

**ERSTELLUNG VON ID-CARDS
AUSGEWÄHLTER
ZYLINDERABBILDUNGEN
DER KUGEL
UND DES ROTATIONSELLIPSOIDES**

**STUDIENARBEIT VON
GERRIT AUSTEN**

- Geodätisches Institut der Universität Stuttgart –

Betreuung

Prof. Dr.-Ing.habil. Dr.tech.h.c.mult. Dr-Ing.E.h.
Erik W. Grafarend

Dipl.-Ing. Rainer Syffus

Dr.-Ing. Friedhelm Krumm

2000

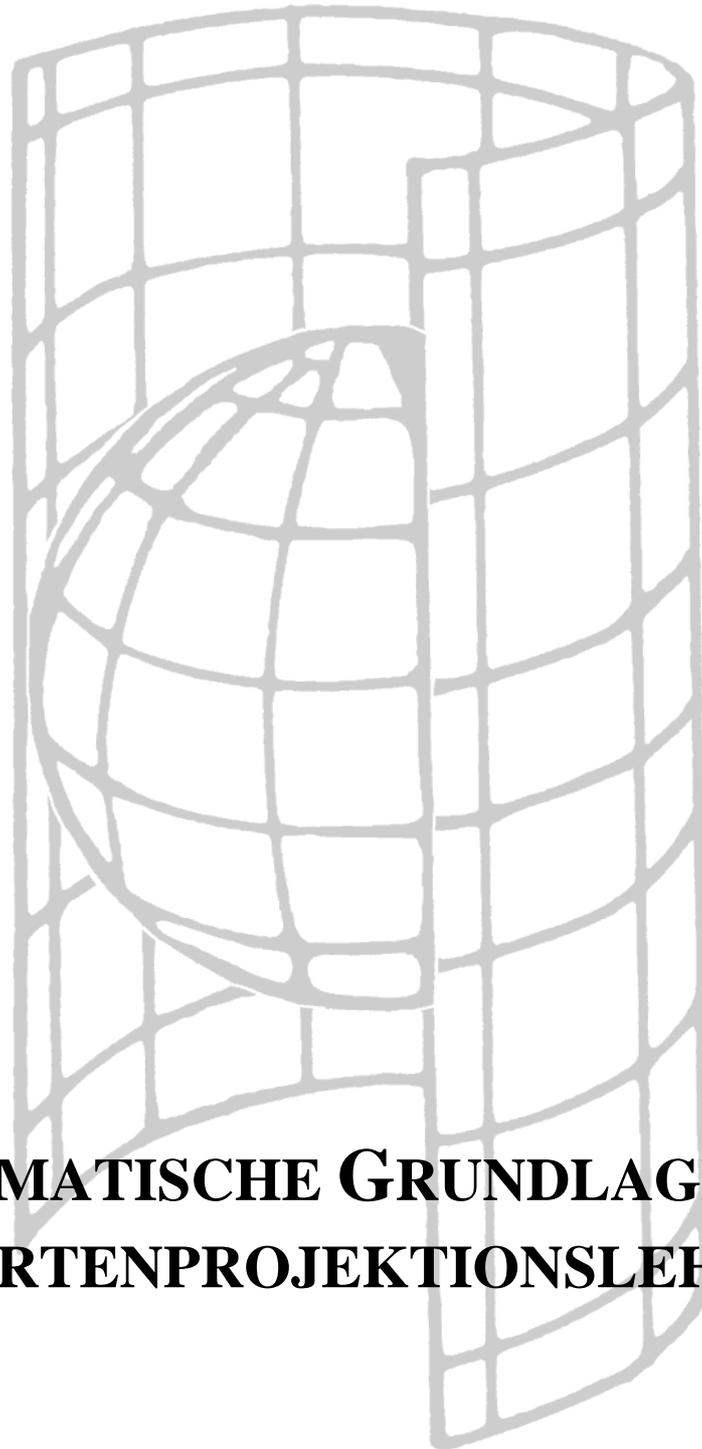
INHALTSVERZEICHNIS

1.	Mathematische Grundlagen der Kartenprojektionslehre.....	1
	1-1. Grundlagen der lokalen Flächentheorie.....	2
	1-2. Mögliche Urbildflächen für Abbildungen der Erdoberfläche.....	3
	1-3. Mögliche Bildflächen.....	7
	1-4. Abbildungsgleichungen.....	9
	1-5. Kartenmaßstab.....	10
	1-6. Verzerrungsverhältnisse.....	10
	1-7. Spezielle Abbildungseigenschaften.....	20
2.	Allgemeine Abbildungsgleichungen und Verzerrungsmaße für Zylinderabbildungen der Kugel.....	25
3.	Zylinderabbildungen der Kugel.....	31
	3-1. Äquidistante Zylinderabbildungen der Kugel.....	32
	MARINUS - Abbildung.....	34
	PLATE CARRÉE - Abbildung.....	40
	3-2. Konforme Zylinderabbildungen der Kugel.....	45
	MERCATOR - Abbildung (2 Standardparallelen).....	46
	MERCATOR - Abbildung (1 Standardparallele).....	52
	3-3. Flächentreue Zylinderabbildungen der Kugel.....	57
	LAMBERT - BEHRMANN - Abbildung.....	58
	LAMBERT - Abbildung.....	64
	3-4. Perspektivische Zylinderabbildungen der Kugel.....	69
	Perspektivische Zylinderabbildung (2 Standardparallelen).....	73
	PANORAMA - Abbildung.....	81
	BRAUN - Abbildung.....	86
	3-5. Spezielle Zylinderabbildungen der Kugel.....	92
	MILLER - Abbildungen.....	93

INHALTSVERZEICHNIS

3-6. Zylinderabbildungen der Kugel mit Polynomansatz.....	98
KHARCHENKO - SHABANOVA - Abbildung (2 Standardparallelen).....	100
PAVLOV / URMAEV - Abbildung.....	105
4. Allgemeine Abbildungsgleichungen und Verzerrungsmaße für Zylinderabbildungen des Rotationsellipsoides.....	111
5. Zylinderabbildungen des Rotationsellipsoides.....	116
5-1. Äquidistante Zylinderabbildungen des Rotationsellipsoides.....	117
Äquidistante Zylinderabbildung (2 Standardparallelen).....	118
5-2. Konforme Zylinderabbildungen des Rotationsellipsoides.....	123
Konforme Zylinderabbildung (2 Standardparallelen).....	124
5-3. Flächentreue Zylinderabbildungen des Rotationsellipsoides.....	129
Flächentreue Zylinderabbildung (2 Standardparallelen).....	130
6. Literaturverzeichnis.....	135

KAPITEL 1



MATHEMATISCHE GRUNDLAGEN DER KARTENPROJEKTIONSLEHRE

1-1. GRUNDLAGEN DER LOKALEN FLÄCHENTHEORIE

Die Kartenprojektionslehre beschäftigt sich allgemein mit der Abbildung von Flächen auf Flächen. Dabei wird diejenige Fläche, deren Punkte abgebildet werden, als "Urbildfläche" oder kurz "Urbild" bezeichnet, diejenige Fläche, auf welche die Punkte des Urbilds abgebildet werden, wird "Bildfläche" oder kurz "Bild" genannt.

Für die Beschreibung einer Fläche im dreidimensionalen euklidischen Raum existieren mehrere Darstellungsmöglichkeiten. Die wichtigste ist die **Parameterdarstellung**, mittels derer ein Punkt der Fläche durch zwei Flächenparameter u^1 und u^2 festgelegt wird. Bezüglich eines dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystems, das durch die Einheitsvektoren \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 und \mathbf{e}_3 aufgespannt wird, lautet die allgemeine Parameterdarstellung einer solchen Fläche:

$$(1.1) \quad \mathbf{x}(u^1, u^2) = x(u^1, u^2)\mathbf{e}_1 + y(u^1, u^2)\mathbf{e}_2 + z(u^1, u^2)\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} x(u^1, u^2) \\ y(u^1, u^2) \\ z(u^1, u^2) \end{pmatrix} (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)^T$$

Für $u = \text{const.}$ bzw. $v = \text{const.}$ erhält man in der Fläche liegende Raumkurven, die sogenannten **Parameterlinien** (*coordinate lines*). Eine besondere Bedeutung für die nachfolgenden Betrachtungen besitzen die Tangentenvektoren an diese Parameterlinien; sie werden auch als **GAUSSsche Tangentenvektoren** bezeichnet und spannen die Tangentialebene im Punkt $\mathbf{x}(u, v)$ auf (falls eine solche überhaupt existiert). Sie sind folgendermaßen definiert:

$$\mathbf{g}_1 := \frac{\partial \mathbf{x}(u^1, u^2)}{\partial u^1} = \mathbf{x}_{u^1}(u^1, u^2) = \frac{\partial x(u^1, u^2)}{\partial u^1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial y(u^1, u^2)}{\partial u^1} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial z(u^1, u^2)}{\partial u^1} \mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{g}_2 := \frac{\partial \mathbf{x}(u^1, u^2)}{\partial u^2} = \mathbf{x}_{u^2}(u^1, u^2) = \frac{\partial x(u^1, u^2)}{\partial u^2} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial y(u^1, u^2)}{\partial u^2} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial z(u^1, u^2)}{\partial u^2} \mathbf{e}_3$$

Die GAUSSschen Tangentenvektoren stehen nur dann senkrecht aufeinander, wenn sich die Parameterlinien orthogonal schneiden. Ist dies der Fall, so spricht man von einer **orthogonalen Parametrisierung** der vorliegenden Fläche.

Die Geometrie einer Fläche wird durch ihre Metrik charakterisiert, welche den Abstand ds zweier infinitesimal benachbarter Punkte auf dieser Fläche beschreibt. Dieser Abstand kann für eine beliebige Fläche ausgehend von ihrer Parametrisierung und den zugehörigen GAUSSschen Tangentenvektoren berechnet werden.

Zunächst werden die Komponenten des zur jeweiligen Fläche gehörenden Metriktensors benötigt, welche auch als **Fundamentalgrößen 1.Art** bezeichnet werden:

$$e := \langle \mathbf{g}_1 | \mathbf{g}_1 \rangle = \langle \mathbf{x}_{u^1}(u^1, u^2) | \mathbf{x}_{u^1}(u^1, u^2) \rangle$$

$$f := \langle \mathbf{g}_1 | \mathbf{g}_2 \rangle = \langle \mathbf{x}_{u^1}(u^1, u^2) | \mathbf{x}_{u^2}(u^1, u^2) \rangle$$

$$g := \langle \mathbf{g}_2 | \mathbf{g}_2 \rangle = \langle \mathbf{x}_{u^2}(u^1, u^2) | \mathbf{x}_{u^2}(u^1, u^2) \rangle$$

Der zur jeweiligen Fläche gehörende **Metriktensor** besitzt folgendes Aussehen:

$$[g_{kl}] = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

Da das innere Produkt zweier Vektoren kommutativ ist, gilt stets:

$$f = \langle \mathbf{g}_1 | \mathbf{g}_2 \rangle = \langle \mathbf{g}_2 | \mathbf{g}_1 \rangle = g_{12} = g_{21}$$

Liegt zudem eine orthogonale Parametrisierung der zugrunde liegenden Fläche vor, so gilt:

$$f = g_{12} = g_{21} = 0$$

Die **1.Fundamentalform** (*distance function*) beschreibt das Quadrat des Abstands ds zweier infinitesimal benachbarter Flächenpunkte; sie lässt sich mit Hilfe der eben berechneten Komponenten des Metriktensors $[g_{kl}]$ in folgender Form darstellen:

$$\begin{aligned} I = ds^2 &= g_{kl} du^k du^l \\ (1.2) \quad &= e(du^1)^2 + 2f du^1 du^2 + g(du^2)^2 \\ &= g_{11}(du^1)^2 + 2g_{12} du^1 du^2 + g_{22}(du^2)^2 \end{aligned}$$

Zur eindeutigen Unterscheidung zwischen Urbild- und Bildfläche werden im folgenden sämtliche auf das Urbild bezogene Größen mit Großbuchstaben, auf das Bild bezogene Größen hingegen mit Kleinbuchstaben dargestellt. Die allgemeine Parameterdarstellung einer Urbildfläche laute also gemäß (1.1)

$$\mathbf{X}(U^1, U^2) = X(U^1, U^2)\mathbf{E}_1 + Y(U^1, U^2)\mathbf{E}_2 + Z(U^1, U^2)\mathbf{E}_3$$

Entsprechend laute die allgemeine Parameterdarstellung der zugehörigen Bildfläche:

$$\mathbf{x}(u^1, u^2) = x(u^1, u^2)\mathbf{e}_1 + y(u^1, u^2)\mathbf{e}_2 + z(u^1, u^2)\mathbf{e}_3$$

Eine spezielle Aufgabe der Kartenprojektionslehre besteht darin, die Erdoberfläche oder Ausschnitte aus dieser in einer (ebenen) Karte darzustellen. Dies soll Gegenstand der vorliegenden Arbeit sein.

1-2. MÖGLICHE URBILDFLÄCHEN FÜR ABBILDUNGEN DER ERDOBERFLÄCHE

Für die Darstellung in einer Karte muss die Erdoberfläche durch eine geeignete Urbildfläche approximiert werden. In Abhängigkeit der gewünschten Genauigkeit stehen hierfür mehrere Flächen zur Verfügung.

Als Urbildfläche wird üblicherweise entweder eine **Kugel** (*sphere*) oder aber ein **Rotationsellipsoid** (*ellipsoid of revolution*) verwendet. Eine dritte (theoretische) Möglichkeit für die Wahl einer Urbildfläche stellt das **dreiaxige Ellipsoid** dar, das allerdings keinerlei praktische Bedeutung besitzt und hier nur der Vollständigkeit halber aufgeführt ist.

- a) Die **Kugel** wird üblicherweise in sphärischer Länge Λ und sphärischer Breite Φ parametrisiert. Die sphärische Länge Λ eines Punktes P ist der in der Äquatorebene nach Osten positiv gezählte Winkel zwischen dem Hauptmeridian der Kugel (Bezugsmeridian, Nullmeridian) und dem durch den Punkt P verlaufenden Meridian. Die sphärische Breite Φ stellt den Winkel zwischen der Äquatorebene und der Verbindungslinie Kugelmittelpunkt – Punkt P dar (Fig. 1.2). Alternativ kann die Kugel auch in sphärischer Länge Λ und sphärischer Poldistanz Δ parametrisiert werden. Bei der Poldistanz Δ handelt es sich um den Komplementärwinkel von Φ zu 90° , es gilt also $\Delta = 90^\circ - \Phi$.
- b) Im Falle des **Rotationsellipsoids** gilt für die ellipsoidische Länge L eines Punktes P dieselbe Definition wie für den Längewinkel Λ der Kugel. Für die Festlegung des Breitenwinkels gibt es verschiedene Möglichkeiten, von denen an dieser Stelle die wichtigsten vorgestellt werden sollen.
- (i) *Geozentrische Breite γ*
Unter der geozentrischen Breite γ eines Punktes P versteht man den Winkel zwischen der Äquatorebene und der Verbindungslinie Ellipsoidmittelpunkt – Punkt P.
- (ii) *Ellipsoidnormale (geographische) Breite B*
Unter der ellipsoidnormalen Breite B eines Punktes P des Rotationsellipsoids versteht man den Winkel, den die im Punkt P errichtete Flächennormale mit der Äquatorebene einschließt.
- (iii) *Reduzierte Breite β*
Unter der reduzierten Breite β eines Punktes P des Rotationsellipsoids versteht man den Winkel zwischen der Äquatorebene und der Verbindungslinie Ellipsoidmittelpunkt – Punkt P'. Dieser wird durch eine senkrecht zur Äquatorebene verlaufende Projektion des Punktes P auf eine im Mittelpunkt des Rotationsellipsoids gelagerte Kugel gewonnen, die als Radius die große Halbachse des Rotationsellipsoids besitzt.

Für jeden dieser drei Breitenwinkel kann analog zum Kugelfall eine zugehörige Poldistanz angegeben werden. Fig. 1.1 zeigt einen Meridianschnitt, in dem die drei Breiten sowie die zur ellipsoidnormalen Breite gehörige Poldistanz Δ dargestellt sind.

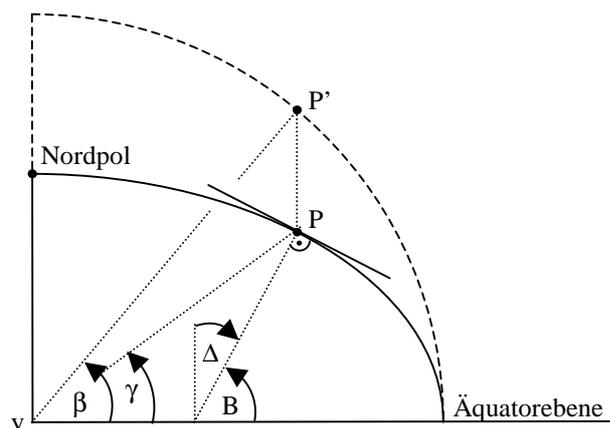


Fig. 1.1: Mögliche Breitenparametrisierungen für das Rotationsellipsoid

Im folgenden wird stets davon ausgegangen, dass, wie in Fig. 1.2 dargestellt, die Kugel in sphärischer Länge Λ (*spherical longitude*) und sphärischer Breite Φ (*spherical latitude*) und das Rotationsellipsoid in ellipsoidischer Länge L (*ellipsoidal longitude*) und ellipsoidnormaler Breite B (*ellipsoidal normal latitude*) parametrisiert ist.

Im Sinne der in Gleichung (1.1) vorgestellten allgemeinen Parameterdarstellung gilt also für die Kugel:

$$U^1 = \Lambda \quad U^2 = \Phi \quad \text{und somit} \quad \mathbf{X}(U^1, U^2) = \mathbf{X}(\Lambda, \Phi)$$

Für das Rotationsellipsoid gilt entsprechend:

$$U^1 = L \quad U^2 = B \quad \text{und somit} \quad \mathbf{X}(U^1, U^2) = \mathbf{X}(L, B)$$

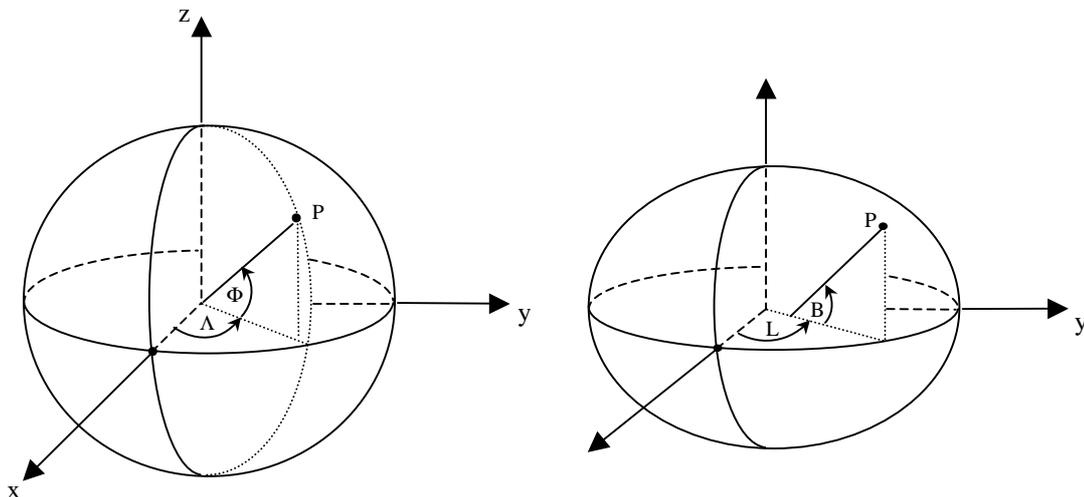


Fig. 1.2: Gebräuchliche Parametrisierungen von Kugel und Rotationsellipsoid

In dem Fig. 1.2 zugrunde liegenden globalen und orthonormalen (X, Y, Z) – Koordinatensystem, das aus den Einheitsvektoren \mathbf{E}_1 , \mathbf{E}_2 und \mathbf{E}_3 gebildet werden soll, lässt sich der Ortsvektor \mathbf{X} eines Punktes P der Kugel mit dem Radius R folgendermaßen darstellen:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(\Lambda, \Phi) &= \begin{pmatrix} R \cos \Lambda \cos \Phi \\ R \sin \Lambda \cos \Phi \\ R \sin \Phi \end{pmatrix} (\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3)^T \\ &= R \cos \Lambda \cos \Phi \mathbf{E}_1 + R \sin \Lambda \cos \Phi \mathbf{E}_2 + R \sin \Phi \mathbf{E}_3 \end{aligned}$$

Für ein Rotationsellipsoid mit großer Halbachse A und Quadrat der ersten numerischen Exzentrizität E^2 gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(L, B) &= \frac{A}{\sqrt{1-E^2 \sin^2 B}} \begin{pmatrix} \cos L \cos B \\ \sin L \cos B \\ (1-E^2) \sin B \end{pmatrix} (\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3)^T \\ &= \frac{A}{\sqrt{1-E^2 \sin^2 B}} (\cos L \cos B \mathbf{E}_1 + \sin L \cos B \mathbf{E}_2 + (1-E^2) \sin B \mathbf{E}_3) \end{aligned}$$

Ausgehend von diesen beiden Parameterdarstellungen sollen nun die zugehörigen Metrikensoren sowie die ersten Fundamentalformen berechnet werden. Dazu werden zunächst die GAUSSschen Tangentenvektoren bereitgestellt. Diese lauten für die Kugel:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_1 &= \frac{\partial \mathbf{X}(U^1, U^2)}{\partial U^1} = \frac{\partial \mathbf{X}(\Lambda, \Phi)}{\partial \Lambda} = \mathbf{X}_\Lambda = -R \sin \Lambda \cos \Phi \mathbf{E}_1 + R \cos \Lambda \cos \Phi \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{G}_2 &= \frac{\partial \mathbf{X}(U^1, U^2)}{\partial U^2} = \frac{\partial \mathbf{X}(\Lambda, \Phi)}{\partial \Phi} = \mathbf{X}_\Phi = -R \cos \Lambda \sin \Phi \mathbf{E}_1 - R \sin \Lambda \sin \Phi \mathbf{E}_2 + R \cos \Phi \mathbf{E}_3 \end{aligned}$$

Für das Rotationsellipsoid erhält man entsprechend:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_1 &= \frac{\partial \mathbf{X}(U^1, U^2)}{\partial U^1} = \frac{\partial \mathbf{X}(L, B)}{\partial L} = \mathbf{X}_L = \frac{A \cos B}{\sqrt{1-E^2 \sin^2 B}} (-\sin L \mathbf{E}_1 + \cos L \mathbf{E}_2) \\ \mathbf{G}_2 &= \frac{\partial \mathbf{X}(U^1, U^2)}{\partial U^2} = \frac{\partial \mathbf{X}(L, B)}{\partial B} = \mathbf{X}_B = -\frac{A(1-E^2)}{(1-E^2 \sin^2 B)^{3/2}} (\cos L \sin B \mathbf{E}_1 + \sin L \sin B \mathbf{E}_2 - \cos B \mathbf{E}_3) \end{aligned}$$

Die Fundamentalgrößen 1. Art berechnen sich nun zu:

$$\begin{aligned} E &= \langle \mathbf{G}_1 | \mathbf{G}_1 \rangle = \langle \mathbf{X}_\Lambda | \mathbf{X}_\Lambda \rangle = R^2 \cos^2 \Phi & E &= \langle \mathbf{G}_1 | \mathbf{G}_1 \rangle = \langle \mathbf{X}_L | \mathbf{X}_L \rangle = \frac{A^2 \cos^2 B}{1-E^2 \sin^2 B} \\ F &= \langle \mathbf{G}_1 | \mathbf{G}_2 \rangle = \langle \mathbf{X}_\Lambda | \mathbf{X}_\Phi \rangle = 0 & F &= \langle \mathbf{G}_1 | \mathbf{G}_2 \rangle = \langle \mathbf{X}_L | \mathbf{X}_B \rangle = 0 \\ G &= \langle \mathbf{G}_2 | \mathbf{G}_2 \rangle = \langle \mathbf{X}_\Phi | \mathbf{X}_\Phi \rangle = R^2 & G &= \langle \mathbf{G}_2 | \mathbf{G}_2 \rangle = \langle \mathbf{X}_B | \mathbf{X}_B \rangle = \frac{A^2 (1-E^2)^2}{(1-E^2 \sin^2 B)^3} \end{aligned}$$

(Kugel)

(Rotationsellipsoid)

Somit lauten die Metriktensoren der Kugel bzw. des Rotationsellipsoids:

$$[G_{KL}] = \begin{pmatrix} R^2 \cos^2 \Phi & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix} \quad [G_{KL}] = \begin{pmatrix} \frac{A^2 \cos^2 B}{1 - E^2 \sin^2 B} & 0 \\ 0 & \frac{A^2 (1 - E^2)^2}{(1 - E^2 \sin^2 B)^3} \end{pmatrix}$$

(Kugel) (Rotationsellipsoid)

Nun lassen sich leicht die ersten Fundamentalformen beider Flächen angeben. Für die Kugel ergibt sich

$$I := dS^2 = G_{KL} dU^K dU^L = R^2 \cos^2 \Phi d\Lambda^2 + R^2 d\Phi^2,$$

und für das Rotationsellipsoid erhält man

$$I := dS^2 = G_{KL} dU^K dU^L = \frac{A^2 \cos^2 B}{1 - E^2 \sin^2 B} dL^2 + \frac{A^2 (1 - E^2)^2}{(1 - E^2 \sin^2 B)^3} dB^2.$$

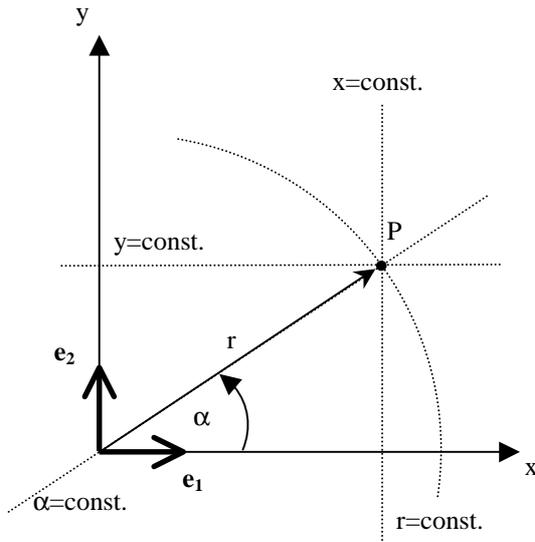
1-3. MÖGLICHE BILDFLÄCHEN

Da die Punkte der Urbildfläche nach erfolgter Abbildung in einer (ebenen) Karte dargestellt werden sollen, kommen als Bildflächen nur solche Flächen in Frage, die entweder von vornherein keine Krümmung besitzen (*Ebene*) oder sich nach erfolgter Abbildung in die Ebene abwickeln lassen. Zu letzteren gehören *Zylinder* und *Kegel*, die entlang einer Mantellinie aufgeschnitten und in die Ebene abgerollt werden können.

