, mit Ausnahme der Pole, werden als Bogenstücke konzentrischer Kreise abgebildet. Die Abstände benachbarter Parallelkreise werden umso größer, je weiter man sich von den beiden Standardparallelen nach Norden bzw. nach Süden entfernt. Die Meridiane werden als Geraden abgebildet und schneiden die Parallelkreise im rechten Winkel. Der Hauptpunkt (als einer der beiden Pole) wird als Punkt abgebildet, der andere Pol wird im Unendlichen abgebildet. Die beiden gewählten Standardparallelkreise werden äquidistant abgebildet, besitzen also den Maßstab 1. Entlang aller anderen Parallelkreise ist der Maßstab zwar verschieden von 1, aber konstant. Die Abbildung ist mit Ausnahme der beiden Pole überall konform.
Einsatzgebiete	→ Weltluftfahrtkarte 1 : 1 000 000 → Luftfahrtkarten 1 : 500 000 → Übersichtskarten aller Staaten der USA → Karten der Aläuten-Inselkette → Mondkarten → Karten von Merkur, Mars sowie von einigen Jupitermonden
Ursprung	Entwickelt von Johann Heinrich Lambert (1728-1777) im Jahre 1772. Er stellte die Abbildungsgleichungen sowohl für die Kugel als auch für das Rotationsellipsoid vor [29].

KONFORME KEGELABBILDUNG, ÄQUIDISTANT AUF DEM STANDARDPARALLELKREIS B_0	
Die Abbildungsgleichungen für den Entwurf mit einem Standardparallelkreis gehen aus den Gleichungen für zwei Standardparallelkreise hervor, indem man z.B. den Grenzübergang $B_1 \rightarrow B_2$ durchführt.	
Andere Bezeichnung	→ **LAMBERT konforme Kegelabbildung** → Orthomorphe Kegelabbildung (conical orthomorphic)
Eigenschaften	Sämtliche Parallelkreise, mit Ausnahme der Pole, werden als Bogenstücke konzentrischer Kreise abgebildet. Die Abstände benachbarter Parallelkreise werden umso größer, je weiter man sich vom Standardparallelkreis nach Norden bzw. nach Süden entfernt. Die Meridiane werden als Geraden abgebildet und schneiden die Parallelkreise im rechten Winkel. Der Hauptpunkt (als einer der beiden Pole) wird als Punkt abgebildet, der andere Pol wird im Unendlichen abgebildet. Der gewählte Standardparallelkreis wird äquidistant abgebildet, besitzt also den Maßstab 1. Entlang aller anderen Parallelkreise ist der Maßstab zwar verschieden von 1, aber konstant. Die Abbildung ist mit Ausnahme der beiden Pole überall konform.
Einsatzgebiete	---
Ursprung	Entwickelt von Johann Heinrich Lambert (1728-1777) im Jahre 1772 [29].

CONFORMAL CONIC PROJECTION

EQUIDISTANT MAPPING OF TWO STANDARD PARALLELS B_1, B_2

LAMBERT CONFORMAL CONIC PROJECTION

cone constant

$$n = \frac{1}{2} \frac{\ln\left(\frac{(1-E^2\sin^2 B_1)\cos^2 B_2}{(1-E^2\sin^2 B_2)\cos^2 B_1}\right)}{\ln\left(\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{B_2}{2})\right)-\ln\left(\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{B_1}{2})\right)+\frac{E}{2}\ln\left(\frac{(1+E\sin B_2)(1-E\sin B_1)}{(1-E\sin B_2)(1+E\sin B_1)}\right)}$$

direct equations, polar coordinates

$$\alpha = nL$$

$$r = \frac{A\cos B_1}{n\sqrt{1-E^2\sin^2 B_1}}\left[\frac{\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{B}{2})\left(\frac{1+E\sin B}{1-E\sin B}\right)^{E/2}}{\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{B_1}{2})\left(\frac{1+E\sin B_1}{1-E\sin B_1}\right)^{E/2}}\right]^n = \frac{A\cos B_1}{n\sqrt{1-E^2\sin^2 B_1}}[\cdots]^n$$

direct equations, cartesian coordinates

$$x = \frac{A\cos B_1}{n\sqrt{1-E^2\sin^2 B_1}}\left[\frac{\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{B}{2})\left(\frac{1+E\sin B}{1-E\sin B}\right)^{E/2}}{\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{B_1}{2})\left(\frac{1+E\sin B_1}{1-E\sin B_1}\right)^{E/2}}\right]^n \cos(nL) = \frac{A\cos B_1}{n\sqrt{1-E^2\sin^2 B_1}}[\cdots]^n\cos(nL)$$

$$y = \frac{A\cos B_1}{n\sqrt{1-E^2\sin^2 B_1}}\left[\frac{\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{B}{2})\left(\frac{1+E\sin B}{1-E\sin B}\right)^{E/2}}{\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{B_1}{2})\left(\frac{1+E\sin B_1}{1-E\sin B_1}\right)^{E/2}}\right]^n \sin(nL) = \frac{A\cos B_1}{n\sqrt{1-E^2\sin^2 B_1}}[\cdots]^n\sin(nL)$$

CONFORMAL CONIC PROJECTION
EQUIDISTANT MAPPING OF TWO STANDARD PARALLELS B_1, B_2

left Jacobi matrix

$$\boldsymbol{J}_l = \begin{pmatrix} \alpha_L & \alpha_B \\ r_L & r_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & -\dfrac{A\cos B_1(1-E^2)}{\sqrt{1-E^2\sin^2 B_1}\cos B(1-E^2\sin^2 B)}[\cdots]^n \end{pmatrix}$$

left Cauchy-Green deformation tensor

$$[c_{KL}] = \begin{pmatrix} \dfrac{A^2\cos^2 B_1}{(1-E^2\sin^2 B_1)}[\cdots]^{2n} & 0 \\ 0 & \dfrac{A^2\cos^2 B_1(1-E^2)^2}{(1-E^2\sin^2 B_1)\cos^2 B(1-E^2\sin^2 B)^2}[\cdots]^{2n} \end{pmatrix}$$

left distance function

$$ds^2 = \frac{A^2\cos^2 B_1}{(1-E^2\sin^2 B_1)}[\cdots]^{2n}\,dL^2 + \frac{A^2\cos^2 B_1(1-E^2)^2}{(1-E^2\sin^2 B_1)\cos^2 B(1-E^2\sin^2 B)^2}[\cdots]^{2n}\,dB^2$$

left principal stretches

$$\Lambda_1 = \frac{\cos B_1\sqrt{1-E^2\sin^2 B}[\cdots]^n}{\sqrt{1-E^2\sin^2 B_1}\cos B}$$

$$\Lambda_2 = \frac{\cos B_1\sqrt{1-E^2\sin^2 B}[\cdots]^n}{\sqrt{1-E^2\sin^2 B_1}\cos B}$$

left eigenvectors

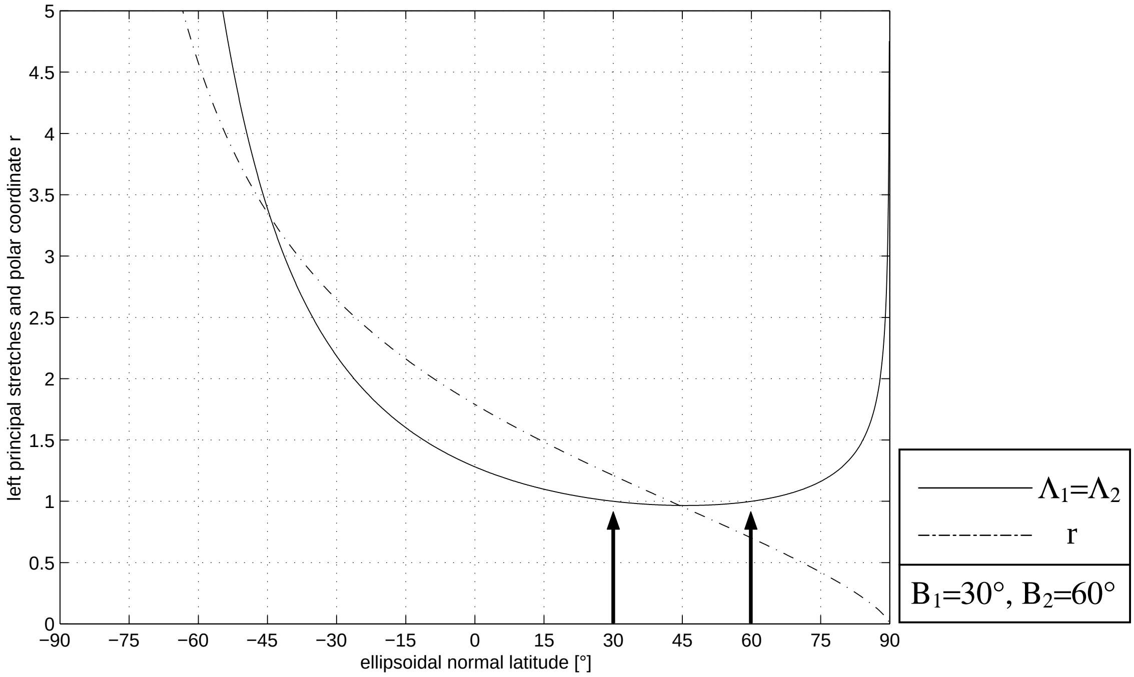
$$\boldsymbol{U_1} = \frac{\sqrt{1-E^2\sin^2 B}}{A\cos B}\boldsymbol{G_1} \qquad \boldsymbol{U_2} = \frac{(1-E^2\sin^2 B)^{3/2}}{A(1-E^2)}\boldsymbol{G_2}$$

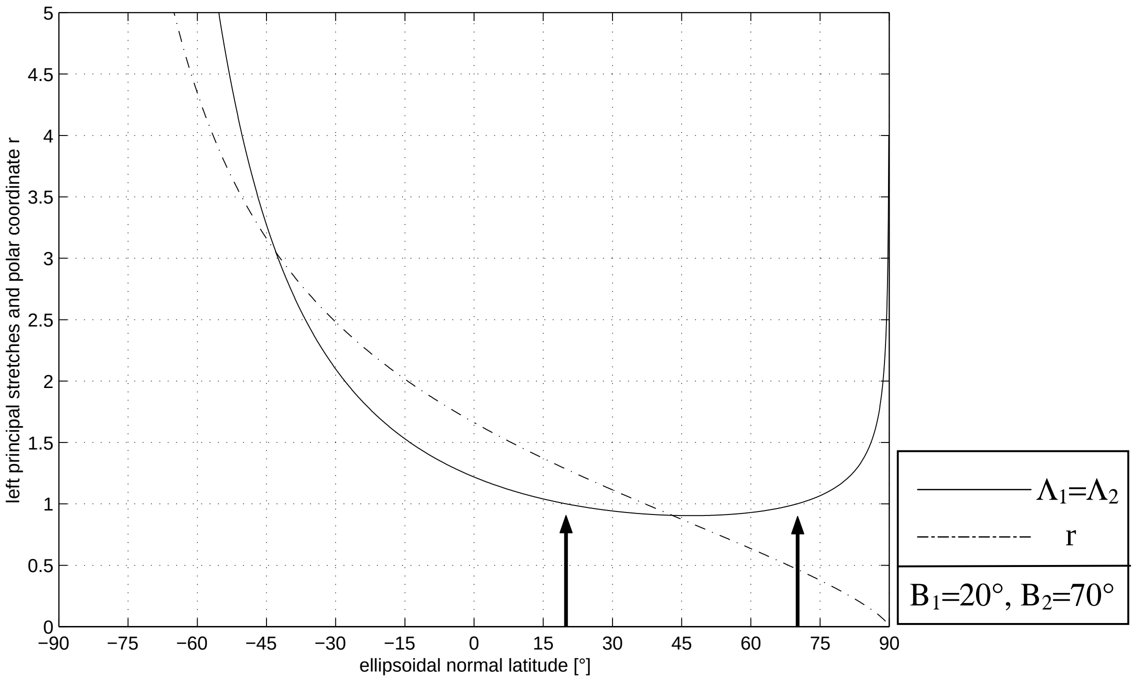
maximum angular deformation

$$\Omega = 0$$

CONFORMAL CONIC PROJECTION
EQUIDISTANT MAPPING OF TWO STANDARD PARALLELS B_1, B_2

left principal stretches and polar coordinate r as function of the ellipsoidal normal latitude B





CONFORMAL CONIC PROJECTION
EQUIDISTANT MAPPING OF TWO STANDARD PARALLELS B_1, B_2

minimum polar coordinate r_{min}

$$r_{\min} = r(B = \frac{\pi}{2}) = 0$$

maximum polar coordinate r_{max}

$$r_{\max} = r(B = -\frac{\pi}{2}) = \infty$$

angle of intersection of coordinate lines, left versus right

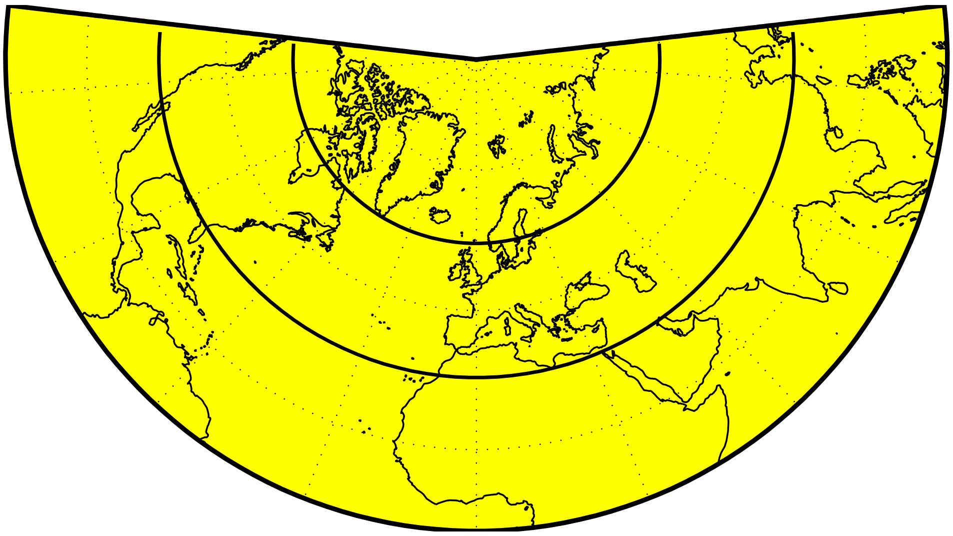
$A = 90°$ $\quad\quad$ $\alpha = 90°$

left angular shear

$\delta = 0°$

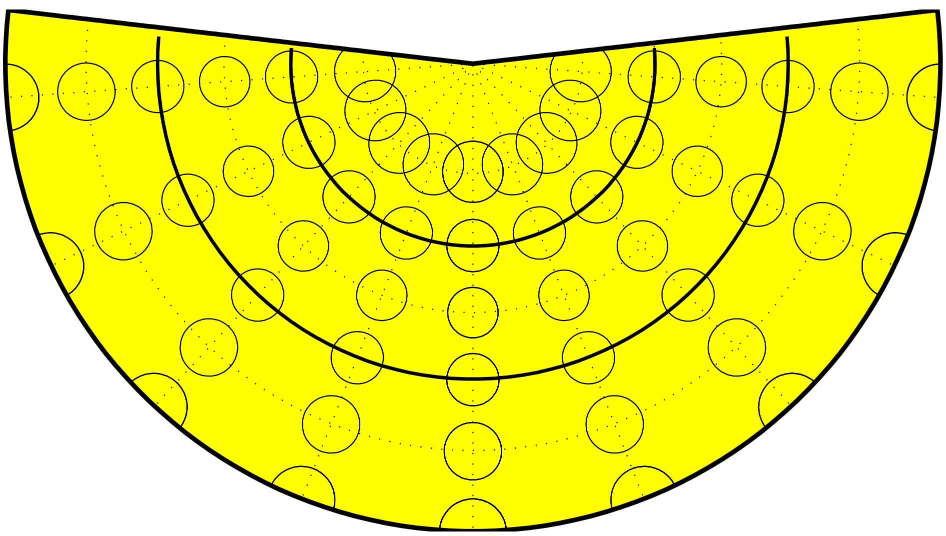
CONFORMAL CONIC PROJECTION

EQUIDISTANT MAPPING OF TWO STANDARD PARALLELS B_1,B_2



Lambert conformal conic projection: world map and left tissot indicatrices

(30° x 15° - graticule, standard parallels B_1=30°, B_2=60°)



CONFORMAL CONIC PROJECTION

EQUIDISTANT MAPPING OF THE STANDARD PARALLEL B_0

LAMBERT CONFORMAL CONIC PROJECTION

cone constant

$$n = \sin B_0$$

direct equations, polar coordinates

$$\alpha = nL$$

$$r = \frac{A}{\tan B_0 \sqrt{1 - E^2 \sin^2 B_0}} \left[\frac{\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{B}{2})}{\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{B_0}{2})} \left(\frac{(1 + E \sin B)\sqrt{1 - E^2 \sin^2 B_0}}{(1 + E \sin B_0)\sqrt{1 - E^2 \sin^2 B}} \right)^E \right]^n$$

$$= \frac{A}{\tan B_0 \sqrt{1 - E^2 \sin^2 B_0}} [\cdots]^n$$

direct equations, cartesian coordinates

$$x = \frac{A}{\tan B_0 \sqrt{1 - E^2 \sin^2 B_0}} \left[\frac{\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{B}{2})}{\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{B_0}{2})} \left(\frac{(1 + E \sin B)\sqrt{1 - E^2 \sin^2 B_0}}{(1 + E \sin B_0)\sqrt{1 - E^2 \sin^2 B}} \right)^E \right]^n \cos(nL)$$

$$= \frac{A}{\tan B_0 \sqrt{1 - E^2 \sin^2 B_0}} [\cdots]^n \cos(nL)$$

$$y = \frac{A}{\tan B_0 \sqrt{1 - E^2 \sin^2 B_0}} \left[\frac{\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{B}{2})}{\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{B_0}{2})} \left(\frac{(1 + E \sin B)\sqrt{1 - E^2 \sin^2 B_0}}{(1 + E \sin B_0)\sqrt{1 - E^2 \sin^2 B}} \right)^E \right]^n \sin(nL)$$

$$= \frac{A}{\tan B_0 \sqrt{1 - E^2 \sin^2 B_0}} [\cdots]^n \sin(nL)$$

CONFORMAL CONIC PROJECTION
EQUIDISTANT MAPPING OF THE STANDARD PARALLEL B_0

left Jacobi matrix

$$\boldsymbol{J}_l = \begin{pmatrix} \alpha_L & \alpha_B \\ r_L & r_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & -\dfrac{An(1-E^2)}{\tan B_0 \sqrt{1-E^2 \sin^2 B_0}\, \cos B (1-E^2 \sin^2 B)} [\cdots]^n \end{pmatrix}$$

left Cauchy-Green deformation tensor

$$[c_{KL}] = \begin{pmatrix} \dfrac{A^2 n^2}{\tan^2 B_0 (1-E^2 \sin^2 B_0)} [\cdots]^{2n} & 0 \\ 0 & \dfrac{A^2 n^2 (1-E^2)^2}{\tan^2 B_0 (1-E^2 \sin^2 B_0) \cos^2 B (1-E^2 \sin^2 B)^2} [\cdots]^{2n} \end{pmatrix}$$

left distance function

$$ds^2 = \frac{A^2 n^2}{\tan^2 B_0 (1-E^2 \sin^2 B_0)} [\cdots]^{2n}\, dL^2 + \frac{A^2 n^2 (1-E^2)^2}{\tan^2 B_0 (1-E^2 \sin^2 B_0) \cos^2 B (1-E^2 \sin^2 B)^2} [\cdots]^{2n}\, dB^2$$

left principal stretches

$$\Lambda_1 = \frac{n\sqrt{1-E^2 \sin^2 B}\,[\cdots]^n}{\tan B_0 \sqrt{1-E^2 \sin^2 B_0}\, \cos B}$$

$$\Lambda_2 = \frac{n\sqrt{1-E^2 \sin^2 B}\,[\cdots]^n}{\tan B_0 \sqrt{1-E^2 \sin^2 B_0}\, \cos B}$$

left eigenvectors

$$\boldsymbol{U_1} = \frac{\sqrt{1-E^2 \sin^2 B}}{A \cos B} \boldsymbol{G_1} \qquad \boldsymbol{U_2} = \frac{(1-E^2 \sin^2 B)^{3/2}}{A(1-E^2)} \boldsymbol{G_2}$$