In allen Fällen handelt es sich bei der Bildfläche schließlich um eine **Ebene**, die entweder in **kartesischen Koordinaten** (x,y) (*cartesian coordinates*) oder in **Polarkoordinaten** (r,α) (*polar coordinates*) parametrisiert werden kann. In beiden Darstellungen kann der Ortsvektor \mathbf{x} eines Punktes P der Ebene bezüglich eines durch die orthonormalen Basisvektoren \mathbf{e}_1 und \mathbf{e}_2 aufgespannten (x,y) – Koordinatensystems und unter Verwendung der bekannten Transformation von Polarkoordinaten in kartesische Koordinaten

$$\begin{aligned} x &= r \cos \alpha \\ y &= r \sin \alpha \end{aligned}$$

gemäß Fig. 1.3 folgendermaßen koordiniert werden:



$$\mathbf{x}(x, y) = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{x}(\alpha, r) = r \cos \alpha \mathbf{e}_1 + r \sin \alpha \mathbf{e}_2$$

Fig. 1.3: Parametrisierung der Ebene

Im Sinne der in Gleichung (1.1) vorgestellten Parameterdarstellung gilt also für die Parametrisierung der Ebene in kartesischen Koordinaten (x,y) :

$$u^1 = x \quad u^2 = y \quad \text{und somit} \quad \mathbf{x}(u^1, u^2) = \mathbf{x}(x, y)$$

Liegt eine Parametrisierung der Ebene in Polarkoordinaten (α, r) vor, so gilt entsprechend:

$$u^1 = \alpha \quad u^2 = r \quad \text{und somit} \quad \mathbf{x}(u^1, u^2) = \mathbf{x}(\alpha, r)$$

Ausgehend von diesen beiden Parametrisierungen sollen nun die zugehörigen Metriktensoren sowie die ersten Fundamentalformen berechnet werden. Dazu werden zunächst wiederum die GAUSSschen Tangentenvektoren bereitgestellt.

$$\mathbf{g}_1 := \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x} = \mathbf{x}_x = \mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{g}_2 := \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial y} = \mathbf{x}_y = \mathbf{e}_2$$

(kartesisch)

$$\mathbf{g}_1 := \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \alpha} = \mathbf{x}_\alpha = -r \sin \alpha \mathbf{e}_1 + r \cos \alpha \mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{g}_2 := \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r} = \mathbf{x}_r = \cos \alpha \mathbf{e}_1 + \sin \alpha \mathbf{e}_2$$

(polar)

Die Fundamentalgrößen 1.Art berechnen sich zu:

$$e = \langle \mathbf{g}_1 | \mathbf{g}_1 \rangle = \langle \mathbf{x}_x | \mathbf{x}_x \rangle = 1$$

$$f = \langle \mathbf{g}_1 | \mathbf{g}_2 \rangle = \langle \mathbf{x}_x | \mathbf{x}_y \rangle = 0$$

$$g = \langle \mathbf{g}_2 | \mathbf{g}_2 \rangle = \langle \mathbf{x}_y | \mathbf{x}_y \rangle = 1$$

(kartesisch)

$$e = \langle \mathbf{g}_1 | \mathbf{g}_1 \rangle = \langle \mathbf{x}_\alpha | \mathbf{x}_\alpha \rangle = r^2$$

$$f = \langle \mathbf{g}_1 | \mathbf{g}_2 \rangle = \langle \mathbf{x}_\alpha | \mathbf{x}_r \rangle = 0$$

$$g = \langle \mathbf{g}_2 | \mathbf{g}_2 \rangle = \langle \mathbf{x}_r | \mathbf{x}_r \rangle = 1$$

(polar)

Die Metrikensoren und ersten Fundamentalformen für beide Parametrisierungen lauten:

$$[g_{kl}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I := ds^2 = g_{kl} du^k du^l = dx^2 + dy^2$$

(kartesisch)

$$[g_{kl}] = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I := ds^2 = g_{kl} du^k du^l = r^2 d\alpha^2 + dr^2$$

(polar)

1-4. ABBILDUNGSGLEICHUNGEN

Als nächster Schritt wird ein funktionaler Zusammenhang zwischen den Bild- und den Urbildkoordinaten benötigt, aus vorgegebenen Urbildkoordinaten sollen also die entsprechenden Punkte im Bild berechnet werden.

Im allgemeinsten Fall, in dem das Urbild mittels der Flächenparameter U^1 und U^2 und das Bild mittels der Flächenparameter u^1 und u^2 parametrisiert wird, lautet dieser funktionale Zusammenhang:

$$(1.3) \quad \boxed{\begin{aligned} u^1 &= f_1(U^1, U^2) \\ u^2 &= f_2(U^1, U^2) \end{aligned}}$$

Die Funktionen f_1 und f_2 heißen (direkte) **Abbildungsgleichungen** (*direct equations*). Die Indizes 1 und 2 sollen verdeutlichen, dass es sich jeweils um verschiedene Funktionen von U^1 und U^2 handelt. Im Fall von (1.3) werden Urbildpunkten die entsprechenden Punkte im Bild zugeordnet.

Genauso gut lässt sich eine inverse Abbildung konstruieren, mit der sich aus Koordinaten der Bildpunkte u^1, u^2 entsprechende Koordinaten der Urbildpunkte U^1, U^2 berechnen lassen. Die zugehörigen (inversen) Abbildungsgleichungen (*inverse equations*) besitzen folgendes Aussehen:

$$(1.4) \quad \boxed{\begin{aligned} U^1 &= f_3(u^1, u^2) \\ U^2 &= f_4(u^1, u^2) \end{aligned}}$$

Auch hier sollen die Indizes 3 und 4 verdeutlichen, dass es sich jeweils um verschiedene Funktionen von u^1 und u^2 handelt.

Die Funktionen f_1 und f_2 sind im allgemeinen nicht im gesamten Definitionsbereich von (U^1, U^2) eindeutig; einem Urbildpunkt kann folglich nicht immer genau ein Bildpunkt zugeordnet werden. Ebenso verhält es sich mit den Funktionen f_3 und f_4 , welche ebenfalls nicht im gesamten Definitionsbereich von (u^1, u^2) eindeutig sind, so dass einem Bildpunkt nicht immer genau ein Urbildpunkt zugeordnet werden kann.

Zur Verdeutlichung dieses Sachverhaltes soll eine Abbildung der Erdoberfläche betrachtet werden. Dort können beispielsweise die folgenden Fälle auftreten:

- ein bestimmter Meridian wird zweimal abgebildet
- die Pole werden im Bild nicht als Punkt, sondern linienhaft dargestellt
- bestimmte Punkte der Erdoberfläche können überhaupt nicht abgebildet werden

Im Rahmen dieser Arbeit wird stets davon ausgegangen, dass die Abbildungsgleichungen für die einzelnen Abbildungen bereits zur Verfügung stehen und nicht erst hergeleitet werden müssen.

1-5. KARTENMAßSTAB

Wie bereits im Abschnitt 1-4. angedeutet, besteht zwischen den Urbild- und den Bildpunkten im allgemeinen kein eindeutiger Zusammenhang. Desweiteren ist es aus naheliegenden Gründen unmöglich, Teile der Erdoberfläche im Maßstab 1 : 1 in einer Karte darzustellen. Im Zuge einer Abbildung muss daher, je nach Größe des abzubildenden Gebietes, ein bestimmter Abbildungsmaßstab zugrunde gelegt werden, so dass sich Teile der Erdoberfläche in verkleinerter Form in der Karte wiederfinden. Der Abbildungsmaßstab kann wie folgt definiert werden:

- *Unter dem **Abbildungs- oder Kartenmaßstab** versteht man das Verhältnis des für die Abbildung zugrunde gelegten Kugelradius R zum Erdradius R_E . Es gilt also:*

$$M = \frac{R}{R_E}$$

Legt man beispielsweise eine Kugel mit dem Radius $R = 1\text{m}$ zugrunde und setzt den Erdradius zu $R_E = 6370000\text{m}$ an, so besitzt die Abbildung den Maßstab 1 : 6.370.000. Eine entsprechende Definition gilt natürlich auch für das Rotationsellipsoid. An die Stelle der Radien R bzw. R_E treten in diesem Fall die entsprechenden Ellipsoidhalbachsen.

1-6. VERZERRUNGSVERHÄLTNISSE

Bereits im Jahre 1777 hat Leonhard Euler in [7] gezeigt, dass eine gekrümmte Fläche wie eine Kugel oder ein Rotationsellipsoid nicht verzerrungsfrei in die Ebene abgebildet werden kann. Daraus resultiert die Eigenschaft jeder beliebigen Kartenprojektion, dass der jeweilige Abbildungsmaßstab (wie oben definiert) nicht überall in der Karte gilt, sondern nur in bestimmten Punkten oder entlang bestimmter (ausgezeichneter) Linien. Um den Maßstab in anderen Punkten oder entlang anderer Linien nicht als sehr kleine Zahl (z.B. in der Form 1 : 6.370.000) angeben zu müssen, wird ein "lokaler" Maßstab, die Längenverzerrung, eingeführt.

- Unter **Längenverzerrung** oder **Streckung** Λ (*stretch*) versteht man den Maßstab in einem bestimmten Punkt der Karte oder entlang einer bestimmten Linie in der Karte. Dieser Maßstab beträgt in Punkten, in denen der Abbildungsmaßstab (wie oben definiert) beibehalten wird, definitionsgemäß Eins. Ebenso beträgt er entlang von Linien, auf welchen der Abbildungsmaßstab beibehalten wird, Eins; dort gilt somit

$$\Lambda := 1,$$

ein solcher Punkt oder eine solche Linie wird also verzerrungsfrei abgebildet. In anderen Punkten oder entlang anderer Linien wird die Längenverzerrung Λ als Vielfaches von Eins angegeben.

Im folgenden ist stets die Längenverzerrung (Streckung) Λ gemeint, wenn von "Maßstab" gesprochen wird; wie eine solche Längenverzerrung in einem bestimmten Punkt der Karte berechnet werden kann, soll in diesem Abschnitt aufgezeigt werden.

Zu einer solchen Berechnung muss eine **Deformationsanalyse** der zugrundeliegenden Abbildung durchgeführt werden, deren Ausgangspunkt die Abbildungsgleichungen (1.3) und (1.4) bilden. Die Abbildungsgleichungen (1.3) werden im folgenden als "*direkte*", die Gleichungen (1.4) hingegen als "*inverse Abbildungsgleichungen*" bezeichnet:

$u^1 = f_1(U^1, U^2)$	$U^1 = f_3(u^1, u^2)$
$u^2 = f_2(U^1, U^2)$	$U^2 = f_4(u^1, u^2)$
<i>direkt - links</i>	<i>invers - rechts</i>
<i>direct - left</i>	<i>inverse - right</i>

Im nächsten Schritt werden die partiellen Ableitungen der Abbildungsgleichungen gebildet und in der **Jakobi-Matrix** zusammengefasst:

$$\mathbf{J}_l = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(U^1, U^2)}{\partial U^1} & \frac{\partial f_1(U^1, U^2)}{\partial U^2} \\ \frac{\partial f_2(U^1, U^2)}{\partial U^1} & \frac{\partial f_2(U^1, U^2)}{\partial U^2} \end{pmatrix} \quad \mathbf{J}_r = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3(u^1, u^2)}{\partial u^1} & \frac{\partial f_3(u^1, u^2)}{\partial u^2} \\ \frac{\partial f_4(u^1, u^2)}{\partial u^1} & \frac{\partial f_4(u^1, u^2)}{\partial u^2} \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\mathbf{J}_l = \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial U^1} & \frac{\partial u^1}{\partial U^2} \\ \frac{\partial u^2}{\partial U^1} & \frac{\partial u^2}{\partial U^2} \end{pmatrix} \quad \mathbf{J}_r = \begin{pmatrix} \frac{\partial U^1}{\partial u^1} & \frac{\partial U^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial U^2}{\partial u^1} & \frac{\partial U^2}{\partial u^2} \end{pmatrix}$$

linke Jakobi-Matrix
left Jacobi matrix

rechte Jakobi-Matrix
right Jacobi matrix

Sei $[G_{KL}]$ der Metriktensor der Urbildfläche und $[g_{kl}]$ der Metriktensor der Bildfläche, so lassen sich mit Hilfe der soeben bereitgestellten Jakobi-Matrizen die beiden **Cauchy-Greenschen Deformationstensoren** berechnen:

$$[c_{KL}] = \mathbf{J}_l^T [g_{kl}] \mathbf{J}_l = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \quad [C_{kl}] = \mathbf{J}_r^T [G_{KL}] \mathbf{J}_r = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$$

linker Cauchy-Green-Deformationstensor *rechter Cauchy-Green-Deformationstensor*
left Cauchy-Green deformation tensor *right Cauchy-Green deformation tensor*

Bei diesen Deformationstensoren handelt es sich um symmetrische Matrizen, es gelten somit die Beziehungen:

$$[c_{KL}] = [c_{KL}]^T \quad [C_{kl}] = [C_{kl}]^T.$$

Für die Nebendiagonalelemente gilt somit:

$$c_{12} = c_{21} \quad C_{12} = C_{21}$$

Falls sich die Parameterlinien im Urbild orthogonal schneiden und sich diese nach erfolgter Abbildung auch im Bild orthogonal wiederfinden, gilt stets:

$$c_{12} = c_{21} = C_{12} = C_{21} = 0$$

Mit Hilfe der Komponenten beider Deformationstensoren lässt sich nach erfolgter Abbildung die Metrik der Bildfläche ds^2 als Funktion der Urbildkoordinaten (U^1, U^2) , sowie die Metrik der Urbildfläche dS^2 als Funktion der Bildkoordinaten (u^1, u^2) darstellen. Man erhält:

$$\begin{aligned} ds^2 &= c_{KL} dU^K dU^L & dS^2 &= C_{kl} du^k du^l \\ &= c_{11} (dU^1)^2 + 2c_{12} dU^1 dU^2 + c_{22} (dU^2)^2 & &= C_{11} (du^1)^2 + 2C_{12} du^1 du^2 + C_{22} (du^2)^2 \end{aligned}$$

linkes Bogenelement
left distance function

rechtes Bogenelement
right distance function

Mittels der beiden Cauchy-Greenschen Deformationstensoren bzw. der beiden Bogenelemente ds^2 und dS^2 sollen nun zwei verschiedene Längenverzerrungen (Streckungen) vorgestellt werden.

- a) Die erste Möglichkeit der Definition einer Längenverzerrung besteht in der Angabe des Längenverhältnisses aus dem Abstand zweier infinitesimal benachbarter Punkte der Urbildfläche und demselben Abstand, wie er sich nach erfolgter Abbildung im Bild darstellt. Im Urbild wird dieser Abstand gemäß (1.2) durch dessen Metrik bestimmt, im Bild hingegen durch die Komponenten des Cauchy-Greenschen Deformationstensors.

Für die beiden Fälle einer direkten und der zugehörigen inversen Abbildung lassen sich so die **Längenverzerrungen** Λ und λ definieren. Ihre Quadrate lauten:

$$\Lambda^2 := \frac{ds^2}{dS^2} = \frac{c_{KL} dU^K dU^L}{G_{KL} dU^K dU^L} = \frac{c_{11}(dU^1)^2 + 2c_{12}dU^1 dU^2 + c_{22}(dU^2)^2}{G_{11}(dU^1)^2 + 2G_{12}dU^1 dU^2 + G_{22}(dU^2)^2}$$

*linke Längenverzerrung
left stretch*

$$\lambda^2 := \frac{dS^2}{ds^2} = \frac{C_{kl} du^k du^l}{g_{kl} du^k du^l} = \frac{C_{11}(du^1)^2 + 2C_{12}du^1 du^2 + C_{22}(du^2)^2}{g_{11}(du^1)^2 + 2g_{12}du^1 du^2 + g_{22}(du^2)^2}$$

*rechte Längenverzerrung
right stretch*

Aus diesen allgemeinen Definitionen für die Längenverzerrung lässt sich ein wichtiger Spezialfall herleiten, nämlich die **Streckungen entlang der Parameterlinien**. Für viele Anwendungen, beispielsweise zur Untersuchung der Eignung oder zur Bestimmung spezieller Eigenschaften einer bestimmten Abbildungsart, ist es wichtig, den Maßstab entlang einer ins Bild abgebildeten Parameterlinie des Urbilds berechnen zu können. Ein solcher Maßstab gilt dann nicht nur für einen bestimmten Punkt, sondern entlang der betrachteten Parameterlinie.

Entlang einer Parameterlinie $U^1 = \text{const.}$ gilt:	$dU^1 = 0$
Entlang einer Parameterlinie $U^2 = \text{const.}$ gilt:	$dU^2 = 0$
Entlang einer Parameterlinie $u^1 = \text{const.}$ gilt:	$du^1 = 0$
Entlang einer Parameterlinie $u^2 = \text{const.}$ gilt:	$du^2 = 0$

Werden diese Werte in die obigen allgemeinen Definitionen eingesetzt, so erhält man die folgenden Ergebnisse:

$$\Lambda_1^P = \sqrt{\frac{c_{11}}{G_{11}}} \quad \dots \text{linke Streckung entlang der Parameterlinie } U^2 = \text{const.}$$

$$\Lambda_2^P = \sqrt{\frac{c_{22}}{G_{22}}} \quad \dots \text{linke Streckung entlang der Parameterlinie } U^1 = \text{const.}$$

$$\lambda_1^P = \sqrt{\frac{C_{11}}{g_{11}}} \quad \dots \text{rechte Streckung entlang der Parameterlinie } u^2 = \text{const.}$$

$$\lambda_2^P = \sqrt{\frac{C_{22}}{g_{22}}} \quad \dots \text{rechte Streckung entlang der Parameterlinie } u^1 = \text{const.}$$

- b) Einen zweiten möglichen Zugang zum Problem der Bestimmung von Längenverzerrungen liefert der **Satz von Tissot**:

Eine Abbildung f sei zweimal stetig differenzierbar und die Determinante der Jakobi-Matrix der zugehörigen Abbildungsgleichungen sei ungleich Null:

$$\det \mathbf{J} \neq 0 .$$

Dann existiert ein Kartenwechsel derart, dass sich die Parameterlinien in der Urbildfläche und ihr Abbild in der Bildfläche orthogonal schneiden.

Dies bedeutet, dass es unter den genannten Voraussetzungen gelingt, eine orthogonale Parametrisierung der Urbildfläche zu finden, so dass sich die Parameterlinien dieser Urbildfläche auch im Bild orthogonal schneiden. Diese orthogonal abgebildeten Parameterlinien definieren die **Hauptstreckungs- oder Hauptverzerrungsrichtungen** der Abbildung. Die Beträge der in diesen Richtungen auftretenden Längenverzerrung werden als **Hauptstreckungen** (*principal stretches*) bezeichnet und stellen nichts anderes dar als die Eigenwerte des zugehörigen Cauchy-Greenschen Deformationstensors. Die Hauptverzerrungsrichtungen werden dementsprechend durch die Eigenvektoren des Cauchy-Greenschen Deformationstensors vorgegeben.

Zur Berechnung der Hauptstreckungen ist also die **allgemeine Eigenwertaufgabe** zu lösen. Sei Λ ein Eigenwert des linken Cauchy-Greenschen Deformationstensors $[c_{KL}]$ und U_l der zugehörige Eigenvektor und sei ferner λ ein Eigenwert des rechten Cauchy-Greenschen Deformationstensors $[C_{kl}]$ und u_r der zugehörige Eigenvektor, so lautet die allgemeine Eigenwertaufgabe für die Fälle einer direkten bzw. inversen Abbildung:

$$\boxed{(c_{KL} - \Lambda^2 G_{KL})U_L = \mathbf{0}} \quad (1.5) \quad \boxed{(C_{kl} - \lambda^2 g_{kl})u_r = \mathbf{0}}$$

linke *rechte*
Eigenwertaufgabe *Eigenwertaufgabe*

Ausgehend von dieser Aufgabenstellung lassen sich die gesuchten **Eigenwerte** folgendermaßen berechnen:

$$\det(c_{KL} - \Lambda^2 G_{KL}) = 0 \quad \det(C_{kl} - \lambda^2 g_{kl}) = 0$$

Die folgende Herleitung wird nur für den Bildbereich durchgeführt. Es wird folglich an dieser Stelle zunächst nur die linke Eigenwertaufgabe bearbeitet. Die Berechnungen für den Urbildbereich erfolgen völlig analog, so dass nur die Ergebnisse angegeben werden.

$$\det(c_{KL} - \Lambda^2 G_{KL}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} c_{11} - \Lambda^2 G_{11} & c_{12} - \Lambda^2 G_{12} \\ c_{12} - \Lambda^2 G_{12} & c_{22} - \Lambda^2 G_{22} \end{vmatrix} = 0$$

Die Auswertung dieser Beziehung liefert:

$$\Lambda^4 (G_{11}G_{22} - G_{12}^2) - \Lambda^2 (c_{11}G_{11} - 2c_{12}G_{12} + c_{22}G_{11}) + (c_{11}c_{22} - c_{12}^2) = 0$$

bzw.

$$\Lambda^4 - \Lambda^2 \left(\frac{c_{11}G_{11} - 2c_{12}G_{12} + c_{22}G_{11}}{G_{11}G_{22} - G_{12}^2} \right) + \frac{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}{G_{11}G_{22} - G_{12}^2} = 0$$

Unter Ausnutzung der Beziehungen

$$\det(c_{KL}) = c_{11}c_{22} - c_{12}^2$$

$$\det(G_{KL}) = G_{11}G_{22} - G_{12}^2$$

erhält man schließlich den biquadratischen Ausdruck

$$\Lambda^4 - \Lambda^2 \text{trace}(c_{KL}G_{KL}^{-1}) + \det(c_{KL}G_{KL}^{-1}) = 0,$$

so dass für die beiden gesuchten Hauptstreckungen Λ_1 und Λ_2 gilt:

$$\Lambda_{1/2}^2 = \frac{1}{2} \text{trace}(c_{KL}G_{KL}^{-1}) \pm \sqrt{(\text{trace}(c_{KL}G_{KL}^{-1}))^2 - 4 \det(c_{KL}G_{KL}^{-1})}$$

Für den Urbildbereich gilt entsprechend:

$$\lambda_{1/2}^2 = \frac{1}{2} \text{trace}(C_{kl}g_{kl}^{-1}) \pm \sqrt{(\text{trace}(C_{kl}g_{kl}^{-1}))^2 - 4 \det(C_{kl}g_{kl}^{-1})}$$

Aus diesen Zwischenergebnissen lassen sich die gesuchten **Hauptstreckungen** Λ_1, Λ_2 und λ_1, λ_2 bestimmen. Man erhält schließlich:

$$\Lambda_1 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\text{trace}(c_{KL}G_{KL}^{-1}) + 2\sqrt{\det(c_{KL}G_{KL}^{-1})}} + \sqrt{\text{trace}(c_{KL}G_{KL}^{-1}) - 2\sqrt{\det(c_{KL}G_{KL}^{-1})}} \right)$$

$$\Lambda_2 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\text{trace}(c_{KL}G_{KL}^{-1}) + 2\sqrt{\det(c_{KL}G_{KL}^{-1})}} - \sqrt{\text{trace}(c_{KL}G_{KL}^{-1}) - 2\sqrt{\det(c_{KL}G_{KL}^{-1})}} \right)$$

linke Hauptstreckungen
left principal stretches

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\text{trace}(C_{kl}g_{kl}^{-1}) + 2\sqrt{\det(C_{kl}g_{kl}^{-1})}} + \sqrt{\text{trace}(C_{kl}g_{kl}^{-1}) - 2\sqrt{\det(C_{kl}g_{kl}^{-1})}} \right)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\text{trace}(C_{kl}g_{kl}^{-1}) + 2\sqrt{\det(C_{kl}g_{kl}^{-1})}} - \sqrt{\text{trace}(C_{kl}g_{kl}^{-1}) - 2\sqrt{\det(C_{kl}g_{kl}^{-1})}} \right)$$

rechte Hauptstreckungen
right principal stretches

Die Berechnung der linken Hauptstreckungen vereinfacht sich, wenn eine orthogonale Parametrisierung des Urbilds vorliegt und sich die in die Bildebene abgebildeten Parameterlinien orthogonal schneiden. Dann gilt nämlich

$$G_{12} = c_{12} = 0$$

und die Hauptstreckungen berechnen sich zu:

$$\Lambda_1 = \sqrt{\frac{c_{11}}{G_{11}}} \qquad \Lambda_2 = \sqrt{\frac{c_{22}}{G_{22}}}$$

Dasselbe trifft auch für die Berechnung der rechten Hauptstreckungen zu. Gilt nämlich für eine inverse Abbildung

$$g_{12} = C_{12} = 0,$$

so vereinfacht sich auch hier die Berechnung zu:

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{C_{11}}{g_{11}}} \qquad \lambda_2 = \sqrt{\frac{C_{22}}{g_{22}}}$$

In diesem speziellen Fall sind die Hauptstreckungen identisch mit den Streckungen entlang der Parameterlinien. Lässt sich also feststellen, dass im Falle einer direkten Abbildung sowohl der Metriktensor des Urbilds als auch der linke Cauchy-Greensche Deformationstensor Diagonalstruktur besitzen, so muss zur Bestimmung der Hauptstreckungen nicht die allgemeine Eigenwertaufgabe ausgewertet werden. Dasselbe gilt auch im Falle einer inversen Abbildung, wenn der Metriktensor der Bildfläche und der zugehörige rechte Cauchy-Greensche Deformationstensor Diagonalstruktur besitzen.