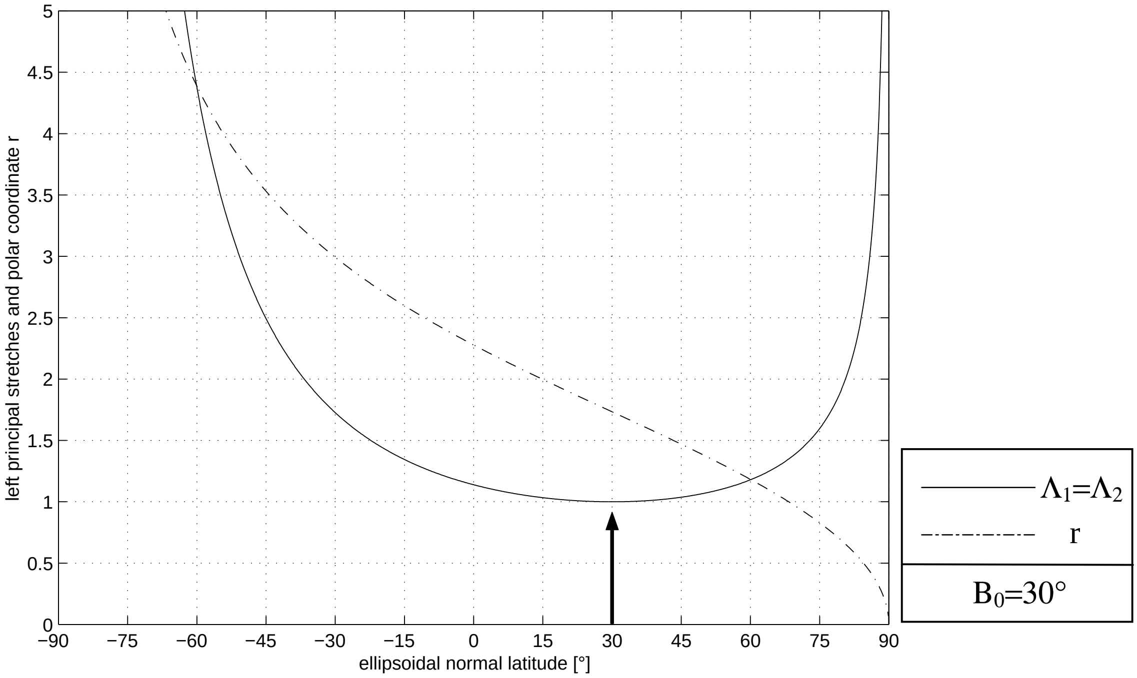
maximum angular deformation

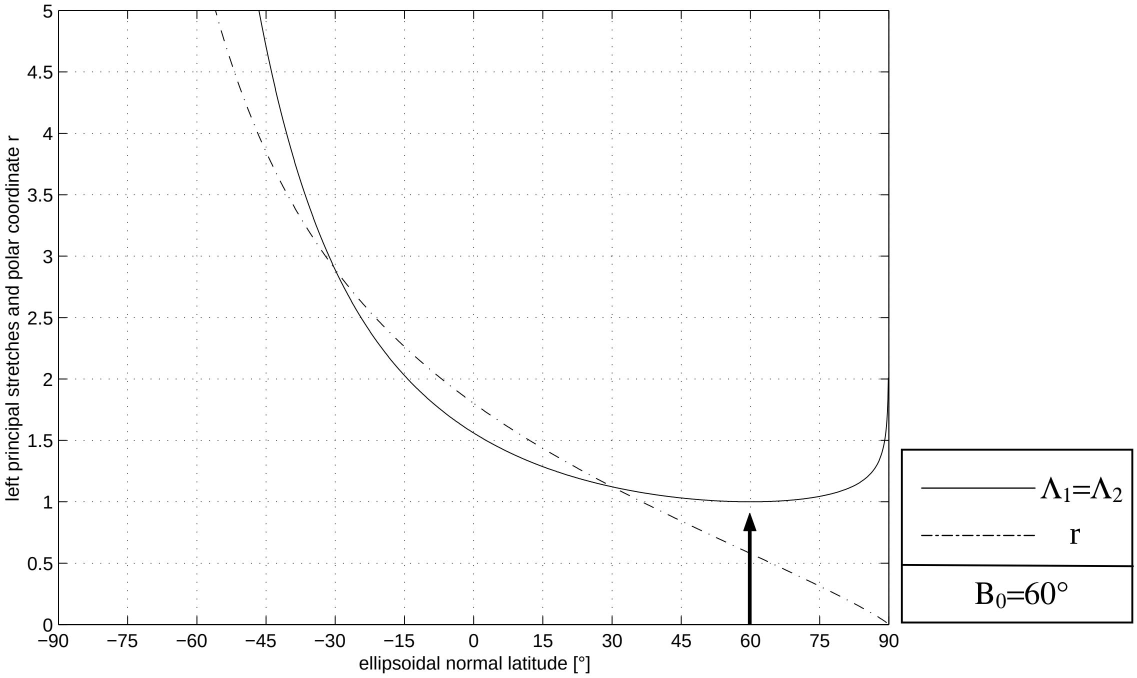
$$\Omega = 0$$

CONFORMAL CONIC PROJECTION

EQUIDISTANT MAPPING OF THE STANDARD PARALLEL B_0

left principal stretches and polar coordinate r as function of the ellipsoidal normal latitude B





CONFORMAL CONIC PROJECTION

EQUIDISTANT MAPPING OF THE STANDARD PARALLEL B_0

minimum polar coordinate $\mathbf{r_{min}}$

$$r_{\min} = r(B = \frac{\pi}{2}) = 0$$

maximum polar coordinate $\mathbf{r_{max}}$

$$r_{\max} = r(B = -\frac{\pi}{2}) = \infty$$

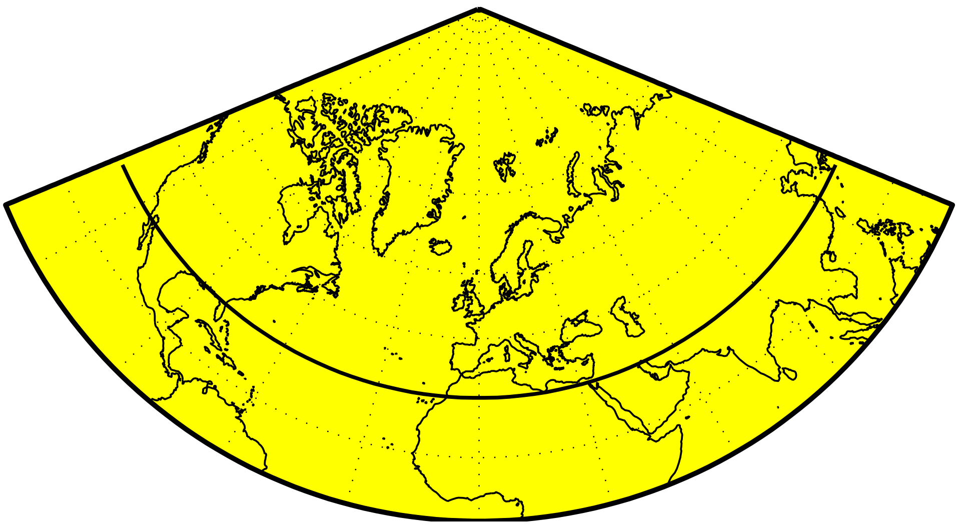
angle of intersection of coordinate lines, left versus right

$A = 90°$ $\alpha = 90°$

left angular shear

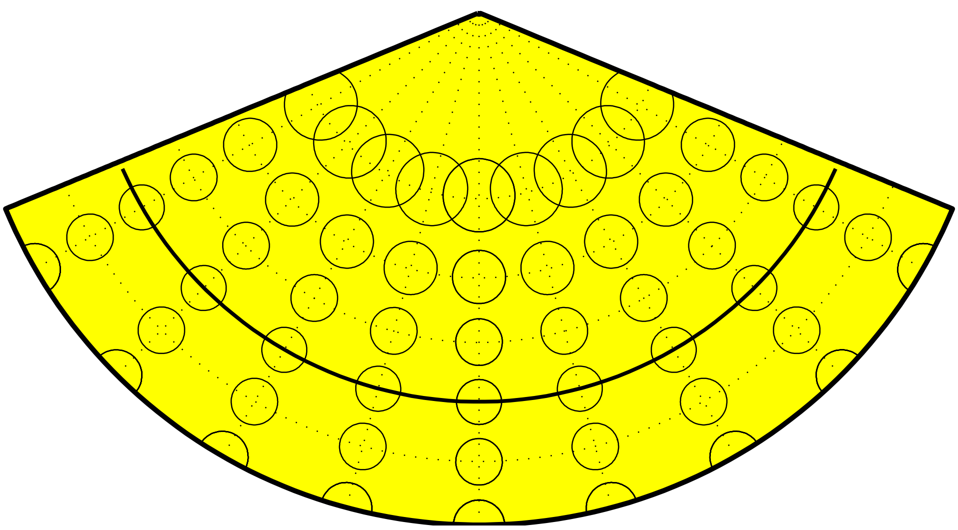
$\delta = 0°$

CONFORMAL CONIC PROJECTION
EQUIDISTANT MAPPING OF THE STANDARD PARALLEL B_0



Lambert conformal conic projection: world map and left tissot indicatrices

(30° x 15° - graticule, standard parallel B_0=30°)



5-2. FLÄCHENTREUE KEGELABBILDUNGEN DES ROTATIONSELLIPSOIDS

Die Eigenschaften und Einsatzgebiete der in diesem Abschnitt behandelten speziellen Kegelabbildungen des Rotationsellipsoids sind identisch mit denen für den Kugelfall.

Die nachfolgend beschriebenen Eigenschaften der einzelnen Abbildungen gelten wiederum nur für den Fall einer normalständigen Kegelabbildung, die als Hauptpunkt den Nord- oder Südpol der Kugel besitzt. Für die zu jeder Abbildung gehörenden Diagramme und Weltkarten wird als Hauptpunkt der Nordpol gewählt.

Wiederum werden sämtliche Einsatzgebiete der behandelten Abbildungen aufgeführt, unabhängig davon, ob als Urbild die Kugel oder das Rotationsellipsoid zugrunde liegt.

Bei den hier behandelten speziellen Kegelabbildungen des Rotationsellipsoids handelt es sich um die folgenden flächentreuen Abbildungen:

FLÄCHENTREUE KEGELABBILDUNG, ÄQUIDISTANT UND KONFORM AUF DEN BEIDEN STANDARDPARALLELKREISEN B_1 UND B_2	
Andere Bezeichnung	**ALBERS flächentreue Kegelabbildung**
Eigenschaften	Sämtliche Parallelkreise, auch die beiden Pole, werden als Bogenstücke konzentrischer Kreise abgebildet. Die Abstände benachbarter Parallelkreise werden umso kleiner, je weiter man sich von den beiden Standardparallelen nach Norden bzw. nach Süden entfernt. Im Gebiet zwischen beiden sind diese Abstände am größten. Die Meridiane werden als Geraden abgebildet und schneiden die Parallelkreise im rechten Winkel. Die beiden gewählten Standardparallelkreise werden äquidistant abgebildet, besitzen also den Maßstab 1. Entlang aller anderen Parallelkreise ist der Maßstab zwar verschieden von 1, aber konstant. Der Maßstabsfaktor in einem beliebigen Meridianpunkt ist der Kehrwert des Maßstabsfaktors in Richtung des zugehörigen Parallelkreises. Beide Standardparallelen werden zudem konform abgebildet.
Einsatzgebiete	→ alle Einzelkarten des „National Atlas“ der USA (1970) → Karten der USA mit Maßstäben 1 : 2 500 000 oder kleiner → Tektonische Karte der USA → Geologische Karte der USA → Karten von Indien mit Maßstäben < 1 : 1 000 000 → Karten von Teilen Afrikas und Europas
Ursprung	Entwickelt von Heinrich Christian Albers (1773–1833) im Jahre 1805 für die Kugel [2]. Die ursprünglichen Abbildungsgleichungen für das Rotationsellipsoid wurden 1927 von Oscar S. Adams in nicht geschlossener Form (Reihendarstellung) vorgestellt [1].

FLÄCHENTREUE KEGELABBILDUNG, ÄQUIDISTANT UND KONFORM AUF DEM STANDARDPARALLELKREIS B_0	
Die Abbildungsgleichungen für den Entwurf mit einem Standardparallelkreis gehen aus den Gleichungen für zwei Standardparallelkreise hervor, indem man $B_1=B_2=B_0$ setzt. Dieser Fall besitzt so gut wie keine praktische Bedeutung.	
Andere Bezeichnung	**ALBERS flächentreue Kegelabbildung**
Eigenschaften	Sämtliche Parallelkreise, auch die beiden Pole, werden als Bogenstücke konzentrischer Kreise abgebildet. Die Abstände benachbarter Parallelkreise werden umso kleiner, je weiter man sich vom Standardparallelkreis nach Norden bzw. nach Süden entfernt. Die Meridiane werden als Geraden abgebildet und schneiden die Parallelkreise im rechten Winkel. Der gewählte Standardparallelkreis wird äquidistant abgebildet, besitzt also den Maßstab 1. Entlang aller anderen Parallelkreise ist der Maßstab zwar verschieden von 1, aber konstant. Der Maßstabsfaktor in einem beliebigen Meridianpunkt ist der Kehrwert des Maßstabsfaktors in Richtung des zugehörigen Parallelkreises. Der Standardparallelkreis wird zudem konform abgebildet.
Einsatzgebiete	---
Ursprung	Entwickelt von Heinrich Christian Albers (1773–1833) im Jahre 1805 für die Kugel [2]. Die ursprünglichen Abbildungsgleichungen für das Rotationsellipsoid wurden 1927 von Oscar S. Adams in nicht geschlossener Form (Reihendarstellung) vorgestellt [1].

FLÄCHENTREUE KEGELABBILDUNG, PUNKTARTIGES BILD DES HAUPTPUNKTES, ÄQUIDISTANT UND KONFORM AUF DEM STANDARDPARALLELKREIS B_1	
Sonderfall der ALBERS flächentreuen Kegelabbildung mit 2 Standardparallelen, der dadurch entsteht, daß für eine der beiden Standardparallelen der Nordpol (B = 90°) gewählt wird.	
Andere Bezeichnung	**LAMBERT flächentreue Kegelabbildung**
Eigenschaften	Alle Parallelkreise, mit Ausnahme des Hauptpunktes, werden als Bogenstücke konzentrischer Kreise abgebildet. Die Abstände benachbarter Parallelkreise werden umso kleiner, je weiter man sich vom Nordpol entfernt. Die Meridiane werden als Geraden abgebildet und schneiden die Parallelkreise im rechten Winkel. Der Hauptpunkt wird als Punkt abgebildet. Der gewählte von B=90° verschiedene Standardparallelkreis wird äquidistant abgebildet, besitzt also den Maßstab 1. Entlang aller anderen Parallelkreise ist der Maßstab zwar verschieden von 1, aber konstant. Der Maßstabsfaktor in einem beliebigen Meridianpunkt ist der Kehrwert des Maßstabsfaktors in Richtung des zugehörigen Parallelkreises. Der von B=90° verschiedene Standardparallelkreis wird zudem konform abgebildet.
Einsatzgebiete	---
Ursprung	Vorgestellt von Johann Heinrich Lambert (1728-1777) im Jahre 1772 [29].

EQUAL-AREA CONIC PROJECTION

EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF TWO STANDARD PARALLELS B_1, B_2

ALBERS EQUAL-AREA CONIC PROJECTION

cone constant

$$n = \frac{\dfrac{\cos^2 B_1}{1-E^2\sin^2 B_1} - \dfrac{\cos^2 B_2}{1-E^2\sin^2 B_2}}{(1-E^2)\left[\dfrac{\sin B_2}{1-E^2\sin^2 B_2} - \dfrac{\sin B_1}{1-E^2\sin^2 B_1} + \dfrac{1}{2E}\left(\ln\dfrac{1+E\sin B_2}{1-E\sin B_2} - \ln\dfrac{1+E\sin B_1}{1-E\sin B_1}\right)\right]}$$

direct equations, polar coordinates

$$\alpha = nL$$

$$\begin{aligned} r &= \frac{A}{\sqrt{n}}\left[\frac{\cos^2 B_1}{n(1-E^2\sin^2 B_1)} + (1-E^2)\left(\frac{\sin B_1}{1-E^2\sin^2 B_1} + \frac{1}{2E}\ln\frac{1+E\sin B_1}{1-E\sin B_1}\right)\right. \\ &\qquad \left. - (1-E^2)\left(\frac{\sin B}{1-E^2\sin^2 B} + \frac{1}{2E}\ln\frac{1+E\sin B}{1-E\sin B}\right)\right]^{1/2} \\ &= \frac{A}{\sqrt{n}}[\cdots]^{1/2} \end{aligned}$$

direct equations, cartesian coordinates

$$\begin{aligned} x &= \frac{A}{\sqrt{n}}\left[\frac{\cos^2 B_1}{n(1-E^2\sin^2 B_1)} + (1-E^2)\left(\frac{\sin B_1}{1-E^2\sin^2 B_1} + \frac{1}{2E}\ln\frac{1+E\sin B_1}{1-E\sin B_1}\right)\right. \\ &\qquad \left. - (1-E^2)\left(\frac{\sin B}{1-E^2\sin^2 B} + \frac{1}{2E}\ln\frac{1+E\sin B}{1-E\sin B}\right)\right]^{1/2} \cos(nL) \\ &= \frac{A}{\sqrt{n}}[\cdots]^{1/2}\cos(nL) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{A}{\sqrt{n}}\left[\frac{\cos^2 B_1}{n(1-E^2\sin^2 B_1)} + (1-E^2)\left(\frac{\sin B_1}{1-E^2\sin^2 B_1} + \frac{1}{2E}\ln\frac{1+E\sin B_1}{1-E\sin B_1}\right)\right. \\ &\qquad \left. - (1-E^2)\left(\frac{\sin B}{1-E^2\sin^2 B} + \frac{1}{2E}\ln\frac{1+E\sin B}{1-E\sin B}\right)\right]^{1/2} \sin(nL) \\ &= \frac{A}{\sqrt{n}}[\cdots]^{1/2}\sin(nL) \end{aligned}$$

EQUAL-AREA CONIC PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF TWO STANDARD PARALLELS B_1, B_2

left Jacobi matrix

$$\boldsymbol{J}_l = \begin{pmatrix} \alpha_L & \alpha_B \\ r_L & r_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & -\dfrac{A(1-E^2)\cos B}{\sqrt{n}(1-E^2\sin^2 B)^2}[\cdots]^{-1/2} \end{pmatrix}$$

left Cauchy-Green deformation tensor

$$[c_{KL}] = \begin{pmatrix} A^2 n[\cdots] & 0 \\ 0 & \dfrac{A^2(1-E^2)^2\cos^2 B}{[\cdots]n(1-E^2\sin^2 B)^4} \end{pmatrix}$$

left distance function

$$ds^2 = A^2 n[\cdots]dL^2 + \frac{A^2(1-E^2)^2\cos^2 B}{[\cdots]n(1-E^2\sin^2 B)^4}dB^2$$

left principal stretches

$$\Lambda_1 = \frac{\sqrt{n}\sqrt{1-E^2\sin^2 B}\,[\cdots]^{1/2}}{\cos B}$$

$$\Lambda_2 = \frac{\cos B}{\sqrt{n}\sqrt{1-E^2\sin^2 B}\,[\cdots]^{1/2}}$$

left eigenvectors

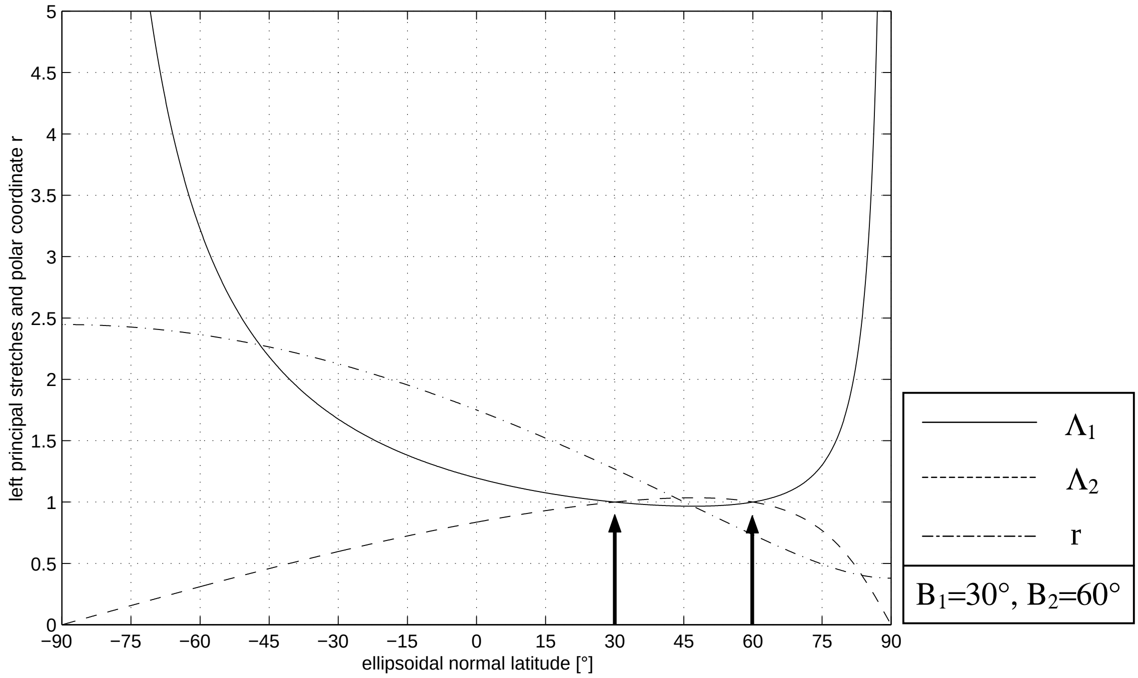
$$\boldsymbol{U_1} = \frac{\sqrt{1-E^2\sin^2 B}}{A\cos B}\boldsymbol{G_1} \qquad \boldsymbol{U_2} = \frac{(1-E^2\sin^2 B)^{3/2}}{A(1-E^2)}\boldsymbol{G_2}$$