Nun verbleibt noch die Aufgabe, ausgehend von den Hauptstreckungen die zugehörigen Hauptstreckungsrichtungen, also die Eigenvektoren, zu berechnen.

Dazu müssen die berechneten Hauptstreckungen Λ_1, Λ_2 bzw. λ_1, λ_2 , die im folgenden als Λ_i bzw. λ_i bezeichnet werden, in die Gleichungen (1.5) eingesetzt werden. Man erhält somit die folgenden homogenen linearen Gleichungssysteme:

$$(c_{kl} - \Lambda_i^2 G_{kl}) \mathbf{U}_i = \mathbf{0} \qquad i = 1, 2 \qquad (C_{kl} - \lambda_i^2 g_{kl}) \mathbf{u}_i = \mathbf{0}$$

Seien f_{Li} und f_{L2i} die Koordinaten der zu den linken Hauptstreckungen Λ_i gehörenden linken Eigenvektoren \mathbf{U}_i und f_{r1i} und f_{r2i} die Koordinaten der zu den rechten Hauptstreckungen λ_i gehörenden rechten Eigenvektoren \mathbf{u}_i , so erhält man für die resultierenden linearen Gleichungssysteme die ausführliche Darstellung

$$\begin{pmatrix} c_{11} - \Lambda_i^2 G_{11} & c_{12} - \Lambda_i^2 G_{12} \\ c_{12} - \Lambda_i^2 G_{12} & c_{22} - \Lambda_i^2 G_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{Li} \\ f_{L2i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} C_{11} - \lambda_i^2 g_{11} & C_{12} - \lambda_i^2 g_{12} \\ C_{12} - \lambda_i^2 g_{12} & C_{22} - \lambda_i^2 g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{r1i} \\ f_{r2i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$i = 1, 2$$

In diese Darstellung werden nacheinander die Eigenwerte Λ_1, Λ_2 sowie λ_1, λ_2 eingesetzt, so dass insgesamt vier Gleichungssysteme zu lösen sind. Die Lösungen dieser Gleichungssysteme lauten:

$$\mathbf{U}_1 = \begin{bmatrix} f_{L11} \\ f_{L21} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{G_{11}(c_{22} - \Lambda_1^2 G_{22})^2 - 2G_{12}(c_{12} - \Lambda_1^2 G_{12})(c_{22} - \Lambda_1^2 G_{22}) + G_{22}(c_{12} - \Lambda_1^2 G_{12})^2}} \begin{bmatrix} c_{22} - \Lambda_1^2 G_{22} \\ -(c_{12} - \Lambda_1^2 G_{12}) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U}_2 = \begin{bmatrix} f_{L12} \\ f_{L22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{G_{22}(c_{11} - \Lambda_2^2 G_{11})^2 - 2G_{12}(c_{11} - \Lambda_2^2 G_{11})(c_{12} - \Lambda_2^2 G_{12}) + G_{11}(c_{12} - \Lambda_2^2 G_{12})^2}} \begin{bmatrix} -(c_{12} - \Lambda_2^2 G_{12}) \\ c_{11} - \Lambda_2^2 G_{11} \end{bmatrix}$$

Die gesuchten **linken Eigenvektoren** (*left eigenvectors*) besitzen als Basis die linken GAUSSschen Tangentenvektoren \mathbf{G}_1 und \mathbf{G}_2 , so dass man die folgenden Ergebnisse erhält:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_1 &= f_{L11} \mathbf{G}_1 + f_{L21} \mathbf{G}_2 & \mathbf{U}_2 &= f_{L12} \mathbf{G}_1 + f_{L22} \mathbf{G}_2 \\ \text{linker Eigenvektor zum Eigenwert } \Lambda_1 & & \text{linker Eigenvektor zum Eigenwert } \Lambda_2 & \end{aligned}$$

Für den Urbildbereich lautet die Lösung der entsprechenden Gleichungssysteme:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} f_{r11} \\ f_{r21} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}(C_{22} - \lambda_1^2 g_{22})^2 - 2g_{12}(C_{12} - \lambda_1^2 g_{12})(C_{22} - \lambda_1^2 g_{22}) + g_{22}(C_{12} - \lambda_1^2 g_{12})^2}} \begin{bmatrix} C_{22} - \lambda_1^2 g_{22} \\ -(C_{12} - \lambda_1^2 g_{12}) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} f_{r12} \\ f_{r22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{g_{22}(C_{11} - \lambda_2^2 g_{11})^2 - 2g_{12}(C_{11} - \lambda_2^2 g_{11})(C_{12} - \lambda_2^2 g_{12}) + g_{11}(C_{12} - \lambda_2^2 g_{12})^2}} \begin{bmatrix} -(C_{12} - \lambda_2^2 g_{12}) \\ C_{11} - \lambda_2^2 g_{11} \end{bmatrix}$$

Die gesuchten **rechten Eigenvektoren** (*right eigenvectors*) besitzen als Basis die linken GAUSSschen Tangentenvektoren \mathbf{g}_1 und \mathbf{g}_2 , so dass man die folgenden Ergebnisse erhält:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= f_{r11} \mathbf{g}_1 + f_{r21} \mathbf{g}_2 & \mathbf{u}_2 &= f_{r12} \mathbf{g}_1 + f_{r22} \mathbf{g}_2 \\ \text{rechter Eigenvektor zum Eigenwert } \lambda_1 & & \text{rechter Eigenvektor zum Eigenwert } \lambda_2 & \end{aligned}$$

Für den Fall, dass sich die Parameterlinien im Urbild orthogonal schneiden und sich auch nach einer erfolgten Abbildung orthogonal im Bild wiederfinden, werden obige Berechnungen erheblich vereinfacht. In einem solchen Fall gilt nämlich:

$$G_{12} = c_{12} = 0$$

und da aus $c_{12} = 0$ die einfachen Beziehungen

$$\Lambda_1^2 = \frac{c_{11}}{G_{11}} \quad \Lambda_2^2 = \frac{c_{22}}{G_{22}} \quad \lambda_1^2 = \frac{C_{11}}{g_{11}} \quad \lambda_2^2 = \frac{C_{22}}{g_{22}}$$

folgen, berechnen sich in diesem Fall die linken und rechten Eigenvektoren zu

$$U_1 = \frac{1}{\sqrt{G_{11}}} G_1 \quad u_1 = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} g_1$$

$$U_2 = \frac{1}{\sqrt{G_{22}}} G_2 \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} g_2$$

Abschließend sollen die in diesem Abschnitt erhaltenen Ergebnisse geometrisch interpretiert werden. Von zentraler Bedeutung sind hierbei die sogenannten **Tissot-Ellipsen**, die auch Tissot-Indikatrizen (*Tissot indicatrices*) genannt werden.

Die Untersuchung lokaler Verzerrungen geht aus von dem Verhältnis ds/dS zwischen zwei sich differentiell kleinen Bogenelementen ds im Bild und dS im Urbild. Diese Längenverzerrung ist in ihrem Wert nicht nur von Punkt zu Punkt verschieden, sondern auch am selben Punkt A von der Richtung abhängig. Dieser Sachverhalt sowie einige weitere Aspekte sollen anhand von Fig. 1.4 verdeutlicht werden. Dort wird der Einfachheit halber von einer Darstellung der Erde als Kugel ausgegangen und ein infinitesimaler Kreis auf der Oberfläche dieser Kugel sowie das Abbild dieses Kreises in der Bildebene betrachtet:

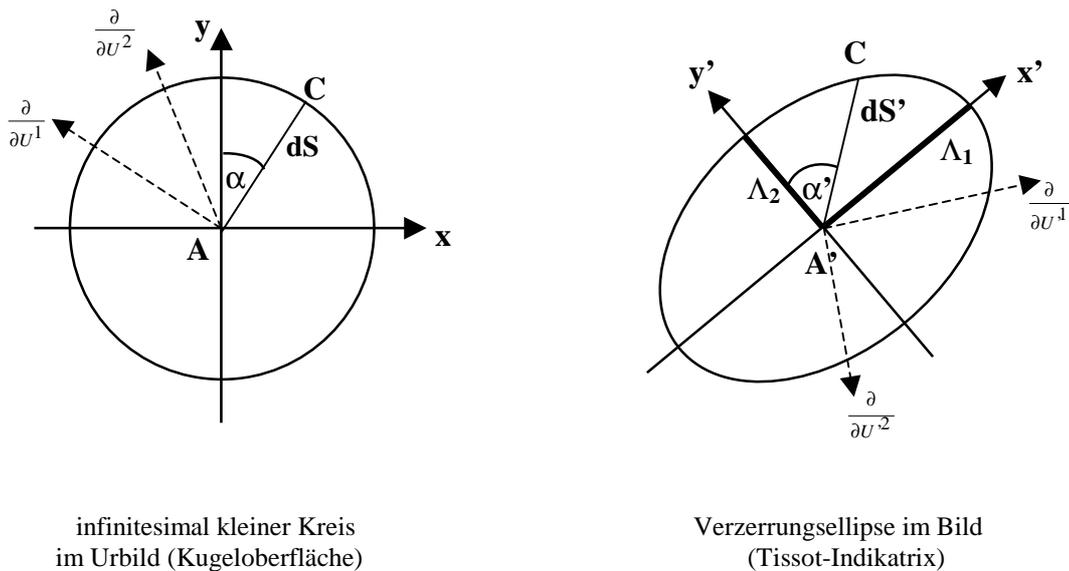


Fig. 1.4: Tissot-Indikatrix als Abbild eines im Urbild generierten infinitesimalen Kreises

In Fig. 1.4 bedeutet:

A	beliebiger Punkt auf der Erdoberfläche mit den geographischen Koordinaten Λ_A, Φ_A
A'	Abbild des Punktes A
C	beliebiger Punkt auf der Erdoberfläche mit den geographischen Koordinaten Λ_C, Φ_C mit infinitesimal kleinem Abstand zu A
C'	Abbild des Punktes C
dS	infinitesimal kleines Bogenelement auf der Erdoberfläche zwischen den Punkten A und C
dS'	Abbild des infinitesimal kleinen Bogenelementes dS
x,y	Richtungen entlang eines Satzes orthogonaler Parameterlinien im Urbild gemäß dem Satz von Tissot
x',y'	Abbild dieses Satzes orthogonaler Parameterlinien
α	Winkel zwischen der y-Richtung und dem Bogenelement dS
α'	Winkel zwischen der abgebildeten y-Richtung und dem abgebildeten Bogenelement dS'
Λ_1	große Halbachse der Tissot-Indikatrix
Λ_2	kleine Halbachse der Tissot-Indikatrix
$\frac{\partial}{\partial U^1}, \frac{\partial}{\partial U^2}$	Richtungen der Parameterlinien im Punkt A
$\frac{\partial}{\partial U'^1}, \frac{\partial}{\partial U'^2}$	Richtungen der Parameterlinien im Abbild A' des Punktes A

Fig. 1.4 zeigt den allgemeinsten Fall einer Abbildung; es soll also keine orthogonale Parametrisierung des Urbilds vorliegen (erkennbar an den Richtungen der Parameterlinien im Punkt A).

Der infinitesimal kleine Kreis entsteht durch eine Drehung des Bogenelementes dS um den Punkt A. Dieses Bogenelement soll die Länge Eins besitzen. Das ist sinnvoll, da dann die Länge dS' (das Abbild von dS) als Längenverzerrung im Punkt A' in Richtung des Punktes C' interpretiert werden kann, welche definitionsgemäß als Vielfaches von Eins angegeben wird. Der infinitesimale Kreis wird nun im Zuge einer Abbildung in die Ebene abgebildet und findet sich dort in Form der oben dargestellten Tissot-Indikatrix wieder. Für einen solchen allgemeinen Fall einer Abbildung sollen die folgenden Eigenschaften festgehalten werden:

- Tissot zeigte im Jahr 1881, dass es zwei im Urbild zueinander senkrechte Richtungen x,y gibt, die auch im Abbild wieder einen rechten Winkel bilden (**Satz von Tissot**). Sie finden sich dort in Form der Richtungen x',y' wieder.
- Ändert man im Urbild die Lage des Punktes C auf dem infinitesimalen Kreis, so führt dies auch zu einer Veränderung der Lage von C' auf der Ellipse im Bild. Als Konsequenz verändert sich die Längenverzerrung im Punkt A' in Richtung von C', je nachdem, wo sich der Punkt C' auf der Ellipse befindet. Die **Längenverzerrung** im Bild ist somit **von der Richtung abhängig**, die durch den Winkel α' repräsentiert wird.

- Es existieren genau zwei Richtungen, entlang derer die Längenverzerrung einmal maximal und einmal minimal wird. Bei diesen Richtungen handelt es sich um die **Hauptverzerrungsrichtungen** x',y' , welche mit den Ellipsenachsen zusammenfallen. Die Längenverzerrungen entlang dieser Richtungen sind die **Hauptstreckungen** Λ_1 und Λ_2 ; die Beträge von Λ_1 und Λ_2 entsprechen der Länge der jeweiligen Ellipsenhalbachse.
- **Ein Winkel wird im allgemeinsten Fall nach erfolgter Abbildung nicht mehr denselben Betrag aufweisen wie vor der Abbildung.** In Fig. 1.4 soll dies durch die unterschiedlichen Winkel α und α' sowie durch die unterschiedlichen Winkel zwischen den Parameterlinien im Urbild und deren Bildern verdeutlicht werden. Es kann also nicht davon ausgegangen werden, dass sich z.B. zwei beliebige, im Urbild zueinander senkrechte Bogenelemente auch rechtwinklig abbilden.
- **Die Streckungen entlang der Parameterlinien $\frac{\partial}{\partial u^1}, \frac{\partial}{\partial u^2}$ sind nicht identisch mit den Hauptstreckungen Λ_1 und Λ_2 .**

Bei sehr vielen Abbildungen tritt der bereits mehrfach diskutierte Spezialfall auf, dass die Urbildfläche orthogonal parametrisiert ist und sich auch die abgebildeten Parameterlinien orthogonal schneiden. Dieser Fall wird bekanntlich durch

$$G_{12} = c_{12} = 0$$

beschrieben. In diesem Fall fallen im Punkt A' die Hauptverzerrungsrichtungen x',y' mit den Richtungen der Parameterlinien zusammen und **die Hauptstreckungen Λ_1 und Λ_2 sind damit identisch mit den Längenverzerrungen (Streckungen) Λ_1^P, Λ_2^P in Richtung der Parameterlinien.**

1-7. SPEZIELLE ABBILDUNGSEIGENSCHAFTEN

Viele Abbildungen besitzen spezielle Eigenschaften. Diese Eigenschaften können für die Klassifizierung einer bestimmten Abbildung herangezogen werden. Im folgenden sollen die wichtigsten Abbildungseigenschaften vorgestellt werden. Es sind dies:

- Äquidistanz (*equidistance*)
- Konformität (*conformality*)
- Flächentreue (*equivalence*)

a) ÄQUIDISTANZ

- *Eine Flächenkurve des Urbilds wird genau dann äquidistant abgebildet, wenn der Maßstab (die Längenverzerrung) entlang dieser abgebildeten Kurve Eins beträgt und somit entlang dieser Kurve der Kartenmaßstab (gemäß Abschnitt 1-5.) beibehalten wird.*

Bei der Eigenschaft der "Äquidistanz" handelt es sich sozusagen um eine "lokale Eigenschaft" einer bestimmten Abbildung. Dies bedeutet, dass nicht gleichzeitig sämtliche denkbaren Linien äquidistant abgebildet werden können, sondern nur einige davon.

Ausgehend von obiger allgemeiner Definition soll nun untersucht werden, welche Bedeutung der Begriff "Äquidistanz" bei der Betrachtung der beiden speziellen Flächenkurven Parallelkreis und Meridian in geometrischer und analytischer Hinsicht besitzt.

(i) Geometrische Definition des Begriffs "Äquidistanz"

- Ein **Parallelkreis** wird im Zuge einer Abbildung dann **äquidistant** abgebildet, wenn er von den abgebildeten Meridianen, die sich um einen immer gleichen Winkel $d\Lambda$ unterscheiden, in gleichen Abständen geschnitten wird. Zusätzlich müssen diese Abstände (unter Berücksichtigung des in Abschnitt 1-5. definierten Kartenmaßstabs) im Bild genauso lang sein wie im Urbild.

Eine entsprechende Definition kann auch für die äquidistante Abbildung eines Meridians angegeben werden:

- Ein **Meridian** wird im Zuge einer Abbildung dann **äquidistant** abgebildet, wenn er von den abgebildeten Parallelkreisen, die sich um einen immer gleichen Winkel $d\Phi$ unterscheiden, in gleichen Abständen geschnitten wird. Zusätzlich müssen diese Abstände (unter Berücksichtigung des in Abschnitt 1-5. definierten Kartenmaßstabs) im Bild genauso lang sein wie im Urbild.

In beiden Fällen beträgt also der Maßstab entlang des abgebildeten Parallelkreises bzw. entlang des abgebildeten Meridians Eins. Dieser Maßstab stellt nichts anderes dar als die Streckung entlang der jeweiligen Parameterlinie, was unmittelbar zu einer analytischen Definition des Begriffs "Äquidistanz" führt:

(ii) Analytische Definition des Begriffs "Äquidistanz"

Mit Hilfe der Streckungen Λ^P_1 und Λ^P_2 entlang der Parameterlinien kann der Begriff "Äquidistanz" analytisch folgendermaßen definiert werden:

- Ein bestimmter **Parallelkreis** $\Phi = \Phi_0$ wird dann **äquidistant** abgebildet, wenn gilt:

$$\Lambda^P_1(\Phi_0) = 1$$

Gilt diese Beziehung nicht nur für den Parallelkreis der sphärischen Breite Φ_0 , sondern für sämtliche Parallelkreise, gilt also

$$\Lambda^P_1 = 1,$$

so werden alle Parallelkreise äquidistant abgebildet und die Abbildung wird als "äquidistant auf der Schar der Längenkreise" bezeichnet.

- Ein bestimmter **Meridian** $\Lambda = \Lambda_0$ wird dann **äquidistant** abgebildet, wenn gilt:

$$\Lambda^P_2(\Lambda_0) = 1$$

Gilt diese Beziehung nicht nur für den Meridian der Länge Λ_0 , sondern für sämtliche Meridiane, gilt also

$$\Lambda^P_2 = 1,$$

so werden alle Meridiane äquidistant abgebildet und die Abbildung wird als "äquidistant auf der Schar der Parallelkreise" bezeichnet.

Beide Definitionen gelten streng nur für den Bildbereich einer Abbildung der Kugel. Entsprechende Definitionen können unter Verwendung der Streckungen entlang der Parameterlinien λ^P_1 und λ^P_2 auch für den Urbildbereich angegeben und leicht auch auf das Rotationsellipsoid übertragen werden.

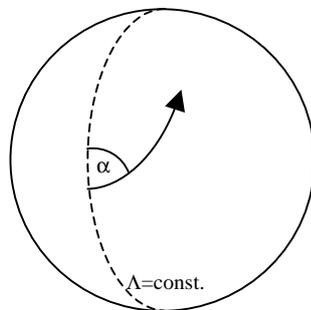
Im Rahmen dieser Arbeit heißt eine Abbildung dann "äquidistant", wenn sämtliche Meridiane äquidistant (ohne Längenverzerrung, mit Maßstab Eins) in die Ebene abgebildet werden.

b) KONFORMITÄT

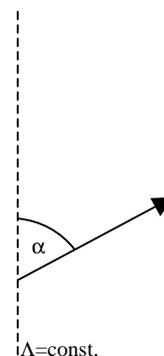
(i) Geometrische Definition des Begriffs "Konformität"

- Eine Abbildung heißt dann **konform**, wenn der Winkel, den zwei Flächenkurven im Urbild einschließen, identisch ist mit dem Winkel, den beide Kurven im Bild einschließen.

Diesen Sachverhalt soll die nachfolgende Skizze (Fig. 1.5) verdeutlichen, in der der Winkel α zwischen einer Kurslinie und einem Meridian sowohl im Urbild als auch im Bild dargestellt ist. Im Falle einer konformen Abbildung sind beide Winkel gleich groß.



Situation im Urbild



Situation in der Karte

Fig. 1.5: Konforme Abbildung einer Kurslinie

(ii) **Analytische Definition des Begriffs "Konformität"**

Mathematisch kann eine konforme Abbildung über die Hauptstreckungen Λ_1 und Λ_2 bzw. im Falle einer inversen Abbildung über die Hauptstreckungen λ_1 und λ_2 definiert werden.

- Eine Abbildung heißt dann **konform**, wenn in jedem Punkt der Bildfläche für die Hauptstreckungen gilt:

$$\Lambda_1 = \Lambda_2 \quad \text{bzw.} \quad \lambda_1 = \lambda_2$$

Als Konsequenz dieser Definition besitzen beide Halbachsen der zugehörigen Tissot-Indikatrix dieselbe Länge. Die Ellipse wird also zu einem Kreis.

Es treten auch Fälle auf, in denen zwar keine konforme Abbildung im soeben definierten Sinn vorliegt, bestimmte abgebildete Flächenkurven aber dennoch konform abgebildet werden. Mit Hilfe der Streckungen Λ^P_1 und Λ^P_2 entlang der Parameterlinien sollen nun die Bedingungen für die konforme Abbildung eines Parallelkreises bzw. eines Meridians angegeben werden:

- Ein bestimmter **Parallelkreis** $\Phi = \Phi_0$ wird dann **konform** abgebildet, wenn gilt:

$$\Lambda^P_1(\Phi_0) = \Lambda^P_2(\Phi_0)$$

- Ein bestimmter **Meridian** $\Lambda = \Lambda_0$ wird dann **konform** abgebildet, wenn gilt:

$$\Lambda^P_1(\Lambda_0) = \Lambda^P_2(\Lambda_0)$$

Wiederum gelten beide Definitionen streng nur für den Bildbereich einer Abbildung der Kugel. Entsprechende Definitionen können unter Verwendung der Streckungen entlang der Parameterlinien λ^P_1 und λ^P_2 auch für den Urbildbereich angegeben und leicht auch auf das Rotationsellipsoid übertragen werden.

c) **FLÄCHENTREUE**(i) **Geometrische Definition des Begriffs "Flächentreue"**

- Eine Abbildung heißt dann **flächentreu**, wenn ein räumlich begrenztes Gebiet der Urbildfläche, welches den Flächeninhalt A besitzt, auf ein Gebiet der Bildfläche abgebildet wird, das (unter Berücksichtigung des Kartenmaßstabes) denselben Flächeninhalt besitzt.

Diesen Sachverhalt soll die nachfolgende Skizze (Fig. 1.6) verdeutlichen, in der eine Fläche, in diesem Beispiel ein sphärisches Dreieck, sowohl im Urbild als auch im Bild dargestellt ist. Im Falle einer flächentreuen Abbildung besitzen beide Flächen (unter Berücksichtigung des Kartenmaßstabes) denselben Flächeninhalt.

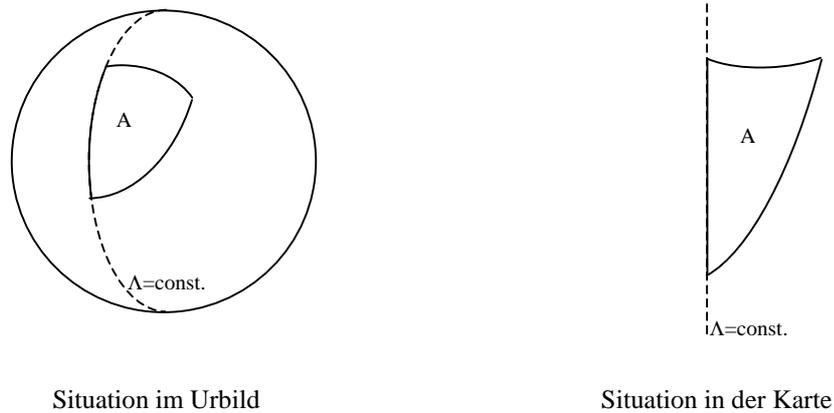


Fig. 1.6: Flächentreue Abbildung eines sphärischen Dreiecks

(ii) Analytische Definition des Begriffs "Flächentreue"

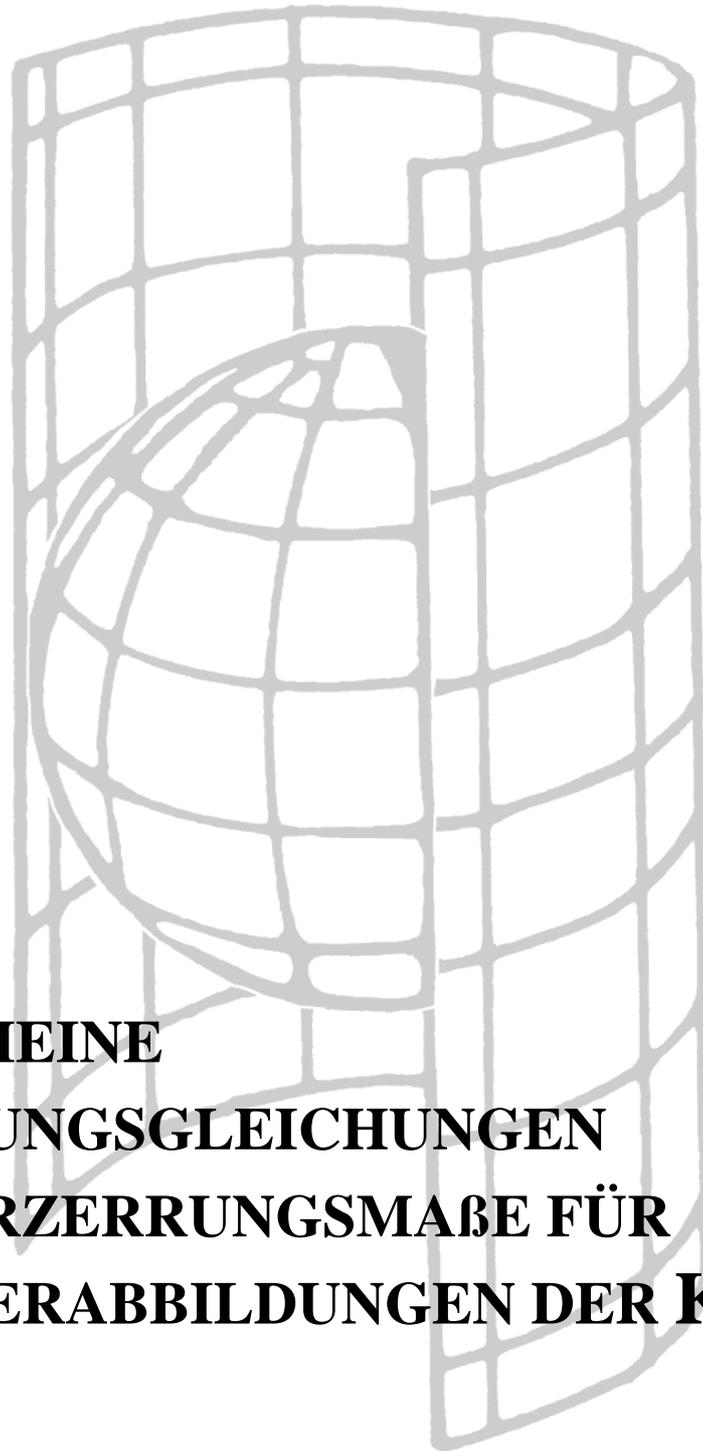
Mathematisch kann eine flächentreue Abbildung über die Hauptstreckungen Λ_1 und Λ_2 bzw. im Falle einer inversen Abbildung über die Hauptstreckungen λ_1 und λ_2 definiert werden.

- Eine Abbildung heißt dann **flächentreu**, wenn in jedem Punkt der Bildfläche für die Hauptstreckungen gilt:

$$\Lambda_1 \Lambda_2 = 1 \quad \text{bzw.} \quad \lambda_1 \lambda_2 = 1$$

Das bedeutet nichts anderes, als dass die Hauptstreckung Λ_1 bzw. λ_1 dem Kehrwert von Λ_2 bzw. λ_2 entspricht und umgekehrt. Im Falle einer solchen Abbildung besitzen die Tissot-Indikatrizien in jedem Punkt denselben Flächeninhalt.

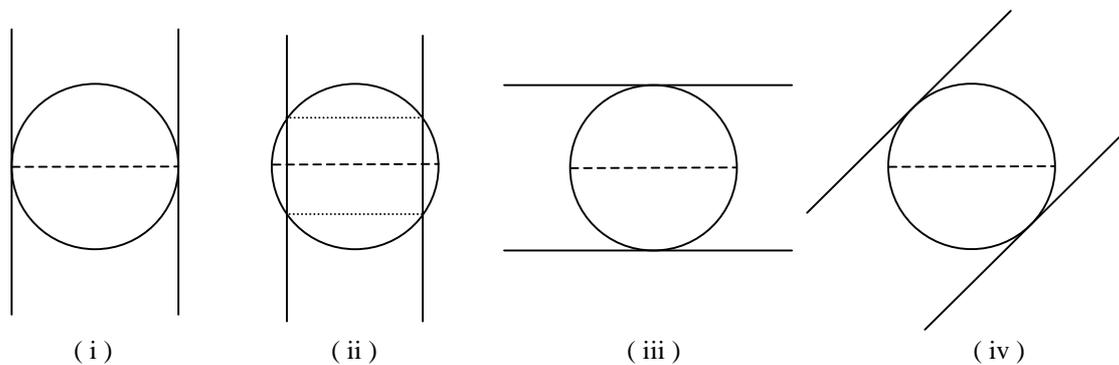
KAPITEL 2



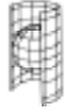
ALLGEMEINE ABBILDUNGSGLEICHUNGEN UND VERZERRUNGSMÄßE FÜR ZYLINDERABBILDUNGEN DER KUGEL



Im Zusammenhang mit Kartenentwürfen treten häufig die Begriffe **echte** Abbildung und **unechte (Pseudo-)** Abbildung, sowie **normale (normalständige)**, **transversale** und **schiefachsige** Lage und schließlich **berührender** oder **schneidender** Zylinder auf. Alle diese Begriffe charakterisieren im wesentlichen die Abbildungen, wobei sie ganz besonders auf die gegenseitige Lage von Urbildfläche, also Kugel oder Rotationsellipsoid, sowie Bildfläche, also Ebene, Zylinder oder Kegel, Bezug nehmen. Als echte Kartenentwürfe werden solche Abbildungen einer Fläche in die Ebene bezeichnet, bei denen die Bilder der Längskreise Geraden und die Bilder der Breitenkreise Kreise oder Geraden sind. Anderenfalls spricht man von unechten bzw. Pseudoabbildungen. Im Rahmen dieser Studienarbeit werden im weiteren ausschließlich echte Kartenentwürfe betrachtet. Es sollen nun die obigen Eigenschaften echter Kartenentwürfe veranschaulicht werden. Da sich diese Arbeit in erster Linie mit Zylinderabbildungen befasst, werden diese für die folgenden Darstellungen verwendet.



Fall (i) und (ii) sind normale bzw. normalständige Zylinderabbildungen der Kugel oder des Rotationsellipsoides. Eine normale Zylinderabbildung zeichnet sich dadurch aus, dass die Achse des Zylinders parallel zur Rotationsachse der Urbildfläche ist. Diese Rotationsachse wird durch Nord- und Südpol festgelegt und steht senkrecht auf der Äquatorebene, welche in den obigen Beispielen als gestrichelte Linie dargestellt ist. In Beispiel (i) ist der Zylinder ein Berührzylinder und in (ii) ein Schnittzylinder. In dieser Arbeit werden nur diese beiden ersten Fälle betrachtet. Fall (i) ist genau genommen ein Spezialfall des allgemeineren Falles (ii). Die gepunkteten Linien in Beispiel (ii) stellen die beiden Standardparallelen dar. Diese erscheinen für Zylinderabbildungen der Kugel unter den sphärischen Breiten Φ_1 (nördlich) und Φ_2 (südlich) und für Zylinderabbildungen des Rotationsellipsoides unter den ellipsoidischen Breiten B_1 (nördlich) und B_2 (südlich). Da normalständige Zylinderabbildungen symmetrisch zum Äquator sind, gilt $\Phi_1 = -\Phi_2$ bzw. $B_1 = -B_2$. Für den Fall eines berührenden Zylinders ist die eine Standardparallele gleich dem Äquator ($\Phi_1 = \Phi_2 = 0$ bzw. $B_1 = B_2 = 0$). In Fall (iii) handelt es sich um eine transversale Zylinderabbildung, welche sich dadurch auszeichnet, dass die Symmetrieachse des Zylinders parallel zur Äquatorebene ist. Darstellung (iv) zeigt eine schiefachsige Zylinderabbildung.



Die allgemeinen direkten Abbildungsgleichungen für Zylinderabbildungen der Kugel ergeben sich aus den Forderungen, dass die Bildkoordinate y nur von der geographischen Breite Φ abhängen soll, und die Bildkoordinate x nur von der geographischen Länge Λ . Im Falle eines Schnitzzylinders sollen dann zusätzlich die unter der nördlichen Breite Φ_1 bzw. unter der südlichen Breite Φ_2 erscheinenden Standardparallelen äquidistant abgebildet werden. Im Falle eines Berührzylinders soll entsprechend der Äquator äquidistant abgebildet werden. Damit folgt

$$\begin{aligned} x &= R \cos \Phi_{1,2} (\Lambda - \Lambda_0) \\ y &= f(\Phi) \end{aligned}$$

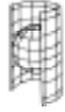
Es wird hier noch einmal darauf hingewiesen, dass aufgrund der Symmetrie zum Äquator $\Phi_1 = -\Phi_2$ gilt und dass es sich bei der Cosinus Funktion um eine gerade Funktion handelt, also $f(x) = f(-x)$ gilt. Somit genügt es im folgenden die allgemeinen Abbildungsgleichungen in der Form

$$\begin{aligned} x &= R \cos \Phi_1 (\Lambda - \Lambda_0) \\ y &= f(\Phi) \end{aligned}$$

anzugeben. Für Λ_0 ist die sphärische Länge des Bezugsmeridians einzusetzen. Wird als Bezugsmeridian der Meridian von Greenwich gewählt, ist $\Lambda_0 = 0$ und entfällt somit.

Die allgemeinen inversen Abbildungsgleichungen für Zylinderabbildungen der Kugel erhält man durch Invertieren der obigen Gleichungen

$$\begin{aligned} \Lambda &= \frac{x}{R \cos \Phi_1} + \Lambda_0 \\ \Phi &= f^{-1}(y) = g(y) \end{aligned}$$



Deformationsanalyse für die allgemeinen Abbildungsgleichungen von Zylinderabbildungen der Kugel

Der Metriktensor des Urbildes (Kugel) lautet (vgl. 1-2.)

$$[G_{KL}] = \begin{pmatrix} R^2 \cos^2 \Phi & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix}.$$

Der Metriktensor einer ebenen Fläche, in welche sich der Zylinder abwickeln lässt, lautet im Fall kartesischer Koordinaten (vgl. 1-3.)

$$[g_{kl}] = \delta_{kl} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ausgehend von den folgenden allgemeinen direkten und inversen Abbildungsgleichungen für Zylinderabbildungen der Kugel,

$$\begin{aligned} x &= R \cos \Phi_1 (\Lambda - \Lambda_0) \\ y &= f(\Phi) \end{aligned}$$

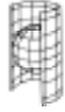
$$\begin{aligned} \Lambda &= \frac{x}{R \cos \Phi_1} + \Lambda_0 \\ \Phi &= f^{-1}(y) = g(y) \end{aligned}$$

welche sich, wie bereits erwähnt, aus der Forderung ergeben, dass die Bildkoordinate y nur von der sphärischen Breite Φ und die Bildkoordinate x nur von der sphärischen Länge Λ abhängen soll, ergibt sich für die linke bzw. für die rechte Jakobi-Matrix (vgl. 1-6.)

$$\mathbf{J}_l = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \Lambda} & \frac{\partial x}{\partial \Phi} \\ \frac{\partial y}{\partial \Lambda} & \frac{\partial y}{\partial \Phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos \Phi_1 & 0 \\ 0 & \frac{df}{d\Phi} \end{pmatrix} \quad \mathbf{J}_r = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Lambda}{\partial x} & \frac{\partial \Lambda}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R \cos \Phi_1} & 0 \\ 0 & \frac{dg}{dy} \end{pmatrix}$$

sowie für den linken bzw. rechten Cauchy-Greenschen-Deformationstensor (vgl. 1-6.)

$$\begin{aligned} [c_{KL}] &= \mathbf{J}_l^T [g_{kl}] \mathbf{J}_l & [C_{kl}] &= \mathbf{J}_r^T [G_{KL}] \mathbf{J}_r \\ [c_{KL}] &= \begin{pmatrix} R^2 \cos^2 \Phi_1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{df}{d\Phi}\right)^2 \end{pmatrix} & [C_{kl}] &= \begin{pmatrix} \frac{\cos^2 g(y)}{\cos^2 \Phi_1} & 0 \\ 0 & R^2 \left(\frac{dg}{dy}\right)^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



Somit ergibt sich das Bogenelement ds^2 des Bildes, als Funktion der Urbildkoordinaten Λ und Φ , zu

$$ds^2 = R^2 \cos^2 \Phi_1 d\Lambda^2 + \left(\frac{df}{d\Phi} \right)^2 d\Phi^2$$

sowie das Bogenelement dS^2 des Urbildes, als Funktion der Bildkoordinaten x und y , zu

$$dS^2 = \frac{\cos^2 g(y)}{\cos^2 \Phi_1} dx^2 + R^2 \left(\frac{dg}{dy} \right)^2 dy^2.$$

Da die Parameterlinien, sowohl im Urbild als auch im Bild, senkrecht zueinander stehen, entsprechen die Hauptstreckungen den Streckungen entlang der Parameterlinien und somit ergeben sich die linken und rechten Hauptstreckungen zu (vgl. 1-6.)

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \sqrt{\frac{c_{11}}{G_{11}}} = \frac{\cos \Phi_1}{\cos \Phi} & \lambda_1 &= \sqrt{\frac{C_{11}}{g_{11}}} = \frac{\cos g(y)}{\cos \Phi_1} \\ \Lambda_2 &= \sqrt{\frac{c_{22}}{G_{22}}} = \frac{1}{R} \left(\frac{df}{d\Phi} \right) & \lambda_2 &= \sqrt{\frac{C_{22}}{g_{22}}} = R \left(\frac{dg}{dy} \right). \end{aligned}$$

Wie unter 1-6. gezeigt, ergeben sich die Eigenvektoren zu

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{\sqrt{G_{11}}} G_1 = \frac{1}{R \cos \Phi} G_1 & u_1 &= \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} g_1 = g_1 \\ U_2 &= \frac{1}{\sqrt{G_{22}}} G_2 = \frac{1}{R} G_2 & u_2 &= \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} g_2 = g_2. \end{aligned}$$

Die maximale Winkelverzerrung wird definiert als

$$\Omega = 2 \arcsin \left| \frac{\Lambda_1 - \Lambda_2}{\Lambda_1 + \Lambda_2} \right| = 2 \arcsin \left| \frac{\frac{\cos \Phi_1}{\cos \Phi} - \frac{1}{R} \left(\frac{df}{d\Phi} \right)}{\frac{\cos \Phi_1}{\cos \Phi} + \frac{1}{R} \left(\frac{df}{d\Phi} \right)} \right|.$$

Der Winkel A , den die Parameterlinien im Urbild einschließen, berechnet sich zu

$$\cos A = \frac{G_{12}}{\sqrt{G_{11} G_{22}}}.$$



Den Winkel α , welchen die Parameterlinien im Bild einschließen, erhält man aus

$$\cos \alpha = \frac{c_{12}}{\sqrt{c_{11}c_{22}}}.$$

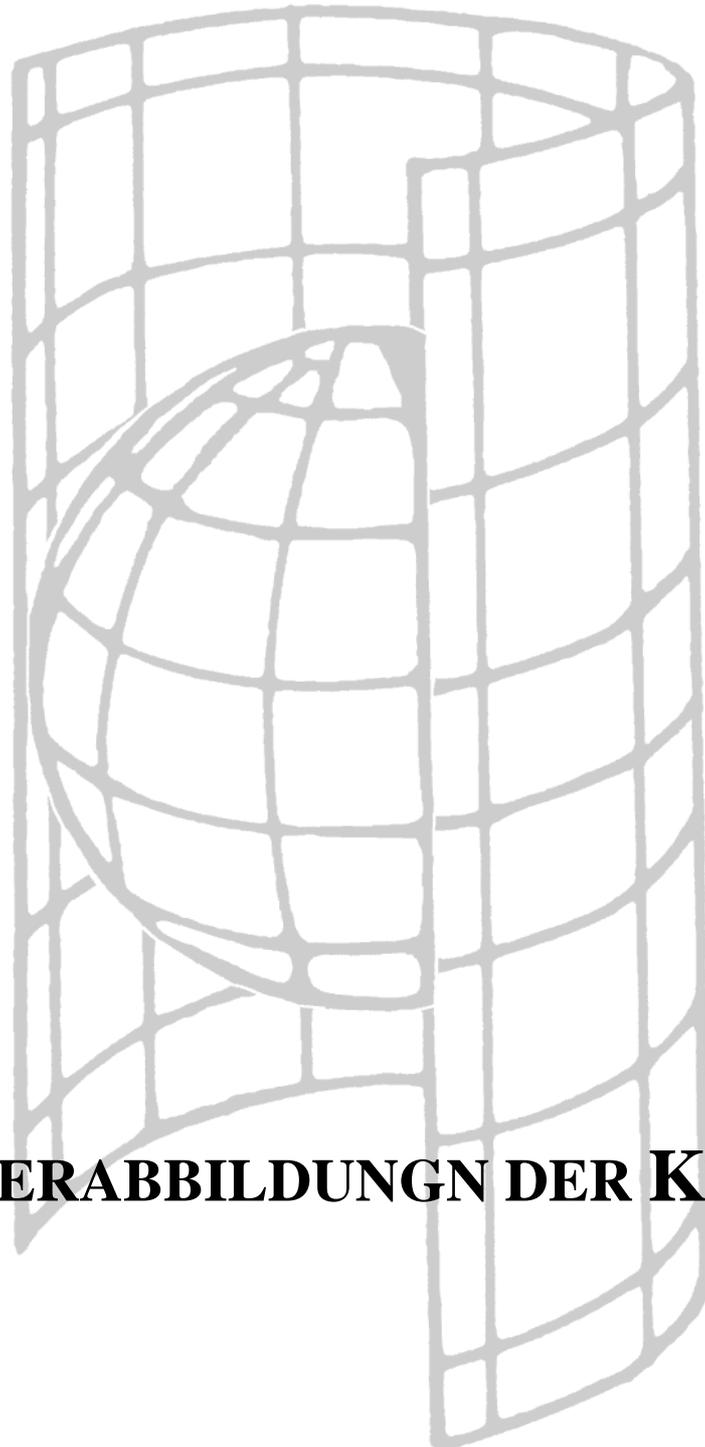
Unter der Scherung versteht man die Differenz

$$\delta = \alpha - A = \arccos \frac{c_{12}}{\sqrt{c_{11}c_{22}}} - \arccos \frac{G_{12}}{\sqrt{G_{11}G_{22}}}$$

der beiden obigen Winkel α und A . Für den Fall einer orthogonalen Parametrisierung, wie sie hier sowohl im Urbild als auch im Bild (G_{12} und $c_{12} = 0$) vorliegt, ergibt sich folglich die Scherung für alle betrachteten Zylinderabbildungen zu 0.

In dem sich anschließenden Kapitel 3 werden einige der bekanntesten und am häufigsten verwendeten Zylinderabbildungen der Kugel hinsichtlich der oben abgeleiteten Größen untersucht. Es werden zusätzlich die Hauptstreckungen Λ_1 und Λ_2 in Abhängigkeit von der sphärischen Breite Φ graphisch dargestellt. Darüber hinaus werden die einzelnen Abbildungen in Form von Weltkarten sowie deren Verzerrungseigenschaften (mit Hilfe von Tissot Ellipsen) veranschaulicht. Diese Darstellungen wurden mit der Mapping Toolbox in MatLab erstellt. Es soll bereits hier darauf hingewiesen werden, dass die Darstellung der Tissot Ellipsen von MatLab vermutlich durch das Einsetzen in die Abbildungsgleichungen erzeugt wird. Diese würde die nicht ganz elliptischen Formen dieser Tissot Ellipsen erklären. Wahre Ellipsen würden sich durch das Verwenden der Hauptstreckungen Λ_1 und Λ_2 als Hauptachsen der Tissot Ellipsen ergeben (vgl. 1-6.).

KAPITEL 3



ZYLINDERABBILDUNG DER KUGEL



3-1. ÄQUIDISTANTE ZYLINDERABBILDUNGEN DER KUGEL

Im folgenden Kapitel 3 soll ein Überblick über die bekanntesten und am häufigsten verwendeten normalständigen Zylinderabbildungen der Kugel gegeben werden. Es sollte zur Kenntnis genommen werden, dass diese Zusammenstellung keinen Anspruch auf Vollständigkeit erhebt. Jeweils zu Beginn eines neuen Abschnitts sollen die darin folgenden Abbildungen hinsichtlich ihrer Eigenschaften, Einsatzmöglichkeiten und ihrer Entstehung charakterisiert werden. Zusätzlich werden weitere Bezeichnungen, wie sie für die jeweiligen Abbildungen in der Literatur ebenfalls üblich sind, gegeben.

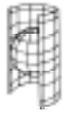
In jedem Abschnitt werden zunächst Abbildungen mit 2 Standardparallelkreisen angeführt. Anschließend sind diejenigen mit einem Standardparallelkreis wiedergegeben, welcher der Äquator im normalständigen Fall ist.

In diesem Abschnitt 3-1. werden äquidistante normalständige Zylinderabbildungen der Kugel behandelt.

ÄQUIDISTANTE ZYLINDERABBILDUNG, ÄQUIDISTANT UND KONFORM AUF DEN BEIDEN STANDARDPARALLELKREISEN Φ_1 UND Φ_2	
Andere Bezeichnung	→ MARINUS Abbildung → RECHTECKIGE PLATTKARTE (carte parallelogrammatique) → Äquidistante Zylinderabbildung mit zwei Standardparallelen (equidistant cylindrical with two standard parallels)
Eigenschaften	Die Meridiane werden, wie die beiden Standardparallelen, bei dieser Abbildung äquidistant abgebildet. Es liegt zusätzlich Konformität an den Standardparallelkreisen vor. Der Äquator wird zu kurz abgebildet. Die Pole werden als Streifen abgebildet, da die Verzerrungen entlang der Breitenkreise zu den Polen hin gegen Unendlich anwachsen. Bei dieser Abbildung werden sowohl die Längen- als auch die Breitenkreise als Geraden dargestellt. Es ergibt sich ein rechteckiges Gitternetz bei dem die Abstände der Breitenkreise größer als die der Längenkreise sind. Flächen zwischen den Parallelkreisen werden zu klein dargestellt, zu den Polen nimmt die Flächenverzerrung außerhalb der Standardparallelen allerdings stark zu. Für $\Phi_{1,2} = \pm 50^\circ 30'$ ergibt sich die RECHTECKIGE PLATTKARTE nach MILLER mit der besonderen Eigenschaft, dass die Projektionsfläche gerade der Kugeloberfläche entspricht. Für $\Phi_{1,2} = \pm 45^\circ$ ergibt sich GALL'S ISOGRAPHISCHE Abbildung .
Einsatzgebiete	Heutzutage findet diese Abbildung kaum noch Anwendung. Gelegentlich wird sie zur Darstellung einfacher Welt- oder Regionalkarten verwendet.
Ursprung	Der Ursprung dieser Abbildung geht auf Arbeiten von Marinus von Tyre um 100 n.Chr. zurück.