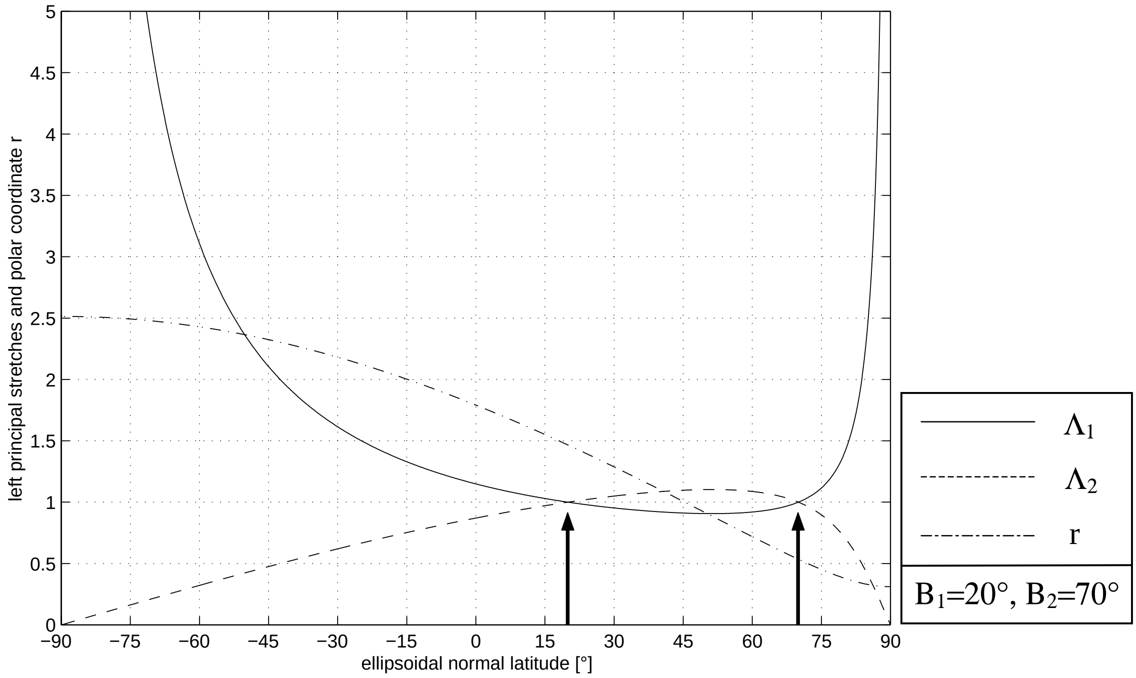
maximum angular deformation

$$\Omega = 2\arcsin\left|\frac{n(1-E^2\sin^2 B)[\cdots]-\cos^2 B}{n(1-E^2\sin^2 B)[\cdots]+\cos^2 B}\right|$$

EQUAL-AREA CONIC PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF TWO STANDARD PARALLELS B_1, B_2

left principal stretches and polar coordinate r as function of the ellipsoidal normal latitude B





EQUAL-AREA CONIC PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF TWO STANDARD PARALLELS B_1, B_2

minimum polar coordinate r_{min}

$$r_{\min} = r(B = \frac{\pi}{2}) = \frac{A}{\sqrt{n}}\left[\frac{\cos^2 B_1}{n(1-E^2\sin^2 B_1)} + (1-E^2)\left(\frac{\sin B_1}{1-E^2\sin^2 B_1} + \frac{1}{2E}\ln\frac{1+E\sin B_1}{1-E\sin B_1}\right)\right.$$
$$\left. - (1-E^2)\left(\frac{1}{1-E^2} + \frac{1}{2E}\ln\frac{1-E}{1+E}\right)\right]^{1/2}$$

maximum polar coordinate r_{max}

$$r_{\max} = r(B = -\frac{\pi}{2}) = \frac{A}{\sqrt{n}}\left[\frac{\cos^2 B_1}{n(1-E^2\sin^2 B_1)} + (1-E^2)\left(\frac{\sin B_1}{1-E^2\sin^2 B_1} + \frac{1}{2E}\ln\frac{1+E\sin B_1}{1-E\sin B_1}\right)\right.$$
$$\left. + (1-E^2)\left(\frac{1}{1-E^2} - \frac{1}{2E}\ln\frac{1-E}{1+E}\right)\right]^{1/2}$$

angle of intersection of coordinate lines, left versus right

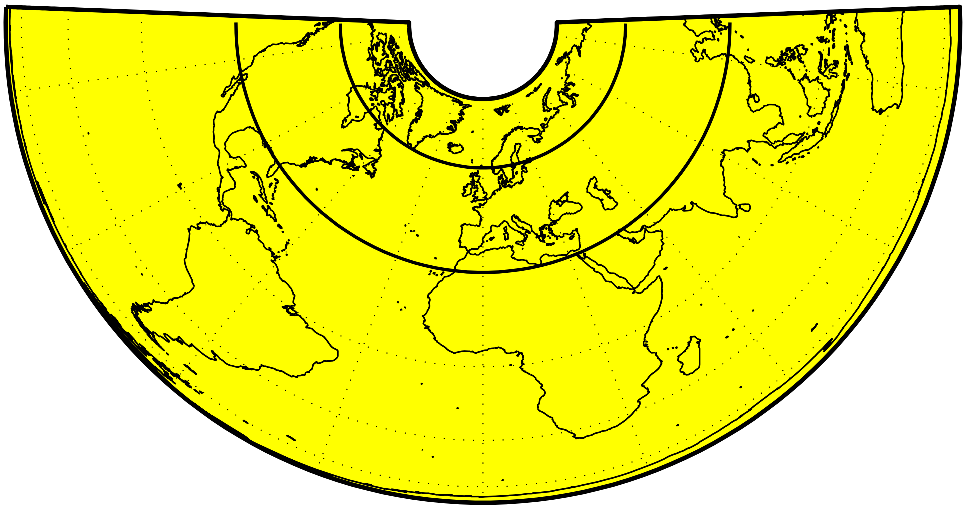
$A = 90°$ $\qquad \alpha = 90°$

left angular shear

$\delta = 0°$

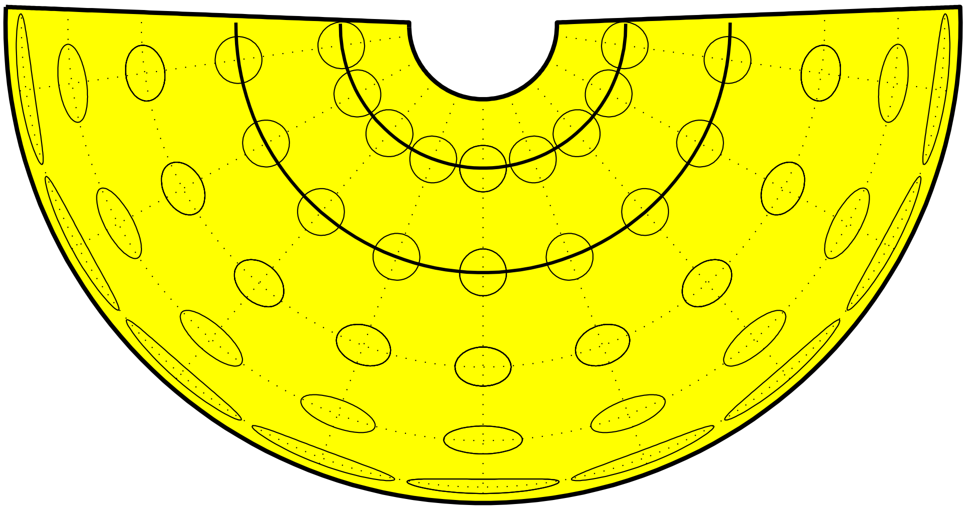
EQUAL-AREA CONIC PROJECTION

EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF TWO STANDARD PARALLELS B_1, B_2



Albers equal-area conic projection: world map and left tissot indicatrices

(30° - graticule, standard parallels B_1=30°, B_2=60°)



EQUAL-AREA CONIC PROJECTION

EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF THE STANDARD PARALLEL B_0

ALBERS EQUAL-AREA CONIC PROJECTION

cone constant

$$n = \sin B_0$$

direct equations, polar coordinates

$$\alpha = nL$$

$$r = A\left[\frac{1}{n^2} - \frac{(1-E^2)\sin B}{n(1-E^2\sin^2 B)} + \frac{1-E^2}{2En}\left(\ln\frac{1+En}{1-En} - \ln\frac{1+E\sin B}{1-E\sin B}\right)\right]^{1/2} = A[\cdots]^{1/2}$$

direct equations, cartesian coordinates

$$x = A\left[\frac{1}{n^2} - \frac{(1-E^2)\sin B}{n(1-E^2\sin^2 B)} + \frac{1-E^2}{2En}\left(\ln\frac{1+En}{1-En} - \ln\frac{1+E\sin B}{1-E\sin B}\right)\right]^{1/2}\cos(nL)$$
$$= A[\cdots]^{1/2}\cos(nL)$$

$$y = A\left[\frac{1}{n^2} - \frac{(1-E^2)\sin B}{n(1-E^2\sin^2 B)} + \frac{1-E^2}{2En}\left(\ln\frac{1+En}{1-En} - \ln\frac{1+E\sin B}{1-E\sin B}\right)\right]^{1/2}\sin(nL)$$
$$= A[\cdots]^{1/2}\sin(nL)$$

left Jacobi matrix

$$\boldsymbol{J}_l = \begin{pmatrix} \alpha_L & \alpha_B \\ r_L & r_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & -\dfrac{A(1-E^2)\cos B}{n(1-E^2\sin^2 B)^2}[\cdots]^{-1/2} \end{pmatrix}$$