ÄQUIDISTANTE ZYLINDERABBILDUNG, ÄQUIDISTANT UND KONFORM AUF DEM STANDARDPARALLELKREIS	
<p><i>Die Abbildungsgleichungen gehen aus denen der Marinus Abbildung (Rechteckige Plattkarte) hervor, indem man $\Phi_{1,2} = 0^\circ$ wählt. Anstelle des Schnitzzylinders ergibt sich als Spezialfall ein Berührzylinder am Äquator.</i></p>	
Andere Bezeichnung	<p>→ PLATE CARRÉE → MITTELABSTANDSTREUE ZYLINDERABBILDUNG → Äquidistante Zylinderabbildung mit einer Standardparallelen (equidistant cylindrical with one standard parallel)</p>
Eigenschaften	<p>Die Meridiane werden wie die Standardparallele (Äquator) äquidistant abgebildet. Die Meridiane sind dabei genau halb so lang wie der Äquator wiedergegeben. Zusätzlich liegt Konformität am Äquator vor. Die Pole werden ebenfalls als Streifen abgebildet, da die Verzerrungen in Ost-West Richtung zu den Polen auch hier gegen Unendlich anwachsen. Die Flächenverzerrung nimmt zu den Polen hin ebenfalls stark zu. Bei dieser Abbildung werden die Längen- wie auch die Breitenkreise als Geraden mit gleichen Abständen dargestellt. Es ergibt sich ein quadratisches Gitternetz. Die Abbildung ist bezüglich des Äquators und jedem beliebigen Meridian symmetrisch.</p>
Einsatzgebiete	<p>Im 15. und 16. Jahrhundert wurde diese Abbildung zur Darstellung einfacher Weltkarten verwendet. Heute wird diese Abbildung gelegentlich in der Geographie zur Darstellung von Daten in Diagrammgestalt oder als Indexkarte verwendet. Auch bei Computerprogrammen zur Herstellung einfacher Karten findet sie häufig Anwendung.</p>
Ursprung	<p>Der Ursprung dieser Abbildung geht bis in das 3. Jahrhundert v.Chr. zurück, in welchem sie vermutlich von Eratosthenes entwickelt wurde. Marinus von Tyre griff sie um 100 n.Chr. im Rahmen seiner Arbeit auf. Eher unwahrscheinlich ist eine Entstehung schon um 550 v.Chr., welche Anaximander zugeschrieben würde.</p>



EQUIDISTANT CYLINDRICAL PROJECTION EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF TWO STANDARD PARALLELS Φ_1, Φ_2

MARINUS PROJECTION

direct equations, cartesian coordinates

$$\begin{aligned} x &= R \cos \Phi_1 (\Lambda - \Lambda_0) \\ y &= R\Phi \end{aligned}$$

left Jacobi matrix

$$\mathbf{J}_l = \begin{pmatrix} x_\Lambda & x_\Phi \\ y_\Lambda & y_\Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos \Phi_1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$$

left Cauchy-Green deformation tensor

$$[c_{KL}] = \begin{pmatrix} R^2 \cos^2 \Phi_1 & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix}$$

left distance function

$$ds^2 = R^2 \cos^2 \Phi_1 d\Lambda^2 + R^2 d\Phi^2$$

left principal stretches

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \frac{\cos \Phi_1}{\cos \Phi} \\ \Lambda_2 &= 1 \end{aligned}$$

left eigenvectors

$$\mathbf{U}_1 = \frac{1}{R \cos \Phi} \mathbf{G}_1 \quad \mathbf{U}_2 = \frac{1}{R} \mathbf{G}_2$$

maximum angular deformation

$$\Omega = 2 \arcsin \left| \frac{\cos \Phi_1 - \cos \Phi}{\cos \Phi_1 + \cos \Phi} \right|$$



EQUIDISTANT CYLINDRICAL PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF
TWO STANDARD PARALLELS Φ_1, Φ_2

inverse equations

$$\Lambda = \frac{x}{R \cos \Phi_1} + \Lambda_0$$

$$\Phi = \frac{y}{R}$$

right Jacobi matrix

$$\mathbf{J}_r = \begin{pmatrix} \Lambda_x & \Lambda_y \\ \Phi_x & \Phi_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R \cos \Phi_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \end{pmatrix}$$

right Cauchy-Green deformation tensor

$$[C_{kl}] = \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{y}{R} & 0 \\ \cos^2 \Phi_1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

right distance function

$$dS^2 = \frac{\cos^2 \frac{y}{R}}{\cos^2 \Phi_1} dx^2 + dy^2$$

right principal stretches

$$\lambda_1 = \frac{\cos \frac{y}{R}}{\cos \Phi_1}$$

$$\lambda_2 = 1$$

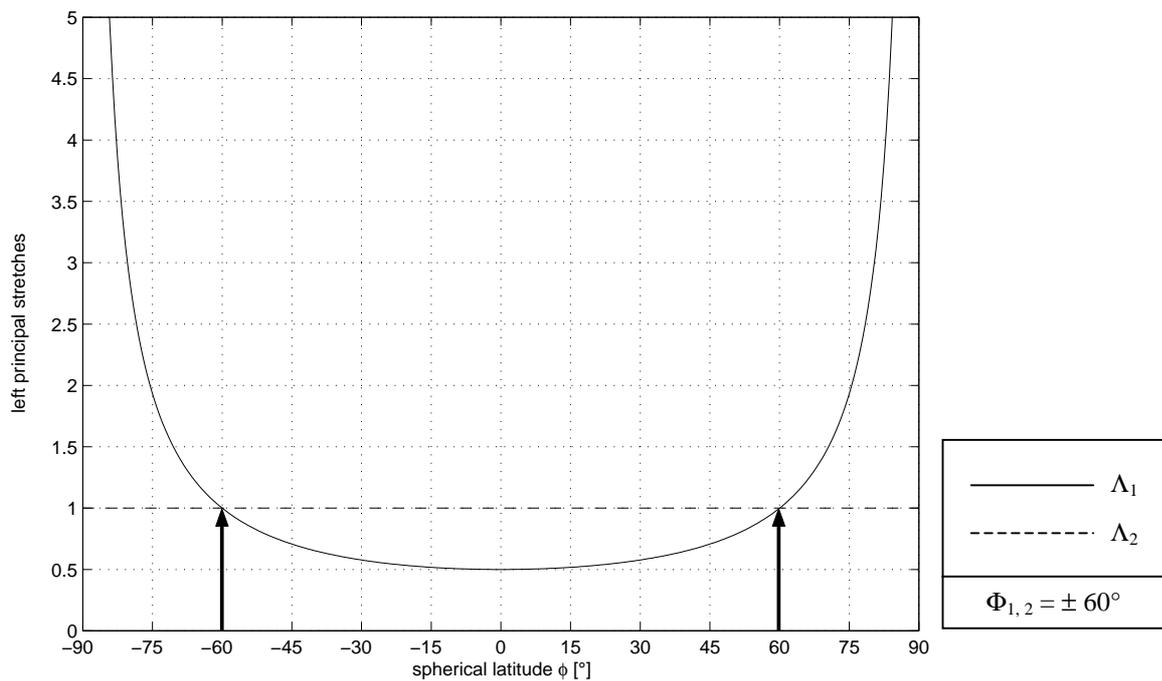
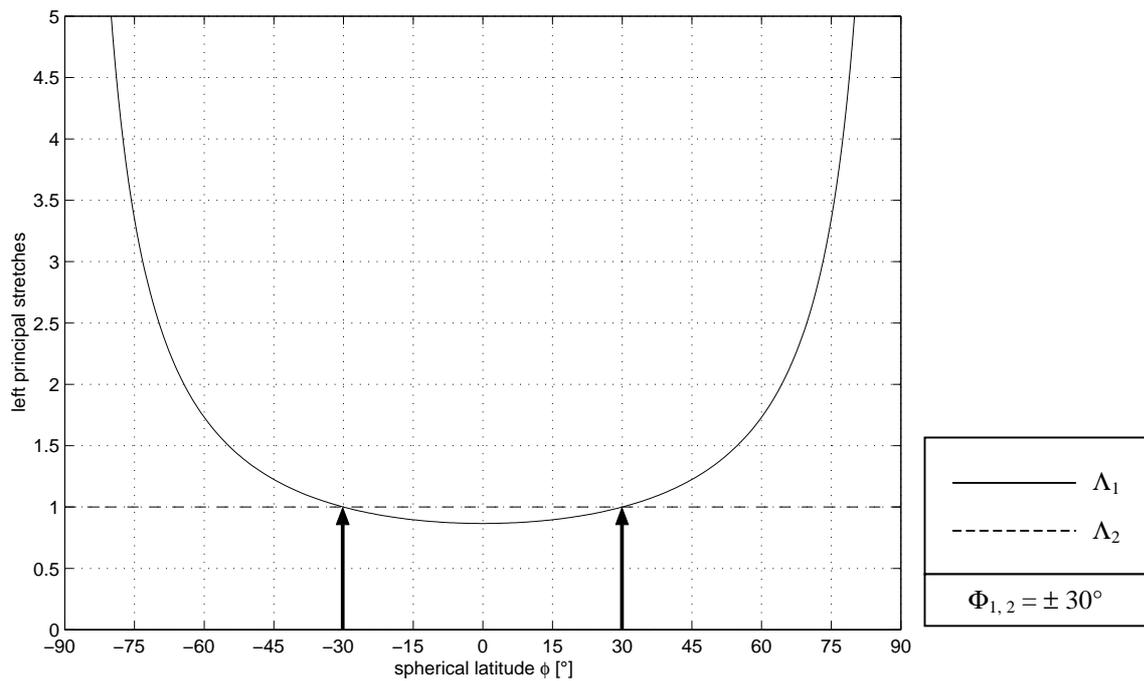
right eigenvectors

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{g}_1 \qquad \mathbf{u}_2 = \mathbf{g}_2$$



EQUIDISTANT CYLINDRICAL PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF
TWO STANDARD PARALLELS Φ_1, Φ_2

left principal stretches as function of the spherical latitude Φ





EQUIDISTANT CYLINDRICAL PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF
TWO STANDARD PARALLELS Φ_1, Φ_2

minimum cartesian coordinate y_{\min}

$$y_{\min} = y\left(\Phi = -\frac{\pi}{2}\right) = -R \frac{\pi}{2}$$

maximum cartesian coordinate y_{\max}

$$y_{\max} = y\left(\Phi = \frac{\pi}{2}\right) = R \frac{\pi}{2}$$

angle of intersection of coordinate lines, left versus right

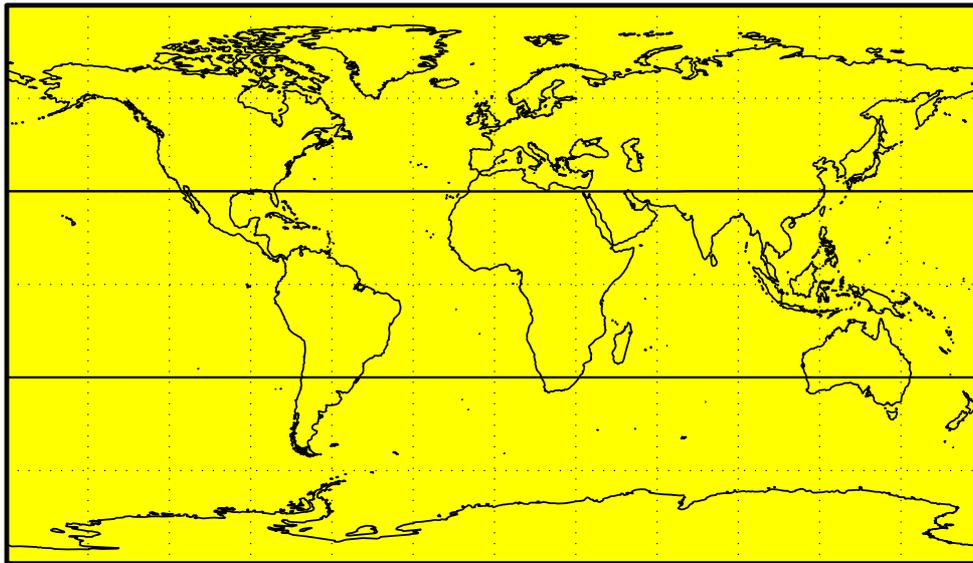
$$A = 90^\circ \quad \alpha = 90^\circ$$

left angular shear

$$\delta = 0^\circ$$

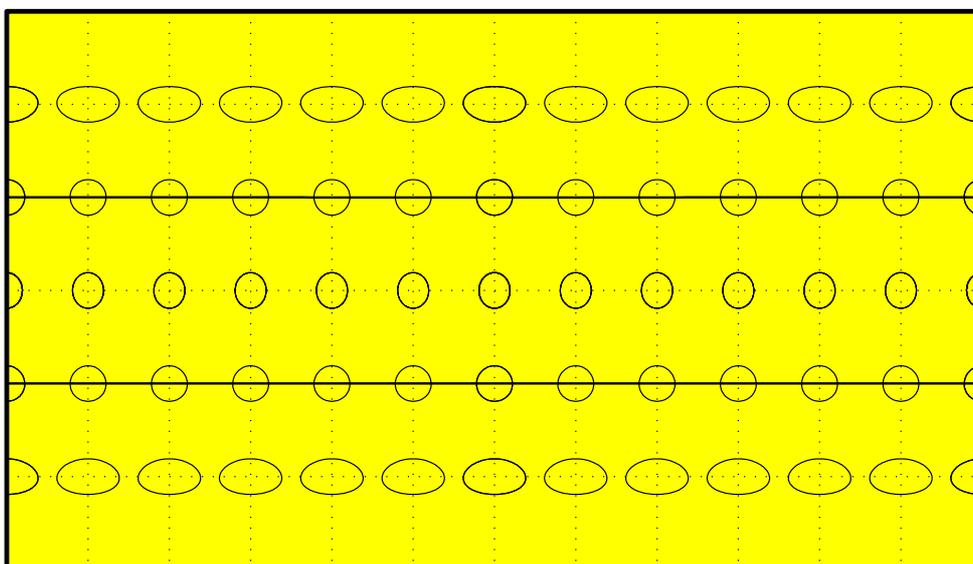


EQUIDISTANT CYLINDRICAL PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF
TWO STANDARD PARALLELS Φ_1, Φ_2



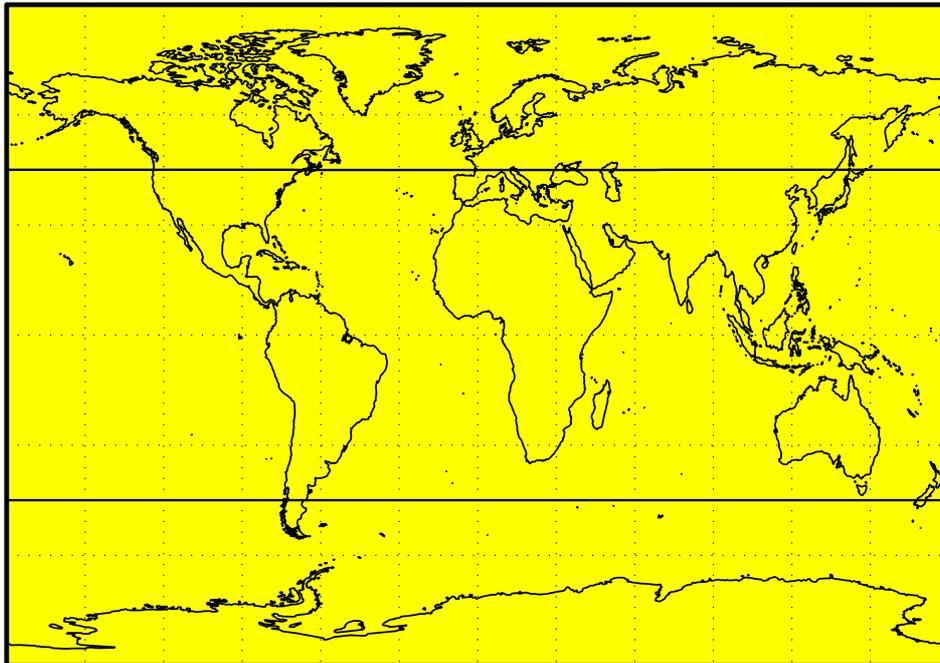
Marinus projection: world map and left Tissot indicatrices

(30° - graticule, standard parallels $\Phi_{1,2} = \pm 30^\circ$)



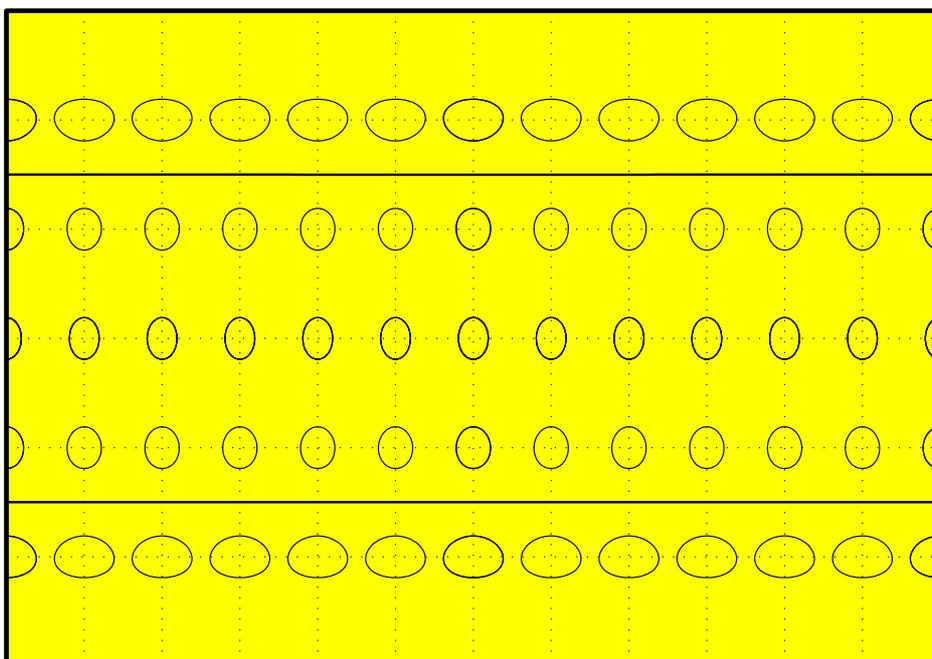


EQUIDISTANT CYLINDRICAL PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF
TWO STANDARD PARALLELS Φ_1, Φ_2



Gall's Isographic projection: world map and left Tissot indicatrices

(30° - graticule, standard parallels $\Phi_{1,2} = \pm 45^\circ$)





EQUIDISTANT CYLINDRICAL PROJECTION EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF THE STANDARD PARALLEL

PLATE CARRÉE PROJECTION

direct equations, cartesian coordinates

$$\begin{aligned} x &= R(\Lambda - \Lambda_0) \\ y &= R\Phi \end{aligned}$$

left Jacobi matrix

$$\mathbf{J}_l = \begin{pmatrix} x_\Lambda & x_\Phi \\ y_\Lambda & y_\Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$$

left Cauchy-Green deformation tensor

$$[c_{KL}] = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix}$$

left distance function

$$ds^2 = R^2 d\Lambda^2 + R^2 d\Phi^2$$

left principal stretches

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \frac{1}{\cos \Phi} \\ \Lambda_2 &= 1 \end{aligned}$$

left eigenvectors

$$\mathbf{U}_1 = \frac{1}{R \cos \Phi} \mathbf{G}_1 \quad \mathbf{U}_2 = \frac{1}{R} \mathbf{G}_2$$

maximum angular deformation

$$\Omega = 2 \arcsin \left| \frac{1 - \cos \Phi}{1 + \cos \Phi} \right| = 2 \arcsin \left| \tan^{-2} \frac{\Phi}{2} \right|$$



EQUIDISTANT CYLINDRICAL PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF THE
STANDARD PARALLEL

inverse equations

$$\Lambda = \frac{x}{R} + \Lambda_0$$

$$\Phi = \frac{y}{R}$$

right Jacobi matrix

$$\mathbf{J}_r = \begin{pmatrix} \Lambda_x & \Lambda_y \\ \Phi_x & \Phi_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \end{pmatrix}$$

right Cauchy-Green deformation tensor

$$[C_{kl}] = \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{y}{R} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

right distance function

$$dS^2 = \cos^2 \frac{y}{R} dx^2 + dy^2$$

right principal stretches

$$\lambda_1 = \cos \frac{y}{R}$$

$$\lambda_2 = 1$$

right eigenvectors

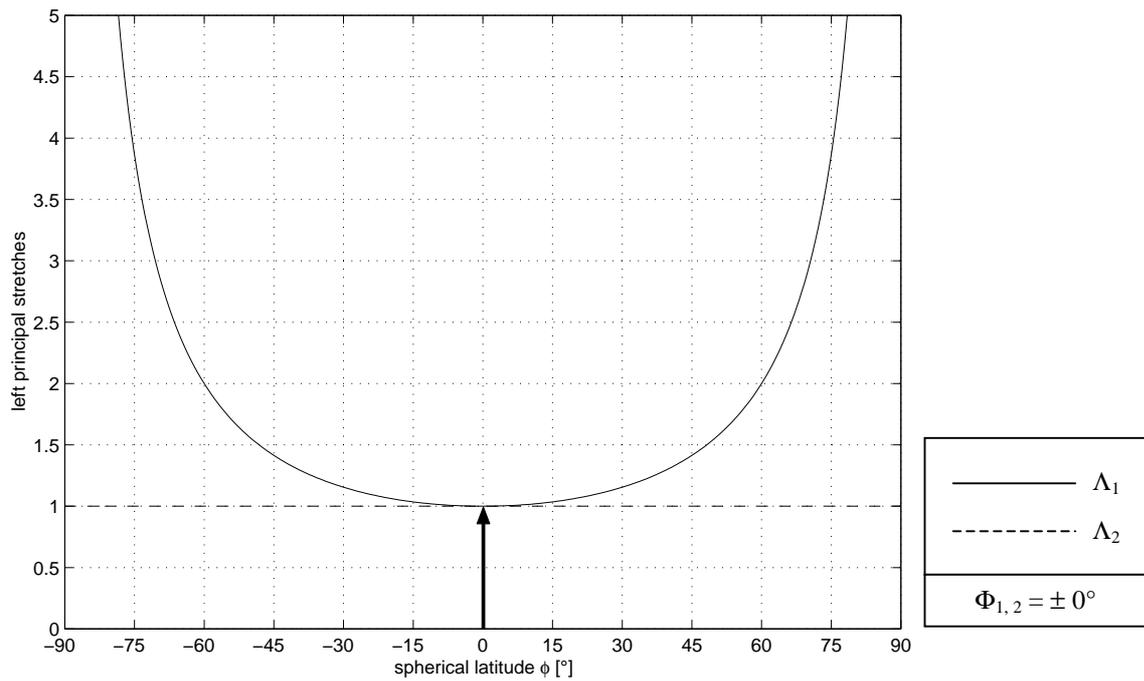
$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{g}_1$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{g}_2$$



EQUIDISTANT CYLINDRICAL PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF THE
STANDARD PARALLEL

left principal stretches as function of the spherical latitude Φ





EQUIDISTANT CYLINDRICAL PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF THE
STANDARD PARALLEL

minimum cartesian coordinate y_{\min}

$$y_{\min} = y\left(\Phi = -\frac{\pi}{2}\right) = -R \frac{\pi}{2}$$

maximum cartesian coordinate y_{\max}

$$y_{\max} = y\left(\Phi = \frac{\pi}{2}\right) = R \frac{\pi}{2}$$

angle of intersection of coordinate lines, left versus right

$$A = 90^\circ \quad \alpha = 90^\circ$$

left angular shear

$$\delta = 0^\circ$$



EQUIDISTANT CYLINDRICAL PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF THE
STANDARD PARALLEL

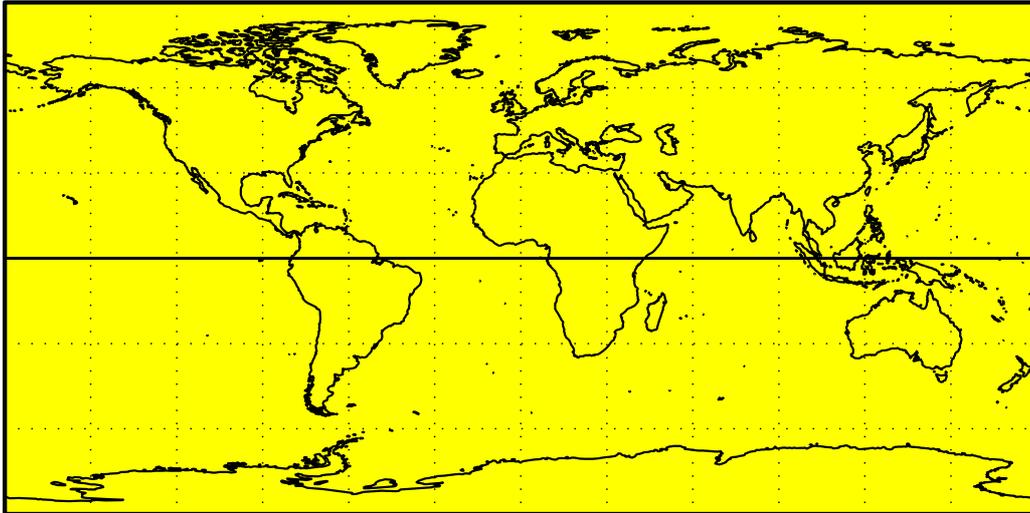
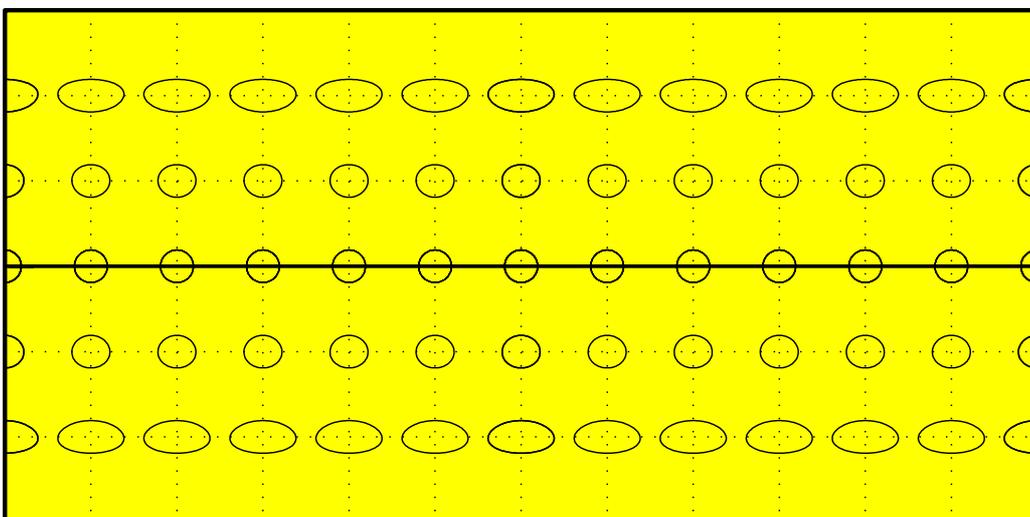