EQUAL-AREA CONIC PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF THE STANDARD PARALLEL B_0

left Cauchy-Green deformation tensor

$$[c_{KL}] = \begin{pmatrix} A^2 n^2 [\cdots] & 0 \\ 0 & \dfrac{A^2(1-E^2)^2 \cos^2 B}{[\cdots] n^2 (1-E^2 \sin^2 B)^4} \end{pmatrix}$$

left distance function

$$ds^2 = A^2 n^2 [\cdots] dL^2 + \frac{A^2(1-E^2)^2 \cos^2 B}{[\cdots] n^2 (1-E^2 \sin^2 B)^4} dB^2$$

left principal stretches

$$\Lambda_1 = \frac{n\sqrt{1-E^2 \sin^2 B}\,[\cdots]^{1/2}}{\cos B}$$

$$\Lambda_2 = \frac{\cos B}{n\sqrt{1-E^2 \sin^2 B}\,[\cdots]^{1/2}}$$

left eigenvectors

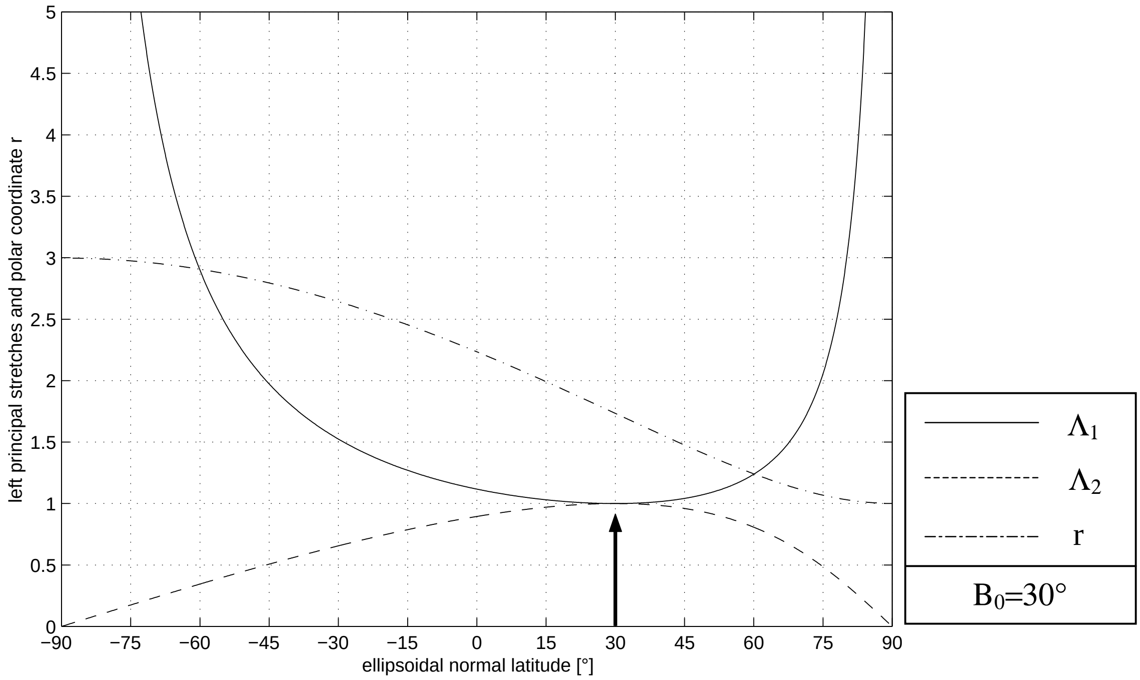
$$\boldsymbol{U_1} = \frac{\sqrt{1-E^2 \sin^2 B}}{A \cos B} \boldsymbol{G_1} \qquad \boldsymbol{U_2} = \frac{(1-E^2 \sin^2 B)^{3/2}}{A(1-E^2)} \boldsymbol{G_2}$$

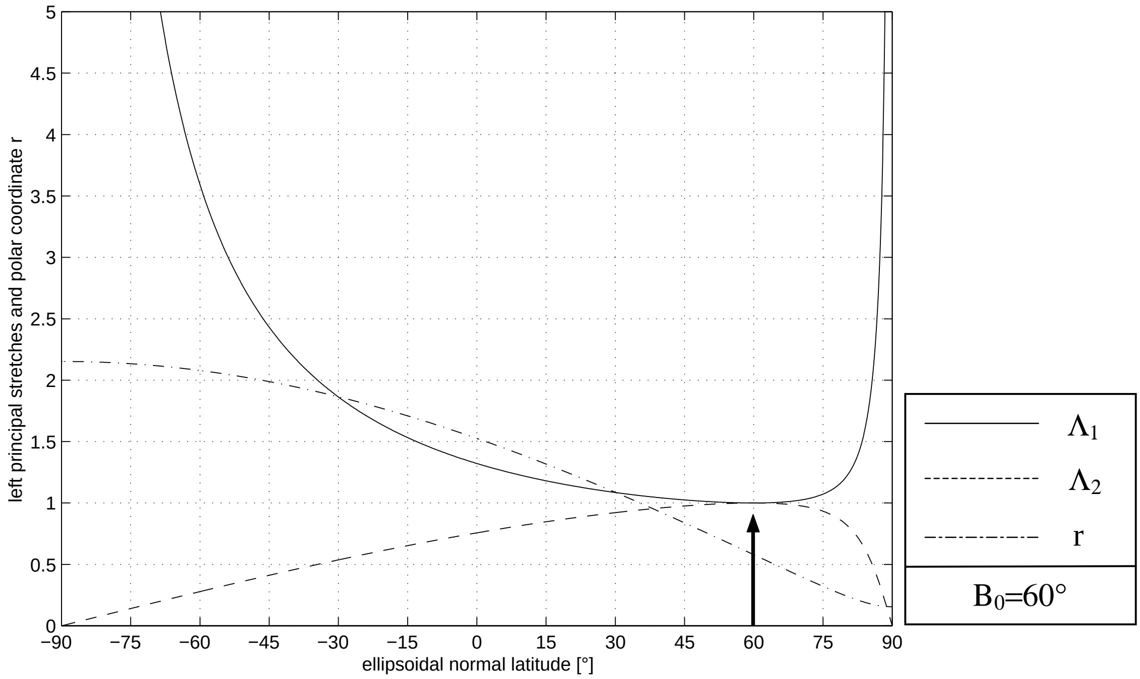
maximum angular deformation

$$\Omega = 2 \arcsin \left| \frac{n^2(1-E^2 \sin^2 B)[\cdots] - \cos^2 B}{n^2(1-E^2 \sin^2 B)[\cdots] + \cos^2 B} \right|$$

EQUAL-AREA CONIC PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF THE STANDARD PARALLEL B_0

left principal stretches and polar coordinate r as function of the ellipsoidal normal latitude B





EQUAL-AREA CONIC PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF THE STANDARD PARALLEL B_0

minimum polar coordinate r_{min}

$$r_{\min} = r(B = \frac{\pi}{2}) = A\left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} + \frac{1-E^2}{2En}\left(\ln\frac{1+En}{1-En} - \ln\frac{1+E}{1-E}\right)\right]^{1/2}$$

maximum polar coordinate r_{max}

$$r_{\max} = r(B = -\frac{\pi}{2}) = A\left[\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} + \frac{1-E^2}{2En}\left(\ln\frac{1+En}{1-En} - \ln\frac{1-E}{1+E}\right)\right]^{1/2}$$

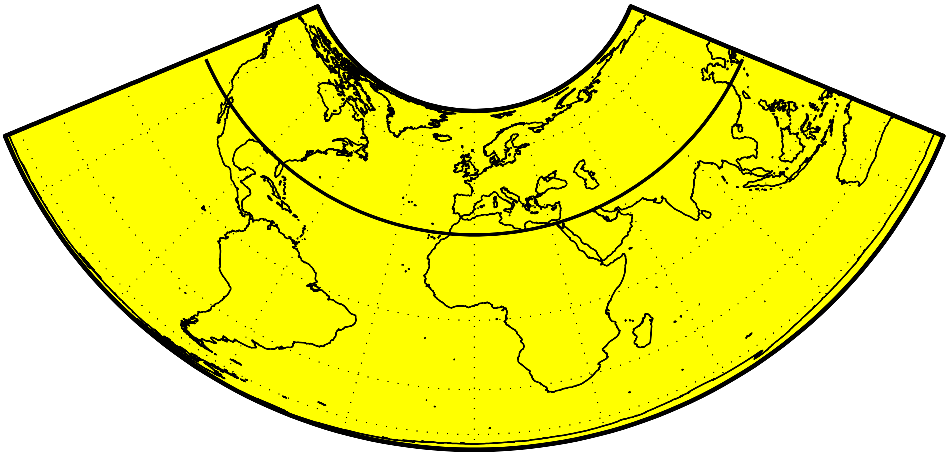
angle of intersection of coordinate lines, left versus right

$A = 90°$ $\qquad \alpha = 90°$

left angular shear

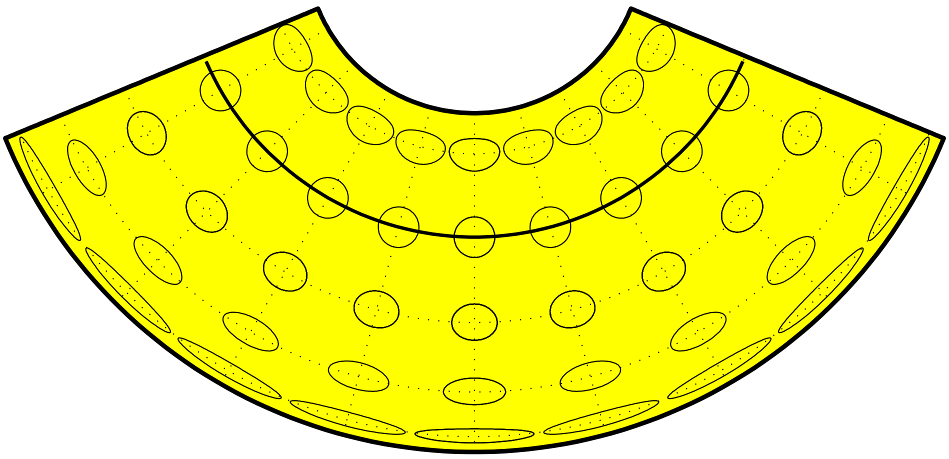
$\delta = 0°$

EQUAL-AREA CONIC PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF THE STANDARD PARALLEL B_0



Albers equal-area conic projection: world map and left tissot indicatrices

(30° - graticule, standard parallel B_0=30°)