Plate Carrée projection: world map and left Tissot indicatrices

(30° - graticule, standard parallel $\Phi_{1,2} = 0^\circ$)

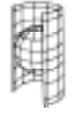




3-2. KONFORME ZYLINDERABBILDUNGEN DER KUGEL

KONFORME ZYLINDERABBILDUNG, ÄQUIDISTANT AUF DEN BEIDEN STANDARDPARALLELKREISEN Φ_1 UND Φ_2	
<i>Diese Abbildung geht auf die eigentliche Mercator Abbildung mit dem Äquator als einzigem Standardparallelkreis zurück. Sie hat sich aus der Notwendigkeit entwickelt, auch andere Breitenkreise äquidistant abzubilden.</i>	
Andere Bezeichnung	→ MERCATOR Abbildung → Normale konforme Zylinderabbildung mit zwei Standardparallelen (Modified Mercator's projection)
Eigenschaften	Diese Abbildung hat die besondere Eigenschaft, dass sie Loxodromen als Geraden abbildet, was sie für Navigationszwecke in der Seefahrt bedeutend macht. Die Meridiane sind gerade Linien in gleichen Abständen. Die Breitenkreise werden ebenfalls geradlinig und orthogonal zu den Meridianen dargestellt, ihre Abstände nehmen allerdings zu den Polen hin zu. In Richtung den Polen nehmen die Verzerrungen sehr stark zu. Die Pole selbst können bei dieser Abbildung überhaupt nicht dargestellt werden. Die Standardparallelen werden äquidistant abgebildet und die Verzerrungen sind in deren Nähe minimal. In jedem beliebigen Punkt sind die Verzerrungen in alle Richtungen gleich. Der Äquator wird zu kurz dargestellt.
Einsatzgebiete	Aufgrund ihrer Eigenschaft Loxodromen als Geraden abzubilden, findet diese Abbildung besonders für Navigationszwecke Einsatz. Aber auch für Weltkarten oder Atlanten wird diese Abbildung häufig verwendet.
Ursprung	Diese Abbildung geht aus der eigentlichen Mercator Abbildung mit einem Standardparallelkreis hervor, die 1569 von Gerardus Mercator als Navigationskarte für die Seefahrt entwickelt wurde.

KONFORME ZYLINDERABBILDUNG, ÄQUIDISTANT AUF DEM STANDARDPARALLELKREIS	
Andere Bezeichnung	→ MERCATOR Abbildung → WRIGHT Abbildung → Normale konforme Zylinderabbildung mit einer Standardparallelen (Regular Mercator projection / equatorial Mercator projection)
Eigenschaften	Loxodromen werden, wie bereits angesprochen, als Geraden dargestellt. Die Aussagen über Meridiane, Breitenkreise und die Pole gelten entsprechend. Der Äquator wird äquidistant abgebildet und die Verzerrungen sind nahe diesem minimal. Aufgrund der Eigenschaft der Konformität ergeben sich die Verzerrungsellipsen zu Kreisen, deren Radien von 1 am Äquator zu Unendlich an den Polen anwachsen. Die Abbildung ist bezüglich des Äquators und jedem beliebigen Meridian symmetrisch.
Einsatzgebiete	Zusammen mit der Gnomonischen Abbildung, bei der Großkreise als Geraden dargestellt werden, findet diese Abbildung häufige Anwendung für Navigationszwecke, vor allem in der Seefahrt. Sie ist häufig zugrunde liegende Kartenprojektion bei Weltkarten und Atlanten. Ein besondere Bedeutung hat sie für die Darstellung äquatornaher Gebiete.
Ursprung	Diese Abbildung wurde 1569 von Gerardus Mercator als Navigationskarte für die Seefahrt entwickelt. Allerdings soll diese Abbildung schon 940 in China von Ch'ien Lo-Chih im Rahmen der Tunhuang Sternenkarte und 1511 von Etzlaub verwendet worden sein. Die zugrunde liegende Mathematik dieser Abbildung wurde 1599 von Edward Wright vorgestellt.



**CONFORMAL CYLINDRICAL PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF
TWO STANDARD PARALLELS Φ_1, Φ_2**

MERCATOR PROJECTION

direct equations, cartesian coordinates

$$\begin{aligned} x &= R \cos \Phi_1 (\Lambda - \Lambda_0) \\ y &= R \cos \Phi_1 \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Phi}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

left Jacobi matrix

$$\mathbf{J}_l = \begin{pmatrix} x_\Lambda & x_\Phi \\ y_\Lambda & y_\Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos \Phi_1 & 0 \\ 0 & \frac{R \cos \Phi_1}{\cos \Phi} \end{pmatrix}$$

left Cauchy-Green deformation tensor

$$[c_{KL}] = \begin{pmatrix} R^2 \cos^2 \Phi_1 & 0 \\ 0 & \frac{R^2 \cos^2 \Phi_1}{\cos^2 \Phi} \end{pmatrix}$$

left distance function

$$ds^2 = R^2 \cos^2 \Phi_1 d\Lambda^2 + \frac{R^2 \cos^2 \Phi_1}{\cos^2 \Phi} d\Phi^2$$

left principal stretches

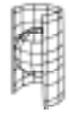
$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \frac{\cos \Phi_1}{\cos \Phi} \\ \Lambda_2 &= \frac{\cos \Phi_1}{\cos \Phi} \end{aligned}$$

left eigenvectors

$$\mathbf{U}_1 = \frac{1}{R \cos \Phi} \mathbf{G}_1 \quad \mathbf{U}_2 = \frac{1}{R} \mathbf{G}_2$$

maximum angular deformation

$$\Omega = 0$$



CONFORMAL CYLINDRICAL PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF
TWO STANDARD PARALLELS Φ_1, Φ_2

inverse equations

$$\Lambda = \frac{x}{R \cos \Phi_1} + \Lambda_0$$

$$\sin \Phi = \tanh\left(\frac{y}{R \cos \Phi_1}\right)$$

right Jacobi matrix

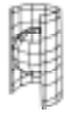
$$\mathbf{J}_r = \begin{pmatrix} \Lambda_x & \Lambda_y \\ \Phi_x & \Phi_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R \cos \Phi_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R \cos \Phi_1} \frac{1}{\cosh\left(\frac{y}{R \cos \Phi_1}\right)} \end{pmatrix}$$

right Cauchy-Green deformation tensor

$$[C_{kl}] = \frac{1}{\cos^2 \Phi_1 \cosh^2\left(\frac{y}{R \cos \Phi_1}\right)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

right distance function

$$dS^2 = \frac{1}{\cos^2 \Phi_1 \cosh^2\left(\frac{y}{R \cos \Phi_1}\right)} (dx^2 + dy^2)$$



CONFORMAL CYLINDRICAL PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF
TWO STANDARD PARALLELS Φ_1, Φ_2

right principal stretches

$$\lambda_1 = \frac{1}{\cos \Phi_1 \cosh\left(\frac{y}{R \cos \Phi_1}\right)}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{\cos \Phi_1 \cosh\left(\frac{y}{R \cos \Phi_1}\right)}$$

right eigenvectors

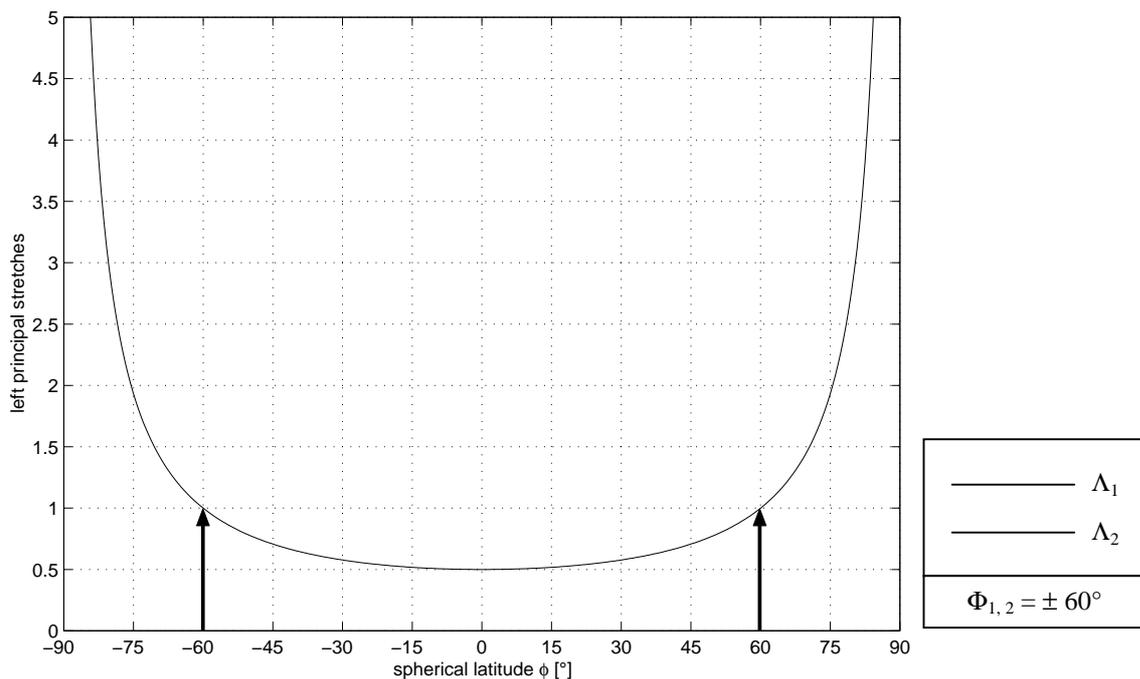
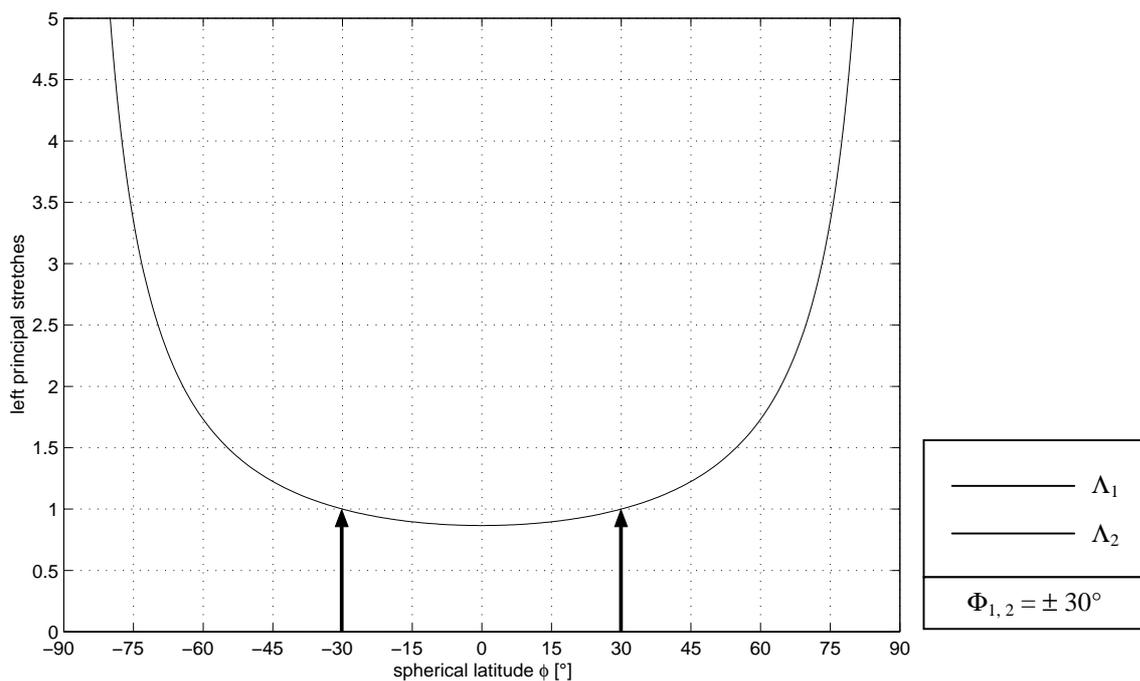
$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{g}_1$$

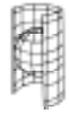
$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{g}_2$$



CONFORMAL CYLINDRICAL PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF
TWO STANDARD PARALLELS Φ_1, Φ_2

left principal stretches as function of the spherical latitude Φ





CONFORMAL CYLINDRICAL PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF
TWO STANDARD PARALLELS Φ_1, Φ_2

minimum cartesian coordinate y_{\min}

$$y_{\min} = y\left(\Phi = -\frac{\pi}{2}\right) = -\infty$$

maximum cartesian coordinate y_{\max}

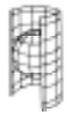
$$y_{\max} = y\left(\Phi = \frac{\pi}{2}\right) = \infty$$

angle of intersection of coordinate lines, left versus right

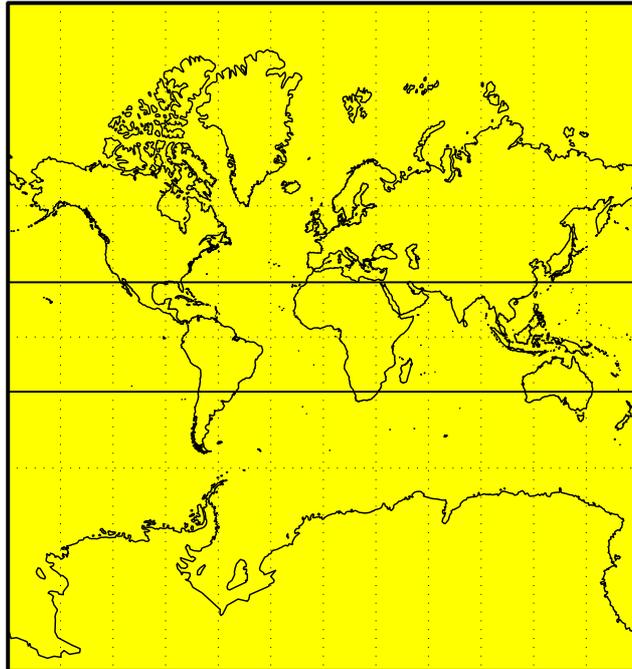
$$A = 90^\circ \quad \alpha = 90^\circ$$

left angular shear

$$\delta = 0^\circ$$

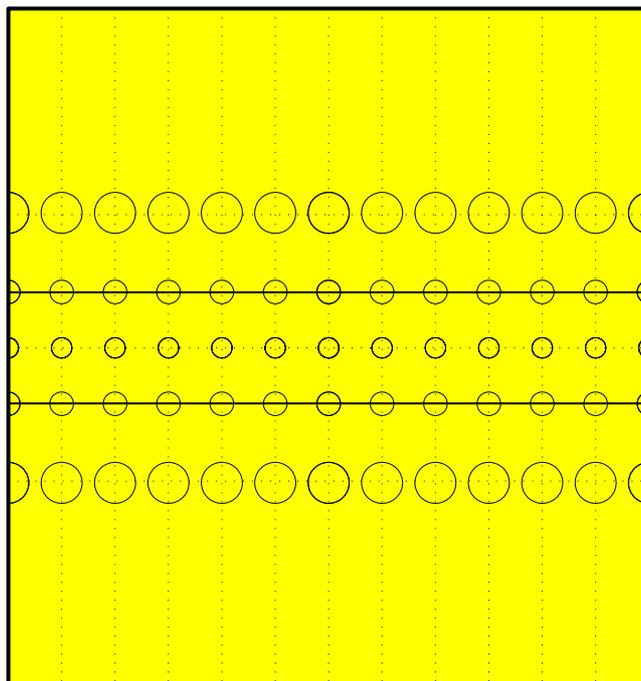


CONFORMAL CYLINDRICAL PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF
TWO STANDARD PARALLELS Φ_1, Φ_2



Mercator projection: world map and left Tissot indicatrices

(30° - graticule, standard parallels $\Phi_{1,2} = \pm 30^\circ$)





**CONFORMAL CYLINDRICAL PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF THE
STANDARD PARALLEL**

MERCATOR PROJECTION

direct equations, cartesian coordinates

$$\begin{aligned} x &= R(\Lambda - \Lambda_0) \\ y &= R \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Phi}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

left Jacobi matrix

$$\mathbf{J}_l = \begin{pmatrix} x_\Lambda & x_\Phi \\ y_\Lambda & y_\Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & \frac{R}{\cos \Phi} \end{pmatrix}$$

left Cauchy-Green deformation tensor

$$[c_{KL}] = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & \frac{R^2}{\cos^2 \Phi} \end{pmatrix}$$

left distance function

$$ds^2 = R^2 d\Lambda^2 + \frac{R^2}{\cos^2 \Phi} d\Phi^2$$

left principal stretches

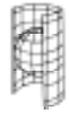
$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \frac{1}{\cos \Phi} \\ \Lambda_2 &= \frac{1}{\cos \Phi} \end{aligned}$$

left eigenvectors

$$U_1 = \frac{1}{R \cos \Phi} \mathbf{G}_1 \quad U_2 = \frac{1}{R} \mathbf{G}_2$$

maximum angular deformation

$$\Omega = 0$$



CONFORMAL CYLINDRICAL PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF THE
STANDARD PARALLEL

inverse equations

$$\Lambda = \frac{x}{R} + \Lambda_0$$

$$\sin \Phi = \tanh \frac{y}{R}$$

right Jacobi matrix

$$\mathbf{J}_r = \begin{pmatrix} \Lambda_x & \Lambda_y \\ \Phi_x & \Phi_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R \cosh \frac{y}{R}} \end{pmatrix}$$

right Cauchy-Green deformation tensor

$$[C_{kl}] = \frac{1}{\cosh^2 \frac{y}{R}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

right distance function

$$dS^2 = \frac{1}{\cosh^2 \frac{y}{R}} (dx^2 + dy^2)$$

right principal stretches

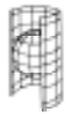
$$\lambda_1 = \frac{1}{\cosh \frac{y}{R}}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{\cosh \frac{y}{R}}$$

right eigenvectors

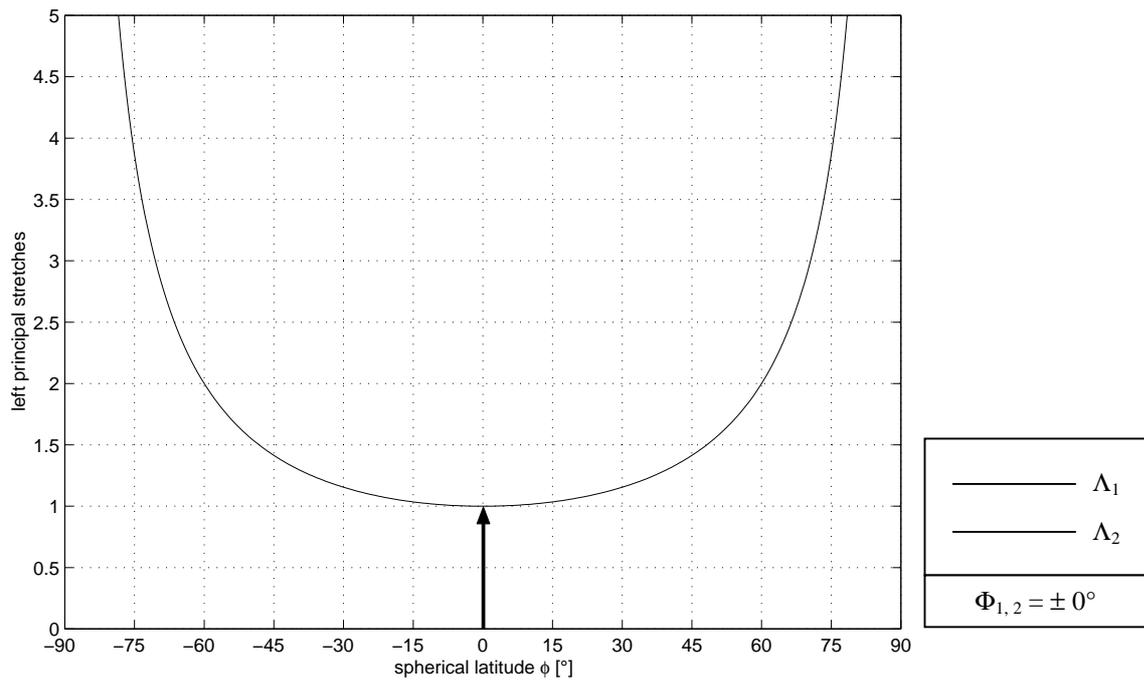
$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{g}_1$$

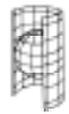
$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{g}_2$$



CONFORMAL CYLINDRICAL PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF THE
STANDARD PARALLEL

left principal stretches as function of the spherical latitude Φ





CONFORMAL CYLINDRICAL PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF THE
STANDARD PARALLEL

minimum cartesian coordinate y_{\min}

$$y_{\min} = y\left(\Phi = -\frac{\pi}{2}\right) = -\infty$$

maximum cartesian coordinate y_{\max}

$$y_{\max} = y\left(\Phi = \frac{\pi}{2}\right) = \infty$$

angle of intersection of coordinate lines, left versus right

$$A = 90^\circ \quad \alpha = 90^\circ$$

left angular shear

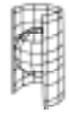
$$\delta = 0^\circ$$



3-3. FLÄCHENTREUE ZYLINDERABBILDUNGEN DER KUGEL

FLÄCHENTREUE ZYLINDERABBILDUNG, ÄQUIDISTANT UND KONFORM AUF DEN BEIDEN STANDARDPARALLELKREISEN Φ_1 UND Φ_2	
Andere Bezeichnung	→ LAMBERT-BEHRMANN Abbildung (Cylindrical equal area projection with two standard parallels)
Eigenschaften	Die Meridiane und die Breitenkreise werden als Geraden dargestellt die orthogonal zueinander sind. Die Abstände der Meridiane sind gleich, die der Breitenkreise nehmen zu den Polen hin ab. Polwärts hat dies für die Verzerrungsellipsen eine Stauchung in Nord-Süd Richtung und eine extreme Streckung in Ost-West Richtung zur Folge. Die Verzerrungsellipsen werden zum Äquator hin in Nord-Süd Richtung gestreckt und in Ost-West Richtung gestaucht. Auf diese Weise wird die Eigenschaft der Flächentreue gewahrt. Die beiden Standardparallelen werden äquidistant abgebildet. Für $\Phi_{1,2} = \pm 30^\circ$ ergibt sich die BEHRMANN Abbildung und für $\Phi_{1,2} = \pm 45^\circ$ ergibt sich GALL'S ORTHOGRAPHISCHE bzw. die PETERS Abbildung . Die TRYSTAN EDWARDS Abbildung erhält man für $\Phi_{1,2} = \pm 37^\circ 24'$. Die BALTHASART Abbildung wird mit $\Phi_{1,2} = \pm 50^\circ$ definiert.
Einsatzgebiete	Diese Abbildung dient überwiegend der Darstellung statistischen Datenmaterials, bei dem es ankommt die Werte pro Flächeneinheit wiederzugeben. Damit sich ein richtiger Eindruck der Dichteverteilung der Daten ergibt, muss die zugrundeliegende Abbildung flächentreu sein.
Ursprung	Diese Abbildung wurde 1848 erstmalig vorgestellt. Die Abbildung nach Gall wird auf 1855 datiert, und die nach Behrmann auf 1910.

FLÄCHENTREUE ZYLINDERABBILDUNG, ÄQUIDISTANT UND KONFORM AUF DEM STANDARDPARALLELKREIS	
<i>Die Abbildungsgleichungen gehen aus denen der obigen Abbildung hervor, indem man $\Phi_{1,2} = 0^\circ$ wählt. Anstelle des Schnitzzylinders ergibt sich als Spezialfall ein Berührzylinder am Äquator</i>	
Andere Bezeichnung	→ FLÄCHENTREUE LAMBERT Abbildung für den Zylinder (Cylindrical equal area projection) (Isocylindrical projection)
Eigenschaften	Die Meridiane stellen sich wie oben beschrieben dar. Um die Eigenschaft der Flächentreue zu bewahren, werden bei dieser Abbildung die Meridian nur 0.32 mal so lang wie der Äquator abgebildet. Die Abstände der Breitenkreise werden vom Äquator zu den Polen hin kleiner. Für die Verzerrungsellipsen hat das die bereits angeführte Streckung in Ost-West Richtung und eine Stauchung in Nord-Süd Richtung zu den Polen hin zur Folge. Die Pole selbst werden als Streifen wiedergegeben. Der Äquator wird äquidistant abgebildet und es liegen dort keine Verzerrungen vor. Es herrscht Symmetrie zum Äquator und jedem beliebigen Meridian.
Einsatzgebiete	Diese Abbildung wird für die flächentreue Darstellung äquatorialer Gebiete und der oben angesprochenen Präsentation statistischer Daten verwendet.
Ursprung	Diese Abbildung wurde erstmals 1772 von Johann Heinrich Lambert (1728-1777) vorgestellt.



EQUAL-AREA CYLINDRICAL PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF
TWO STANDARD PARALLELS Φ_1, Φ_2

LAMBERT-BEHRMANN PROJECTION

direct equations, cartesian coordinates

$$\begin{aligned} x &= R \cos \Phi_1 (\Lambda - \Lambda_0) \\ y &= \frac{R}{\cos \Phi_1} \sin \Phi \end{aligned}$$

left Jacobi matrix

$$\mathbf{J}_l = \begin{pmatrix} x_\Lambda & x_\Phi \\ y_\Lambda & y_\Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos \Phi_1 & 0 \\ 0 & \frac{R}{\cos \Phi_1} \cos \Phi \end{pmatrix}$$

left Cauchy-Green deformation tensor

$$[c_{KL}] = \begin{pmatrix} R^2 \cos^2 \Phi_1 & 0 \\ 0 & \frac{R^2}{\cos^2 \Phi_1} \cos^2 \Phi \end{pmatrix}$$

left distance function

$$ds^2 = R^2 \cos^2 \Phi_1 d\Lambda^2 + \frac{R^2}{\cos^2 \Phi_1} \cos^2 \Phi d\Phi^2$$

left principal stretches

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \frac{\cos \Phi_1}{\cos \Phi} \\ \Lambda_2 &= \frac{\cos \Phi}{\cos \Phi_1} \end{aligned}$$

left eigenvectors

$$\mathbf{U}_1 = \frac{1}{R \cos \Phi} \mathbf{G}_1 \qquad \mathbf{U}_2 = \frac{1}{R} \mathbf{G}_2$$

maximum angular deformation

$$\Omega = 2 \arcsin \left| \frac{\cos^2 \Phi_1 - \cos^2 \Phi}{\cos^2 \Phi_1 + \cos^2 \Phi} \right|$$



EQUAL-AREA CYLINDRICAL PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF
TWO STANDARD PARALLELS Φ_1, Φ_2

inverse equations

$$\Lambda = \frac{x}{R \cos \Phi_1} + \Lambda_0$$

$$\Phi = \arcsin \frac{\cos \Phi_1 y}{R}$$

right Jacobi matrix

$$J_r = \begin{pmatrix} \Lambda_x & \Lambda_y \\ \Phi_x & \Phi_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R \cos \Phi_1} & 0 \\ 0 & \frac{\cos \Phi_1}{\sqrt{R^2 - \cos^2 \Phi_1 y^2}} \end{pmatrix}$$

right Cauchy-Green deformation tensor

$$[C_{kl}] = \begin{pmatrix} \frac{R^2 - \cos^2 \Phi_1 y^2}{R^2 \cos^2 \Phi_1} & 0 \\ 0 & \frac{R^2 \cos^2 \Phi_1}{R^2 - \cos^2 \Phi_1 y^2} \end{pmatrix}$$

right distance function

$$dS^2 = \frac{R^2 - \cos^2 \Phi_1 y^2}{R^2 \cos^2 \Phi_1} dx^2 + \frac{R^2 \cos^2 \Phi_1}{R^2 - \cos^2 \Phi_1 y^2} dy^2$$

right principal stretches

$$\lambda_1 = \frac{1}{R \cos \Phi_1} \sqrt{R^2 - \cos^2 \Phi_1 y^2}$$

$$\lambda_2 = \frac{R \cos \Phi_1}{\sqrt{R^2 - \cos^2 \Phi_1 y^2}}$$

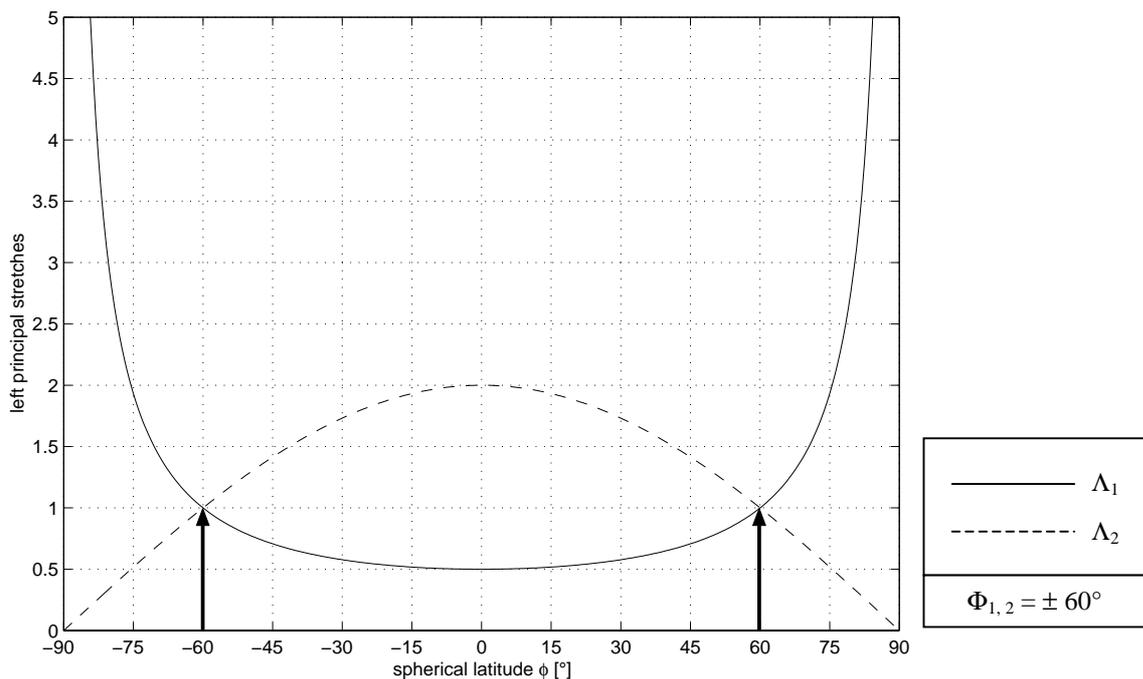
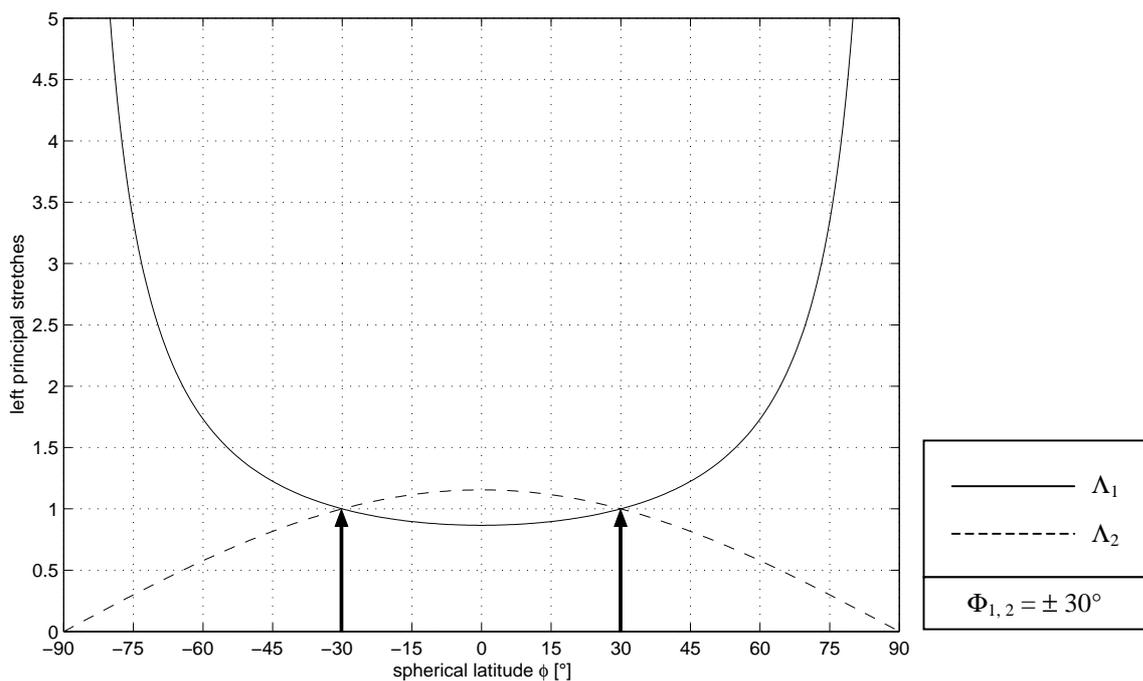
right eigenvectors

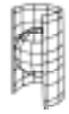
$$u_1 = g_1 \qquad u_2 = g_2$$



EQUAL-AREA CYLINDRICAL PROJECTION
 EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF
 TWO STANDARD PARALLELS Φ_1, Φ_2

left principal stretches as function of the spherical latitude Φ





EQUAL-AREA CYLINDRICAL PROJECTION
 EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF
 TWO STANDARD PARALLELS Φ_1, Φ_2

minimum cartesian coordinate y_{\min}

$$y_{\min} = y\left(\Phi = -\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{R}{\cos \Phi_1}$$

maximum cartesian coordinate y_{\max}

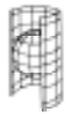
$$y_{\max} = y\left(\Phi = \frac{\pi}{2}\right) = \frac{R}{\cos \Phi_1}$$

angle of intersection of coordinate lines, left versus right

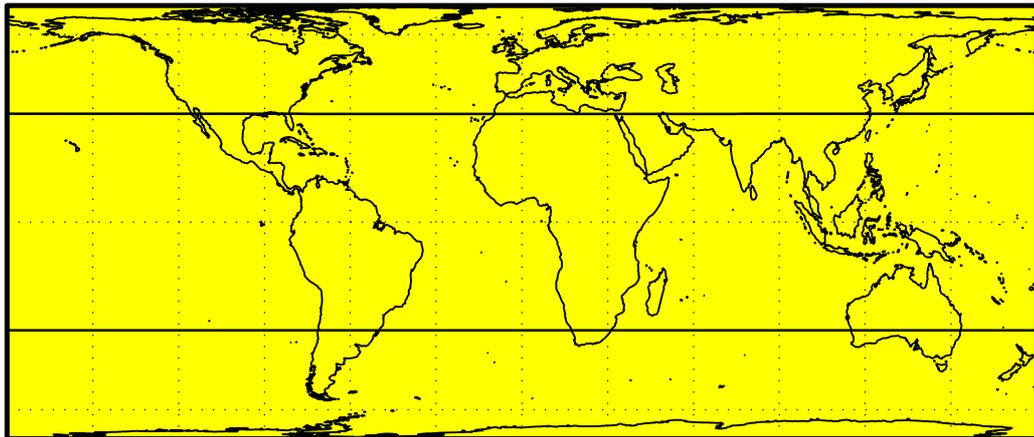
$$A = 90^\circ \quad \alpha = 90^\circ$$

left angular shear

$$\delta = 0^\circ$$

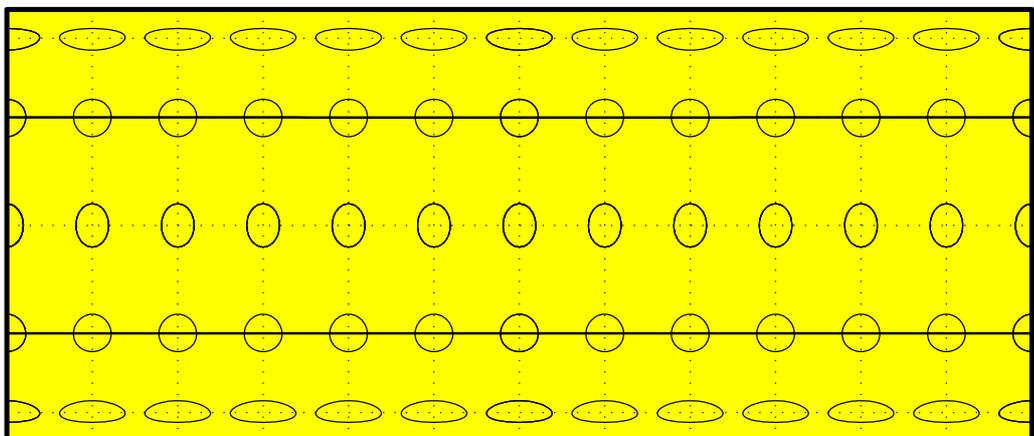


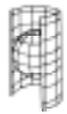
EQUAL-AREA CYLINDRICAL PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF
TWO STANDARD PARALLELS Φ_1, Φ_2



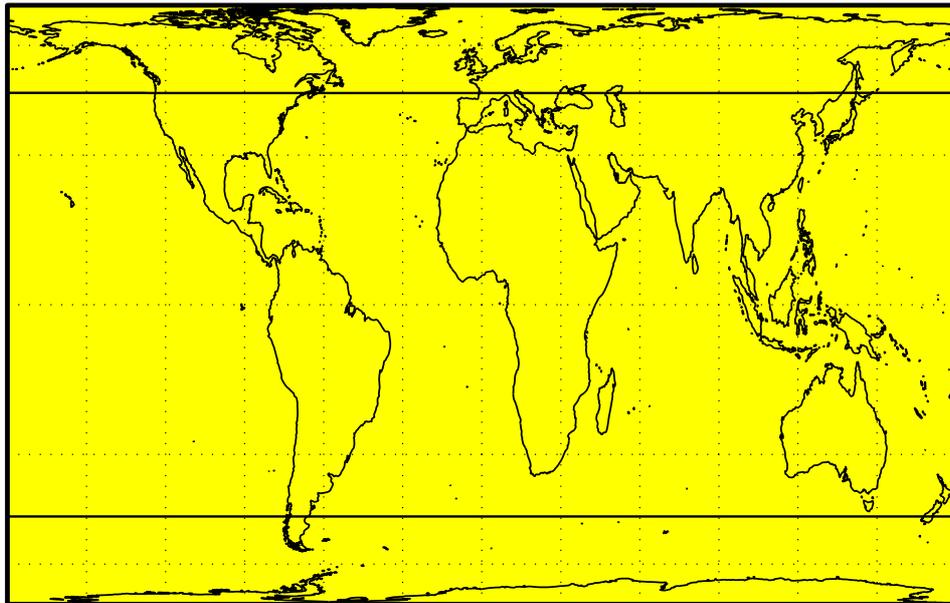
Behrmann projection: world map and left Tissot indicatrices

(30° - graticule, standard parallels $\Phi_{1,2} = \pm 30^\circ$)



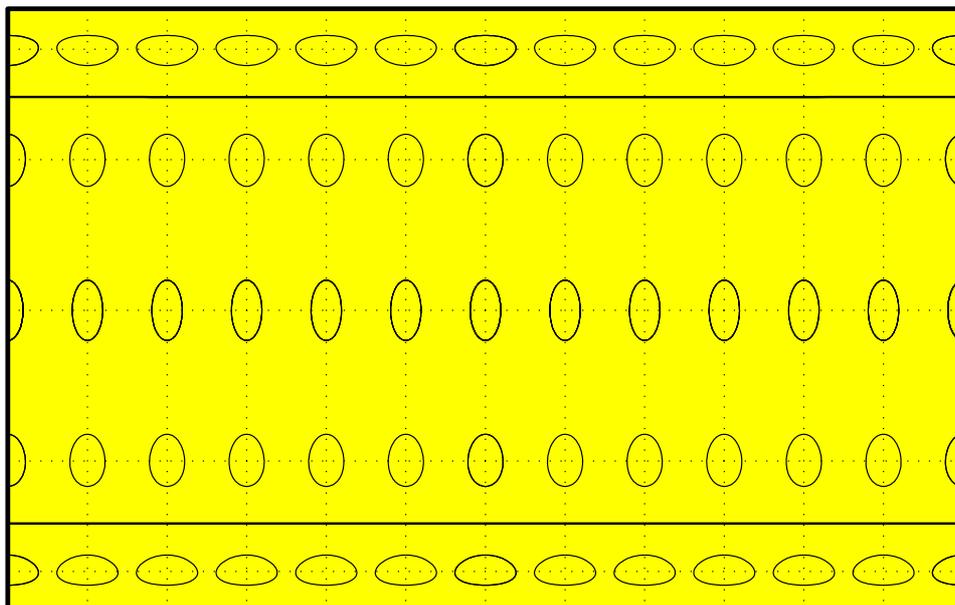


EQUAL-AREA CYLINDRICAL PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF
TWO STANDARD PARALLELS Φ_1, Φ_2



Gall's Orthographic projection: world map and left Tissot indicatrices

(30° - graticule, standard parallels $\Phi_{1,2} = \pm 45^\circ$)





**EQUAL-AREA CYLINDRICAL PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF THE
STANDARD PARALLEL**

LAMBERT PROJECTION

direct equations, cartesian coordinates

$$\begin{aligned} x &= R(\Lambda - \Lambda_0) \\ y &= R \sin \Phi \end{aligned}$$

left Jacobi matrix

$$\mathbf{J}_l = \begin{pmatrix} x_\Lambda & x_\Phi \\ y_\Lambda & y_\Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \cos \Phi \end{pmatrix}$$

left Cauchy-Green deformation tensor

$$[c_{KL}] = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \cos^2 \Phi \end{pmatrix}$$

left distance function

$$ds^2 = R^2 d\Lambda^2 + R^2 \cos^2 \Phi d\Phi^2$$

left principal stretches

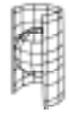
$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \frac{1}{\cos \Phi} \\ \Lambda_2 &= \cos \Phi \end{aligned}$$

left eigenvectors

$$\mathbf{U}_1 = \frac{1}{R \cos \Phi} \mathbf{G}_1 \quad \mathbf{U}_2 = \frac{1}{R} \mathbf{G}_2$$

maximum angular deformation

$$\Omega = 2 \arcsin \left| \frac{\sin^2 \Phi}{1 + \cos^2 \Phi} \right|$$



EQUAL-AREA CYLINDRICAL PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF THE
STANDARD PARALLEL

inverse equations

$$\Lambda = \frac{x}{R} + \Lambda_0$$

$$\Phi = \arcsin \frac{y}{R}$$

right Jacobi matrix

$$\mathbf{J}_r = \begin{pmatrix} \Lambda_x & \Lambda_y \\ \Phi_x & \Phi_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{R^2 - y^2}} \end{pmatrix}$$

right Cauchy-Green deformation tensor

$$[C_{kl}] = \begin{pmatrix} \frac{R^2 - y^2}{R^2} & 0 \\ 0 & \frac{R^2}{R^2 - y^2} \end{pmatrix}$$

right distance function

$$dS^2 = \frac{R^2 - y^2}{R^2} dx^2 + \frac{R^2}{R^2 - y^2} dy^2$$

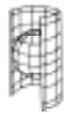
right principal stretches

$$\lambda_1 = \frac{1}{R} \sqrt{R^2 - y^2}$$

$$\lambda_2 = \frac{R}{\sqrt{R^2 - y^2}}$$

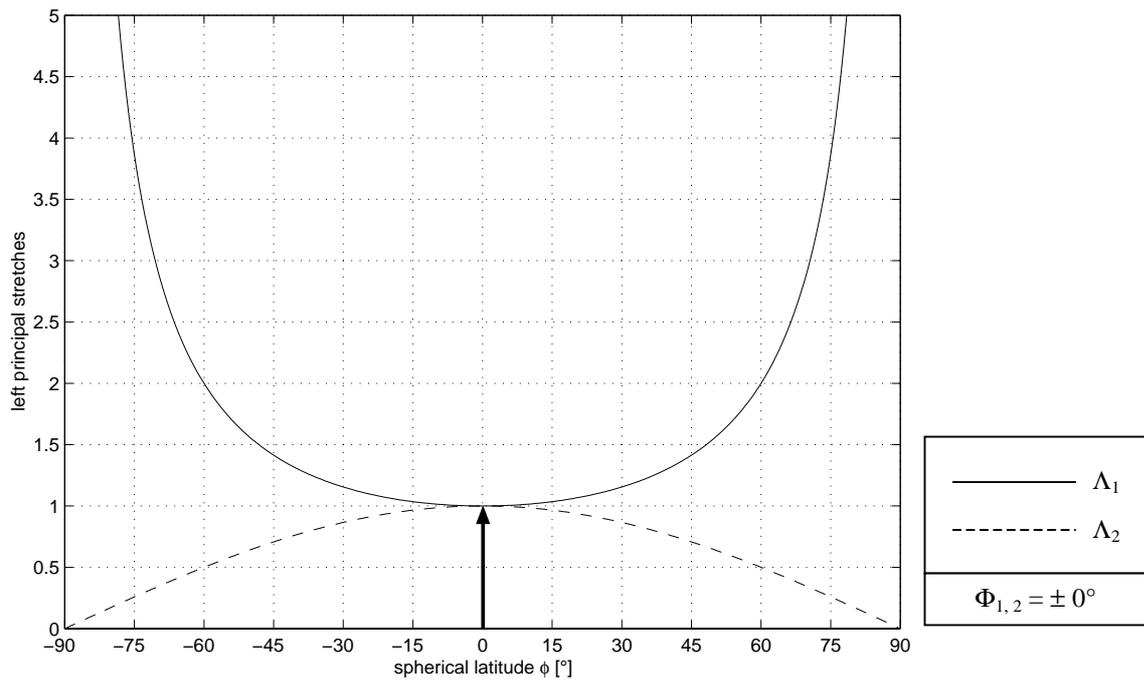
right eigenvectors

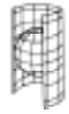
$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{g}_1 \qquad \mathbf{u}_2 = \mathbf{g}_2$$



EQUAL-AREA CYLINDRICAL PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF THE
STANDARD PARALLEL

left principal stretches as function of the spherical latitude Φ





EQUAL-AREA CYLINDRICAL PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF THE
STANDARD PARALLEL

minimum cartesian coordinate y_{\min}

$$y_{\min} = y\left(\Phi = -\frac{\pi}{2}\right) = -R$$

maximum cartesian coordinate y_{\max}

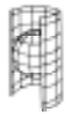
$$y_{\max} = y\left(\Phi = \frac{\pi}{2}\right) = R$$

angle of intersection of coordinate lines, left versus right

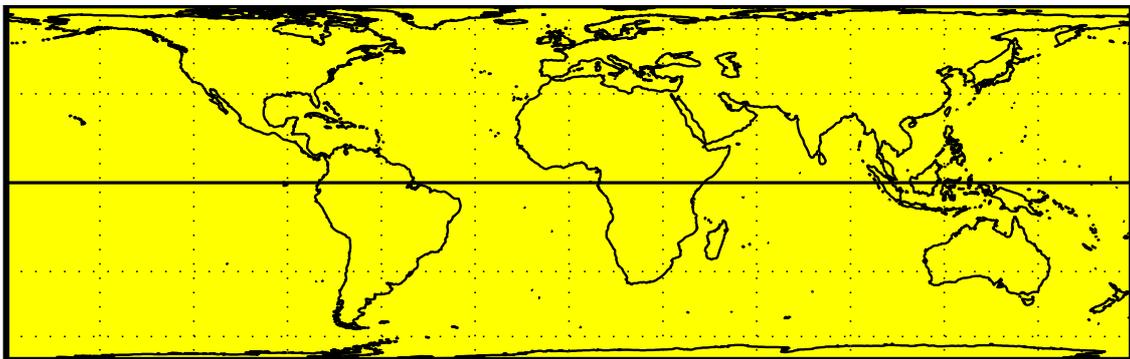
$$A = 90^\circ \quad \alpha = 90^\circ$$

left angular shear

$$\delta = 0^\circ$$

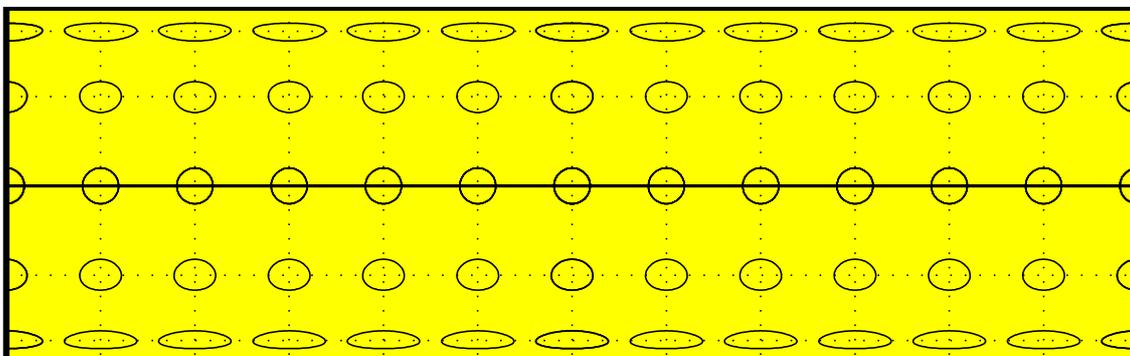


EQUAL-AREA CYLINDRICAL PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF THE
STANDARD PARALLEL



Lambert projection: world map and left Tissot indicatrices

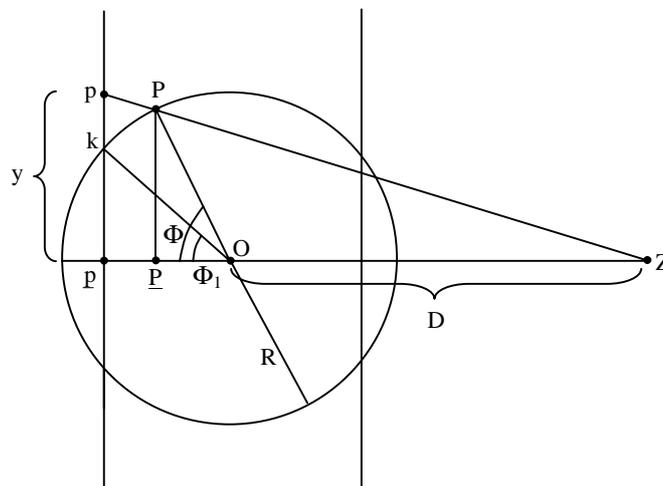
(30° - graticule, standard parallel $\Phi_{1,2} = 0^\circ$)