EQUAL-AREA CONIC PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF THE STANDARD PARALLEL B_1, POINTED POLE

LAMBERT EQUAL-AREA CONIC PROJECTION

cone constant

$$n = \frac{\cos^2 B_1}{(1-E^2\sin^2 B_1)\left[1-(1-E^2)\dfrac{\sin B_1}{1-E^2\sin^2 B_1}+\dfrac{1-E^2}{2E}\left(\ln\dfrac{1+E}{1-E}-\ln\dfrac{1+E\sin B_1}{1-E\sin B_1}\right)\right]}$$

direct equations, polar coordinates

$$\alpha = nL$$

$$r = \frac{A}{\sqrt{n}}\left[1-\frac{(1-E^2)\sin B}{(1-E^2\sin^2 B)}+\frac{1-E^2}{2E}\left(\ln\frac{1+E}{1-E}-\ln\frac{1+E\sin B}{1-E\sin B}\right)\right]^{1/2} = \frac{A}{\sqrt{n}}[\cdots]^{1/2}$$

direct equations, cartesian coordinates

$$x = \frac{A}{\sqrt{n}}\left[1-\frac{(1-E^2)\sin B}{(1-E^2\sin^2 B)}+\frac{1-E^2}{2E}\left(\ln\frac{1+E}{1-E}-\ln\frac{1+E\sin B}{1-E\sin B}\right)\right]^{1/2}\cos(nL)$$
$$= \frac{A}{\sqrt{n}}[\cdots]^{1/2}\cos(nL)$$

$$y = \frac{A}{\sqrt{n}}\left[1-\frac{(1-E^2)\sin B}{(1-E^2\sin^2 B)}+\frac{1-E^2}{2E}\left(\ln\frac{1+E}{1-E}-\ln\frac{1+E\sin B}{1-E\sin B}\right)\right]^{1/2}\sin(nL)$$
$$= \frac{A}{\sqrt{n}}[\cdots]^{1/2}\sin(nL)$$

left Jacobi matrix

$$\boldsymbol{J}_l = \begin{pmatrix}\alpha_L & \alpha_B\\ r_L & r_B\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & 0\\ 0 & -\dfrac{A(1-E^2)\cos B}{\sqrt{n}(1-E^2\sin^2 B)^2}[\cdots]^{-1/2}\end{pmatrix}$$

EQUAL-AREA CONIC PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF THE STANDARD PARALLEL B_1, POINTED POLE

left Cauchy-Green deformation tensor

$$[c_{KL}] = \begin{pmatrix} A^2 n[\cdots] & 0 \\ 0 & \dfrac{A^2(1-E^2)^2\cos^2 B}{[\cdots]n(1-E^2\sin^2 B)^4} \end{pmatrix}$$

left distance function

$$ds^2 = A^2 n[\cdots]dL^2 + \frac{A^2(1-E^2)^2\cos^2 B}{[\cdots]n(1-E^2\sin^2 B)^4}dB^2$$

left principal stretches

$$\Lambda_1 = \frac{\sqrt{n}\sqrt{1-E^2\sin^2 B}\,[\cdots]^{1/2}}{\cos B}$$

$$\Lambda_2 = \frac{\cos B}{\sqrt{n}\sqrt{1-E^2\sin^2 B}\,[\cdots]^{1/2}}$$

left eigenvectors

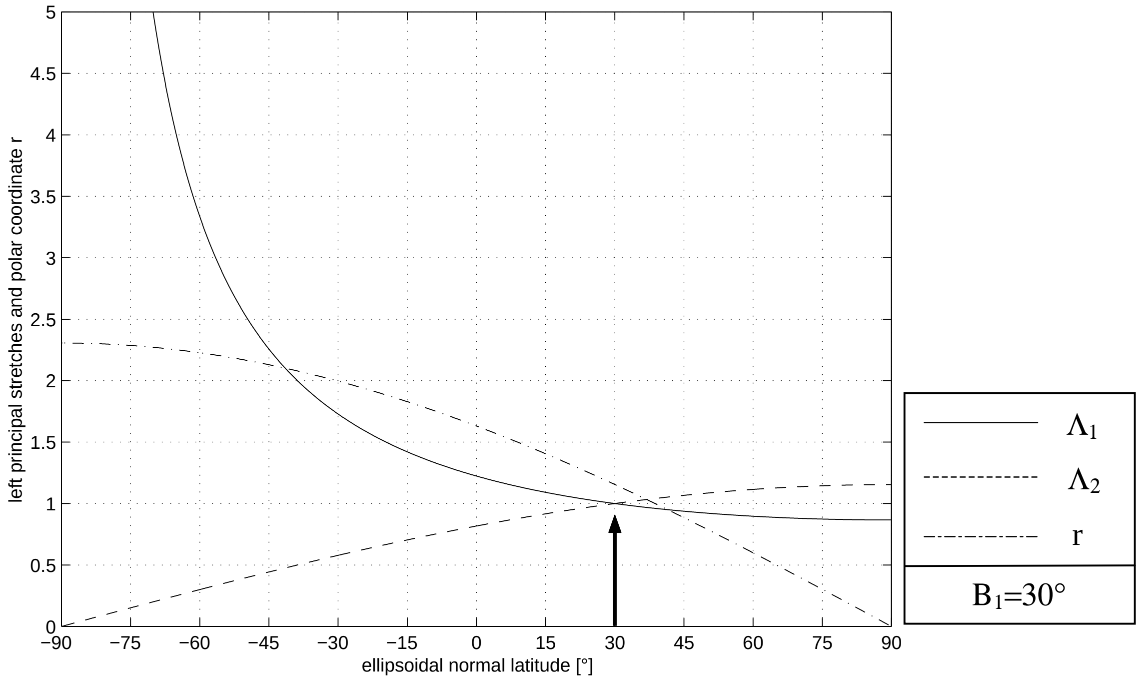
$$\boldsymbol{U_1} = \frac{\sqrt{1-E^2\sin^2 B}}{A\cos B}\boldsymbol{G_1} \qquad \boldsymbol{U_2} = \frac{(1-E^2\sin^2 B)^{3/2}}{A(1-E^2)}\boldsymbol{G_2}$$

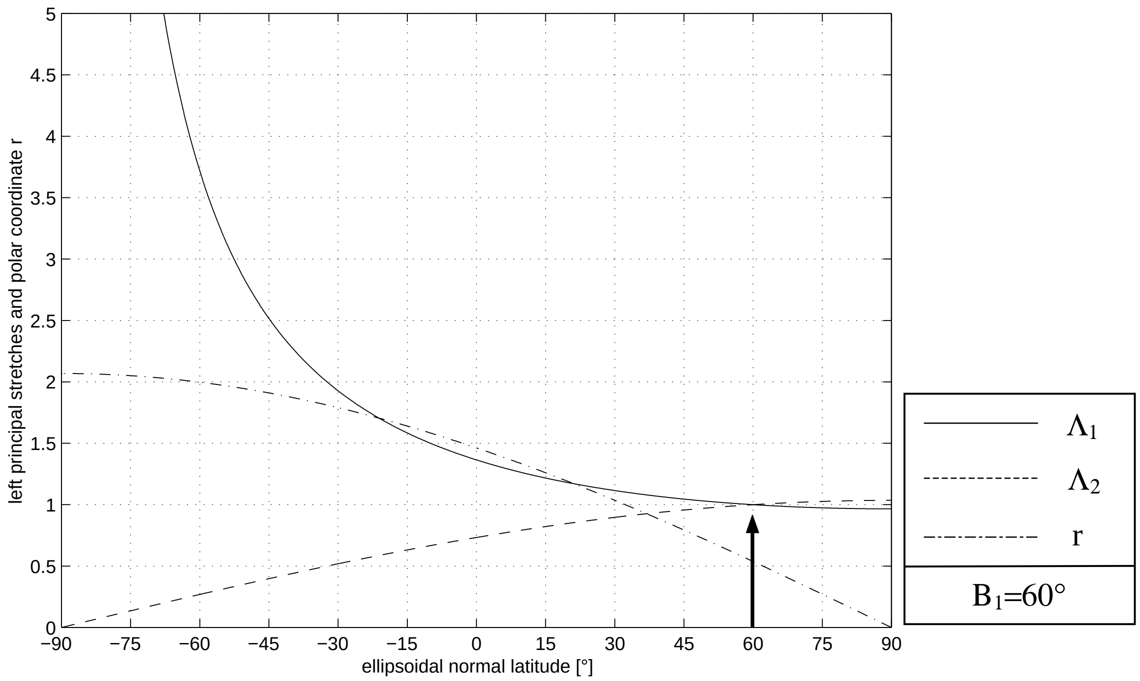
maximum angular deformation

$$\Omega = 2\arcsin\left|\frac{n(1-E^2\sin^2 B)[\cdots]-\cos^2 B}{n(1-E^2\sin^2 B)[\cdots]+\cos^2 B}\right|$$

EQUAL-AREA CONIC PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF THE STANDARD PARALLEL B_1, POINTED POLE

left principal stretches and polar coordinate r as function of the ellipsoidal normal latitude B





EQUAL-AREA CONIC PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF THE STANDARD PARALLEL B_1, POINTED POLE

minimum polar coordinate r_{min}

$$r_{\min} = r(B = \frac{\pi}{2}) = 0$$

maximum polar coordinate r_{max}

$$r_{\max} = r(B = -\frac{\pi}{2}) = \frac{A}{\sqrt{n}}\left[2 + \frac{1-E^2}{E}\ln\frac{1+E}{1-E}\right]^{1/2}$$

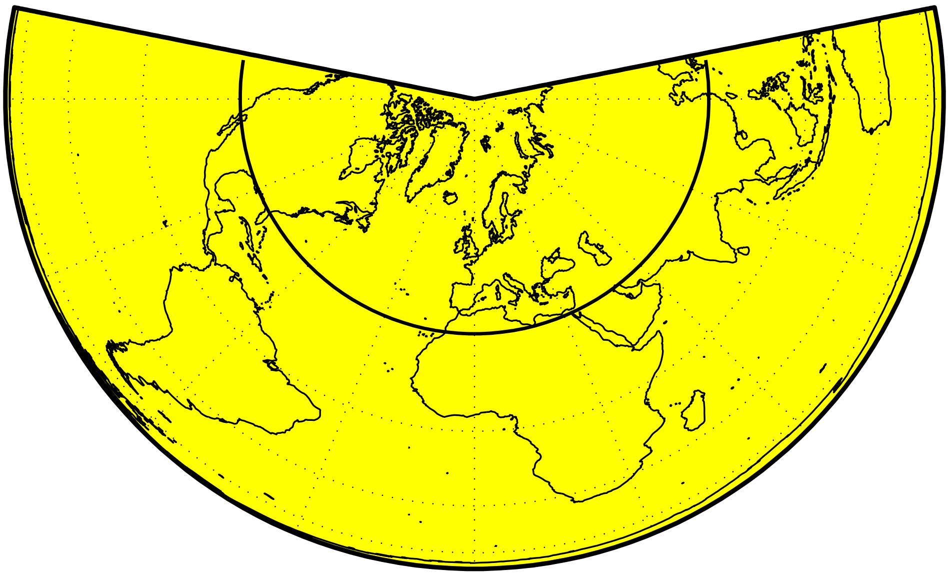
angle of intersection of coordinate lines, left versus right

$A = 90°$ $\qquad \alpha = 90°$

left angular shear

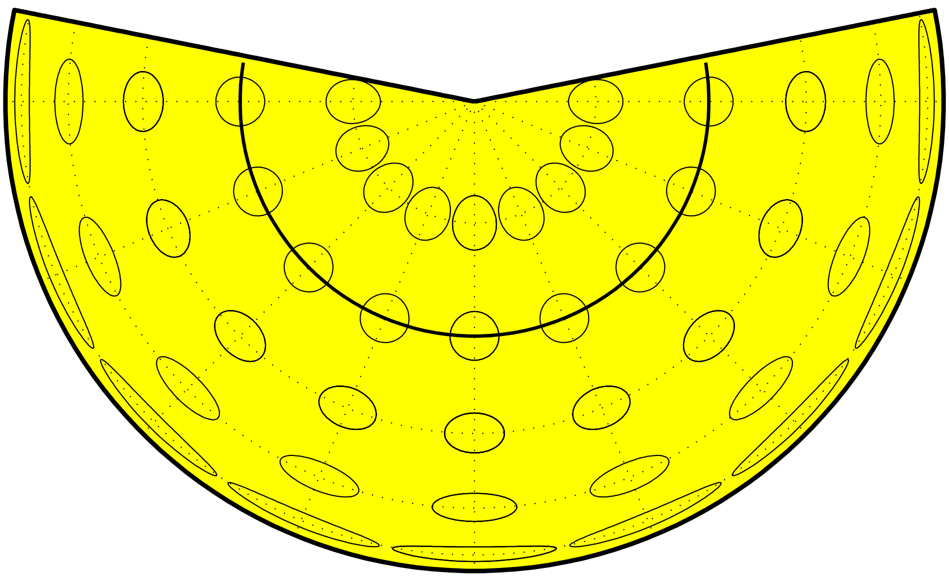
$\delta = 0°$

EQUAL-AREA CONIC PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF THE STANDARD PARALLEL B_1, POINTED POLE



Lambert equal-area conic projection: world map and left tissot indicatrices

(30° - graticule, standard parallel B_1=30°)



6. LITERATURVERZEICHNIS

[1] Adams, O. (1927): *Tables for Albers Projection*, U.S. Coast and Geodetic Survey Spec. Pub. 130

[2] Albers, H. (1805): *Beschreibung einer neuen Kegelprojektion*, Zach's monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmels-Kunde 12 (1805) 450-459

[3] Braun, C. (1867): *Über zwei neue geographische Entwurfsarten*, Wochenschrift für Astronomie, Meteorologie und Geographie 10 (33) (1867) 259-263; 10 (34) (1867) 269-272; 10 (35) (1867) 276-278

[4] Canters, F. and H. Decleir (1989): *The World in Perspective: A Directory of World Map Projections*, John Wiley & Sons Ltd, Chichester 1989

[5] Colles, C. (1794): *Geographical Ledger*, John Buel, New York 1794

[6] De l'Isle, J. N. (1745): *Atlas' Rossiykoy, sostoyashchey iz' devyatnattsati spetsialnykh'kart'predstavlyayushchikh' vserossiyskuyu imperiyu's progranichiymi zemlyami*, St. Petersburg 1745

[7] Euler, L. (1777): *Drei Abhandlungen über Kartenprojection*, Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 93, Verlag Wilhelm Engelmann, Leipzig 1898

[8] Grafarend, E. and R.Y.You (1995): *The Newton form of a geodesic in Maupertuis gauge on the sphere and the biaxial ellipsoid*, Zeitschrift für Vermessungswesen 120 (1995) 68-80, 509-521

[9] Grafarend, E. and A. Heidenreich (1995): *The generalized Mollweide projection of the biaxial ellipsoid*, Bulletin Géodésique 69 (1995) 164-172

[10] Grafarend, E. (1995): *The optimal universal transverse Mercator projection*, manuscripta geodaetica 20 (1995) 421-468

[11] Grafarend, E., R. Syffus and R. J. You (1995): *Projective heights in geometry and gravity space*, Allgemeine Vermessungsnachrichten 102 (1995) 382-403

[12] Grafarend, E. and R. Syffus (1995): *The oblique azimuthal projection of geodesic type for the biaxial ellipsoid: Riemann polar and normal coordinates*, Journal of Geodesy 70 (1995) 13-37

[13] Grafarend, E. and J. Engels (1995): *The oblique Mercator projection of the ellipsoid of revolution* $\boldsymbol{E}^2_{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}}$, Journal of Geodesy 70 (1995) 38-50

[14] Grafarend, E., T. Krarup and R. Syffus (1996): *An algorithm for the inverse of a multivariate homogeneous polynomial of degree n*, Journal of Geodesy 70 (1996) 276-286

LITERATURVERZEICHNIS

[15] Grafarend, E. and R. Syffus (1996): *The optimal Mercator projection and the optimal polycylindric projection of conformal type - case study Indonesia*, Proceedings 18th International Cartographic Conference, editor L. Ottoson, Vol. 3, 1751-1759, Stockholm 1997; Proceedings, GALOS (Geodetic Aspects of the Law of the Sea), 2nd International Conference, Denpasar/Bali/Indonesia, July 1-4 1996, editor S. Mira, pp. 93-103, Institute of Technology, Bandung 1996

[16] Grafarend, E. and R. Syffus (1997): *Mixed cylindric map projections of the ellipsoid of revolution*, Journal of Geodesy 71 (1997) 685-694

[17] Grafarend, E. and R. Syffus (1997): *Map projections of project surveying objects and architectural structures, Part I: Projective geometry of the pneu or torus* $\boldsymbol{T}^2_{A,B}$ *with boundary,* Zeitschrift für Vermessungswesen 122 (1997) 457-465

[18] Grafarend, E. and R. Syffus (1997): *The Hammer projection of the ellipsoid of revolution (azimuthal, transverse, rescaled equiareal)*, Journal of Geodesy 71 (1997) 736-748

[19] Grafarend, E. and R. Syffus (1997): *Map projections of project surveying objects and architectural structures, Part II: Projective geometry of the cooling tower of the hyperboloid* $\boldsymbol{H}^2$, Zeitschrift für Vermessungswesen 122 (1997) 560-566

[20] Grafarend, E. (1997): *Field lines of gravity, their curvature and torsion, the Lagrange and the Hamilton equations of the plumbline*, Annali di Geofisica 40 (1997) 1233-1247

[21] Grafarend, E. and R. Syffus (1998): *Map projections of project surveying objects and architectural structures, Part III: projective geometry of the parabolic mirror or the paraboloid* $\boldsymbol{P}^2$ *with boundary*, Zeitschrift für Vermessungswesen 123 (1998) 93-97

[22] Grafarend, E. and R. Syffus (1998): *Map projections of project surveying objects and architectural structures, Part IV: projective geometry of the church tower or the onion* $\boldsymbol{Z}^2$,Zeitschrift für Vermessungswesen 123 (1998) 128-132

[23] Grafarend, E. and R. Syffus (1998): *Optimal Mercator projection and the optimal polycylindric projection of conformal type - case study Indonesia*, Journal of Geodesy 72 (1998) 251-258

[24] Grafarend, E. and R. Syffus (1998): *The solution of the Korn-Lichtenstein equations of conformal mapping: the direct generation of ellipsoidal Gauss-Krueger conformal coordinates or the Transverse Mercator Projection*, Journal of Geodesy 72 (1998) 282-293

LITERATURVERZEICHNIS

[25] Grafarend, E. and R. Syffus (1998): *Transformation of conformal coordinates from a local datum (regional, National, European) to a global datum (WGS 84) Part I: The transformation equations*, Allgemeine Vermessungsnachrichten 105 (1998) 134-141

[26] Grafarend, E. and F. Okeke (1998): *Transformation of conformal coordinates of type mercator from a global datum (WGS 84) to a local datum (regional, national)*, Marine Geodesy 21 (1998) 169-180

[27] Hinks, A. (1941): *Murdoch's Third Projection*, Geographical Journal 97 (6) (1941) 358-362

[28] Kavrayskiy, V. (1934): *Matematischeskaya kartografiya*. Moskau-Leningrad 1934

[29] Lambert, J. H. (1772): *Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land- und Himmelscharten*, Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 54, Verlag Wilhelm Engelmann, Leipzig 1894

[30] Maling, D.H. (1992): *Coordinate Systems and Map Projections*, 2nd edition, Pergamon Press

[31] Mendeleev, D. (1907): *K poznanyu Rossi*, Akademiya Nauk [St. Petersburg], Izvestiya 6 (1) (1907) 141-157

[32] Murdoch, P. (1758): *On the Best Form of Geographical Maps*, Philosophical Transactions of the Royal Society 50 (2) (1758) 553-562. Reprinted in Philosophical Transactions 11 (1755-63) 215-218. C. and R. Baldwin, London 1809

[33] Pearson, F., II (1990): *Map Projections: Theory and Applications*, CRC Press Inc., Boca Raton, Florida 1990

[34] Richardus, P. and R. Adler (1972): *Map Projections for Geodesists, Cartographers and Geographers*, 2nd printing, North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1972

[35] Snyder, J. (1987): *Map Projections – A Working Manual*, U.S. Geological Survey Professional Paper 1395

[36] Snyder, J. and P. Voxland (1989): *An Album of Map Projections*, U.S. Geological Survey Professional Paper 1453

[37] Snyder, J. (1993): *Flattening the Earth: Two Thousand Years of Map Projections*, The University of Chicago Press

LITERATURVERZEICHNIS

[38] Snyder, J. and L. Bugayevskiy (1995): *Map Projections: A Reference Manual*, Taylor & Francis, London 1995

[39] Tissot, N. A. (1881): *Mémoire sur la représentation des surfaces et les projections des cartes géographiques*, Gauthier Villars, Paris 1881

[40] Young, A. (1920): *Some Investigations in the Theory of Map Projections*, Royal Geographical Journal 62, No. 5, Technical Series, (1920) 359-361