3-4. PERSPEKTIVISCHE ZYLINDERABBILDUNGEN DER KUGEL

In diesem Abschnitt 3-4. werden perspektivische Abbildungen behandelt, die im eigentlichen Sinne Projektionen sind, und somit eine geometrische Interpretation zulassen. Es sollen deshalb die allgemeinen Abbildungsgleichungen für die perspektivischen Zylinderprojektionen aus einfachen geometrischen Überlegungen abgeleitet werden, um den Begriff Projektion zu verdeutlichen. Im Falle eines Schnitzzylinders ergibt sich in etwa folgende Seitenansicht:



Bei dem mit Z bezeichneten Punkt handelt es sich um das Projektionszentrum. Dieses befindet sich im Abstand D vom Ursprung O. Ist $D = 0$ fallen das Projektionszentrum und der Ursprung zusammen. Dies ist der Spezialfall der Panoramaprojektion. Ist D gerade gleich dem Radius R der Kugel so ergibt sich der Spezialfall der Braunprojektion. In unserem hier betrachteten Fall liegt Z zusätzlich in der Äquatorebene; es wäre aber auch eine Lage von Z außerhalb der Äquatorebene denkbar. Dieser Aspekt soll hier aber nicht weiter verfolgt werden. P ist der Punkt, welcher von der Kugel aus auf den Zylinder abgebildet werden soll. Die Projektion von P auf den Zylinder ist p. \underline{P} und \underline{p} ergeben sich aus P bzw. p durch Orthogonalprojektion in die Äquatorebene. Φ_1 ist die Breite unter welcher der Zylinder die Kugel im Punkt k schneidet. Φ ist die Breite des abzubildenden Punktes P. Diese Herleitung ist [38] Seite 58 entnommen und kann dort ausführlicher nachvollzogen werden.

Nach dem 2. Strahlensatz gilt

$$\frac{\overline{pp}}{\overline{pO} + D} = \frac{\overline{PP}}{\overline{PO} + D}$$



Mit $y = \overline{p\underline{p}}$ folgt

$$y = \frac{\overline{PP}}{\overline{PO} + D} (\overline{pO} + D).$$

Durch Einsetzen folgender Beziehungen

$$\cos \Phi = \frac{\overline{PO}}{R} \quad \sin \Phi = \frac{\overline{PP}}{R} \quad \cos \Phi_1 = \frac{\overline{pO}}{R}$$

ergibt sich

$$y = \frac{\sin \Phi R}{\cos \Phi R + D} (\cos \Phi_1 R + D)$$

woraus sich die endgültige Form der Abbildungsgleichung

$$y = \frac{\sin \Phi}{\cos \Phi + \frac{D}{R}} \left(\cos \Phi_1 + \frac{D}{R} \right) R$$

bzw.

$$y = \left(\frac{D}{R} + \cos \Phi_1 \right) R \frac{\sin \Phi}{\left(\frac{D}{R} + \cos \Phi \right)}$$

ableiten lässt.

Dabei wird D/R als Projektionskonstante bezeichnet. Φ_1 gibt die nördliche bzw. südliche Breite an, unter welcher der Zylinder die Kugel schneidet. Für $\Phi_1 = 0^\circ$ ergibt sich ein Berührzylinder.

Die Bildkoordinate x ergibt sich aus der Forderung, dass sie nur von der Länge Λ abhängen soll.

$$x = \beta \Lambda$$

Der Faktor β entspricht in den meisten Fällen dem Erdradius R .



In diesem Abschnitt 3-4. werden im wesentlichen drei perspektivische Projektionen vorgestellt. Diese geben allerdings nicht den allgemeinsten denkbaren Fall wieder, sondern bilden bereits eine Auswahl hinsichtlich praktischer Anwendungen.

Die erste Projektion befasst sich mit dem Spezialfall der Projektion auf einen Schnitzzylinder von einem Projektionszentrum aus, das sich an der Erdoberfläche befindet. Für den Fall, dass das Projektionszentrum an der Erdoberfläche liegt, wird die Projektionskonstante 1. Aus diesem Grund werden die beiden Standardparallelkreise äquidistant, vor allem aber konform dargestellt. Die Betrachtung der allgemeinen perspektivischen Projektion mit 2 Standardparallelkreisen, wie sie ab Seite 73 folgt, geht aber von einer beliebigen Projektionskonstanten aus. $D/R = 0$ und $D/R = 1$ werden als Spezialfälle angeführt. Bei einer solchen allgemeinen Betrachtung werden die Standardparallelen immer noch äquidistant abgebildet. Ob aber auch Konformität vorliegt, muss von Fall zu Fall untersucht werden. Die zweite Projektion ist eine projektive Abbildung vom Kugelmittelpunkt auf einen Berührzylinder. Die letzte Projektion bildet von einem Perspektivzentrum an der Erdoberfläche auf einen am Äquator berührenden Zylinder ab.

Die hier vorgestellten Projektionen existieren nur für die Kugel als Urbildfläche. Für das Rotationsellipsoid als Urbildfläche wäre aber eine Herleitung der dafür notwendigen Abbildungsgleichungen aus geometrischen Überlegungen denkbar.

PERSPEKTIVISCHE ZYLINDERPROJEKTION, ÄQUIDISTANT UND KONFORM AUF DEN BEIDEN STANDARDPARALLELKREISEN Φ_1 UND Φ_2	
Andere Bezeichnung	→ GALL'S STEREOGRAPHISCHE Projektion (für $\Phi_{1,2} = \pm 45^\circ$) → BSAM Projektion (für $\Phi_{1,2} = \pm 30^\circ$) (,Bolshoi Sovietskii Atlas Mira', "Großer Sowjetischer Weltatlas") (Perspective cylindrical projection with two standard parallels)
Eigenschaften	Diese Abbildungen sind weder konform noch flächentreu, nur die Standardparallelen werden äquidistant und konform abgebildet. Die Projektionszentren dieser Abbildungen liegen an der Erdoberfläche. Meridiane und Breitenkreise werden geradlinig und rechtwinklig zueinander wiedergegeben. Der Abstand der Meridiane ist konstant, der der Breitenkreise nimmt zu den Polen hin zu und zum Äquator hin ab. Die Winkelverzerrungen nehmen zu beiden Seiten der Standardparallelen zu. Nahe diesen sind die Verzerrungen minimal. Flächen zwischen den Standardparallelkreisen werden zu klein, außerhalb diesen, zu groß wiedergegeben. Der Äquator wird zu kurz abgebildet, und da das Projektionszentrum an der Erdoberfläche liegt, werden die Pole als Streifen dargestellt. Für $\Phi_{1,2} = \pm 55^\circ$ ergibt sich die Projektion nach KAMENETSKY .
Einsatzgebiete	Die Gall Projektion wurde bei der Erstellung von Weltkarten für britische Atlanten verwendet. Die BSAM Projektion wurde für Karten des sowjetischen Weltatlas verwendet. Mit der Projektion von Kamenetsky wurde die russische Bevölkerungsdichte in einer Karte dargestellt.
Ursprung	Die Gall Projektion wurde 1855 von James Gall veröffentlicht. Der Große Sowjetische Weltatlas entstand 1937 und die Kamenetsky Projektion wurde 1927 verwendet.



PERSPEKTIVISCHE ZYLINDERPROJEKTION, ÄQUIDISTANT UND KONFORM AUF DEM STANDARDPARALLELKREIS	
<p><i>Diese Abbildung geht aus der obigen hervor, indem man die Projektionskonstante zu 0 wählt. Dadurch fällt das Projektionszentrum in den Erdmittelpunkt. Weiter wird $\Phi_{1,2} = 0^\circ$ gesetzt, wodurch sich anstelle eines Schnittzylinders ein Berührzylinder ergibt.</i></p>	
Andere Bezeichnung	<p>→ PANORAMAPROJEKTION → ZENTRAL PERSPEKTIVISCHE Zylinderprojektion (Central cylindrical projection)</p>
Eigenschaften	<p>Das Projektionszentrum dieser Abbildung liegt im Erdmittelpunkt. Aus diesem Grund können die Pole hier nicht abgebildet werden. Der Äquator wird äquidistant wiedergegeben und dort liegen auch keine Verzerrungen vor. Das oben beschriebene Anwachsen der Abstände der Breitenkreise zu den Polen hin geschieht bei dieser Abbildung sehr viel rascher. Auch im Vergleich zur Mercator Abbildung nehmen diese Abstände schneller zu. Im Gegensatz zu oben werden Flächen ausschließlich zu groß wiedergegeben. In polnahen Gebieten treten ganz beachtliche Winkel- und Flächenverzerrungen auf, was diese Projektion für ein praktische Anwendung nahezu unbrauchbar macht. Nur in äquatorialen Gebieten könnte man sich eine Verwendung dieser Abbildung denken. Diese Projektion ist zum Äquator und jedem beliebigen Meridian symmetrisch.</p>
Einsatzgebiete	<p>Gelegentlich werden die Verzerrungseigenschaften dieser Abbildung mit denen der Mercator oder den Miller Abbildungen verglichen.</p>
Ursprung	

PERSPEKTIVISCHE ZYLINDERPROJEKTION, ÄQUIDISTANT UND KONFORM AUF DEM STANDARDPARALLELKREIS	
<p><i>Diese Abbildung geht aus der obigen hervor, indem man die Projektionskonstante zu 1 wählt. Dadurch fällt das Projektionszentrum auf die Erdoberfläche. Weiter wird $\Phi_{1,2} = 0^\circ$ gesetzt, wodurch sich anstelle eines Schnittzylinders ein Berührzylinder ergibt.</i></p>	
Andere Bezeichnung	<p>→ Perspektivische Zylinderprojektion nach BRAUN (Perspektive cylindrical projection) → BRAUN'S STEREOGRAPHISCHE Projektion (Cylindrical stereographic projection)</p>
Eigenschaften	<p>Das Projektionszentrum dieser Abbildung liegt an der Erdoberfläche. Die Pole können folglich als Streifen wiedergegeben werden. Die Eigenschaften dieser Projektion sind im wesentlichen identisch mit denen der Panoramaprojektion. Allerdings geschieht das Anwachsen der Abstände der Parallelkreise nicht so rasch wie bei der Panoramaprojektion. Die Verzerrungen sind in polnahen Regionen ebenfalls nicht so drastisch wie bei der Panoramaprojektion.</p>
Einsatzgebiete	
Ursprung	<p>Der Ursprung dieser Projektion geht auf Braun um 1867 zurück.</p>



PERSPECTIVE CYLINDRICAL PROJECTION
EQUIDISTANT MAPPING OF
TWO STANDARD PARALLELS Φ_1, Φ_2

PERSPECTIVE CYLINDRICAL PROJECTION

direct equations, cartesian coordinates

$$\begin{aligned} x &= R \cos \Phi_1 (\Lambda - \Lambda_0) \\ y &= \left(\frac{D}{R} + \cos \Phi_1 \right) \cdot R \cdot \frac{\sin \Phi}{\left(\frac{D}{R} + \cos \Phi \right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= R \cos \Phi_1 (\Lambda - \Lambda_0) \\ y &= R \cos \Phi_1 \tan \Phi \quad D = 0 \end{aligned}$$

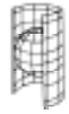
$$\begin{aligned} x &= R \cos \Phi_1 (\Lambda - \Lambda_0) \\ y &= R(1 + \cos \Phi_1) \tan \frac{\Phi}{2} \quad D = R \end{aligned}$$

left Jacobi matrix

$$\mathbf{J}_l = \begin{pmatrix} x_\Lambda & x_\Phi \\ y_\Lambda & y_\Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos \Phi_1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{D}{R} + \cos \Phi_1 \right) R \frac{\frac{D}{R} \cos \Phi + 1}{\left(\frac{D}{R} + \cos \Phi \right)^2} \end{pmatrix}$$

left Cauchy-Green deformation tensor

$$[c_{KL}] = \begin{pmatrix} R^2 \cos^2 \Phi_1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{D}{R} + \cos \Phi_1 \right)^2 R^2 \frac{\left(\frac{D}{R} \cos \Phi + 1 \right)^2}{\left(\frac{D}{R} + \cos \Phi \right)^4} \end{pmatrix}$$



PERSPECTIVE CYLINDRICAL PROJECTION
EQUIDISTANT MAPPING OF
TWO STANDARD PARALLELS Φ_1, Φ_2

left distance function

$$ds^2 = R^2 \cos^2 \Phi_1 d\Lambda^2 + \left(\frac{D}{R} + \cos \Phi_1 \right)^2 R^2 \frac{\left(\frac{D}{R} \cos \Phi + 1 \right)^2}{\left(\frac{D}{R} + \cos \Phi \right)^4} d\Phi^2$$

left principal stretches

$$\Lambda_1 = \frac{\cos \Phi_1}{\cos \Phi}$$

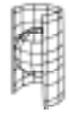
$$\Lambda_2 = \left(\frac{D}{R} + \cos \Phi_1 \right) \frac{\frac{D}{R} \cos \Phi + 1}{\left(\frac{D}{R} + \cos \Phi \right)^2}$$

left eigenvectors

$$U_1 = \frac{1}{R \cos \Phi} G_1 \qquad U_2 = \frac{1}{R} G_2$$

maximum angular deformation

$$\Omega = 2 \arcsin \left| \frac{\cos \Phi_1 \left(\frac{D}{R} + \cos \Phi \right)^2 - \left(\frac{D}{R} + \cos \Phi_1 \right) \left(\frac{D}{R} \cos \Phi + 1 \right) \cos \Phi}{\cos \Phi_1 \left(\frac{D}{R} + \cos \Phi \right)^2 + \left(\frac{D}{R} + \cos \Phi_1 \right) \left(\frac{D}{R} \cos \Phi + 1 \right) \cos \Phi} \right|$$



PERSPECTIVE CYLINDRICAL PROJECTION
EQUIDISTANT MAPPING OF
TWO STANDARD PARALLELS Φ_1, Φ_2

inverse equations

$$\Lambda = \frac{x}{R \cos \Phi_1} + \Lambda_0$$

$$\tan \Phi = \frac{D \left(R + \frac{R^2}{D} \cos \Phi_1 \right) + \sqrt{y^2 \left(1 - \frac{D^2}{R^2} \right) + (D + R \cos \Phi_1)^2}}{(D + R \cos \Phi_1)^2 - \left(\frac{D}{R} y \right)^2} \cdot y \quad (D \neq 0)$$

$$\Lambda = \frac{x}{R \cos \Phi_1} + \Lambda_0$$

$$\tan \Phi = \frac{y}{R \cos \Phi_1} \quad (D = 0)$$

$$\Lambda = \frac{x}{R \cos \Phi_1} + \Lambda_0$$

$$\tan \frac{\Phi}{2} = \frac{1}{(1 + \cos \Phi_1)} \frac{y}{R} \quad (D = R)$$

right Jacobi matrix

$$\mathbf{J}_r = \begin{pmatrix} \Lambda_x & \Lambda_y \\ \Phi_x & \Phi_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R \cos \Phi_1} & 0 \\ 0 & \frac{2(1 + \cos \Phi_1)R}{(1 + \cos \Phi_1)^2 R^2 + y^2} \end{pmatrix}$$

right Cauchy-Green deformation tensor

$$[C_{kl}] = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos^2 \Phi_1} \left(\frac{(1 + \cos \Phi_1)^2 R^2 - y^2}{(1 + \cos \Phi_1)^2 R^2 + y^2} \right)^2 & 0 \\ 0 & \left(\frac{2(1 + \cos \Phi_1)R}{(1 + \cos \Phi_1)^2 R^2 + y^2} \right)^2 \end{pmatrix}$$



PERSPECTIVE CYLINDRICAL PROJECTION
EQUIDISTANT MAPPING OF
TWO STANDARD PARALLELS Φ_1, Φ_2

right distance function

$$dS^2 = \frac{1}{\cos^2 \Phi_1} \left(\frac{(1 + \cos \Phi_1)^2 R^2 - y^2}{(1 + \cos \Phi_1)^2 R^2 + y^2} \right)^2 dx^2 + \left(\frac{2(1 + \cos \Phi_1)R^2}{(1 + \cos \Phi_1)^2 R^2 + y^2} \right)^2 dy^2$$

right principal stretches

$$\lambda_1 = \frac{1}{\cos \Phi_1} \frac{(1 + \cos \Phi_1)^2 R^2 - y^2}{(1 + \cos \Phi_1)^2 R^2 + y^2}$$

$$\lambda_2 = \frac{2(1 + \cos \Phi_1)R^2}{(1 + \cos \Phi_1)^2 R^2 + y^2}$$

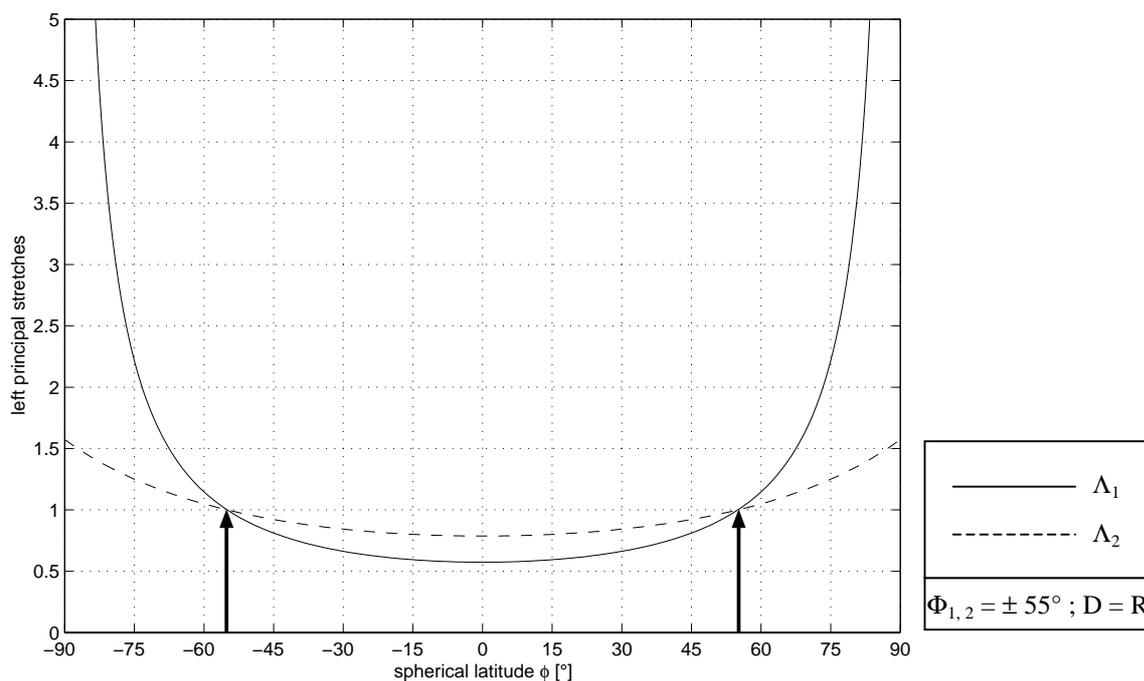
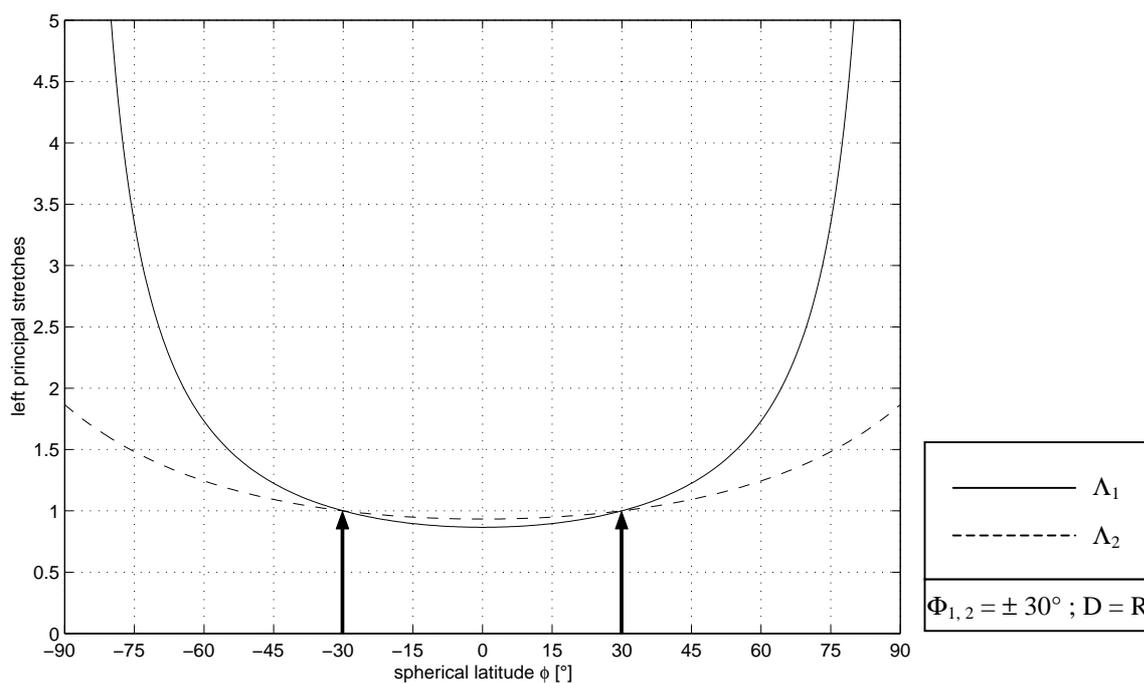
right eigenvectors

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{g}_1 \qquad \mathbf{u}_2 = \mathbf{g}_2$$



PERSPECTIVE CYLINDRICAL PROJECTION
EQUIDISTANT MAPPING OF
TWO STANDARD PARALLELS Φ_1, Φ_2

left principal stretches as function of the spherical latitude Φ





PERSPECTIVE CYLINDRICAL PROJECTION
EQUIDISTANT MAPPING OF
TWO STANDARD PARALLELS Φ_1, Φ_2

minimum cartesian coordinate y_{\min}

$$y_{\min} = y\left(\Phi = -\frac{\pi}{2}\right) = -R\left(1 + \frac{R}{D} \cos \Phi_1\right) \quad (D \neq 0)$$

$$y_{\min} = y\left(\Phi = -\frac{\pi}{2}\right) = -\infty \quad (D = 0)$$

$$y_{\min} = y\left(\Phi = -\frac{\pi}{2}\right) = -R(1 + \cos \Phi_1) \quad (D = R)$$

maximum cartesian coordinate y_{\max}

$$y_{\max} = y\left(\Phi = \frac{\pi}{2}\right) = R\left(1 + \frac{R}{D} \cos \Phi_1\right) \quad (D \neq 0)$$

$$y_{\max} = y\left(\Phi = \frac{\pi}{2}\right) = \infty \quad (D = 0)$$

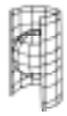
$$y_{\max} = y\left(\Phi = \frac{\pi}{2}\right) = R(1 + \cos \Phi_1) \quad (D = R)$$

angle of intersection of coordinate lines, left versus right

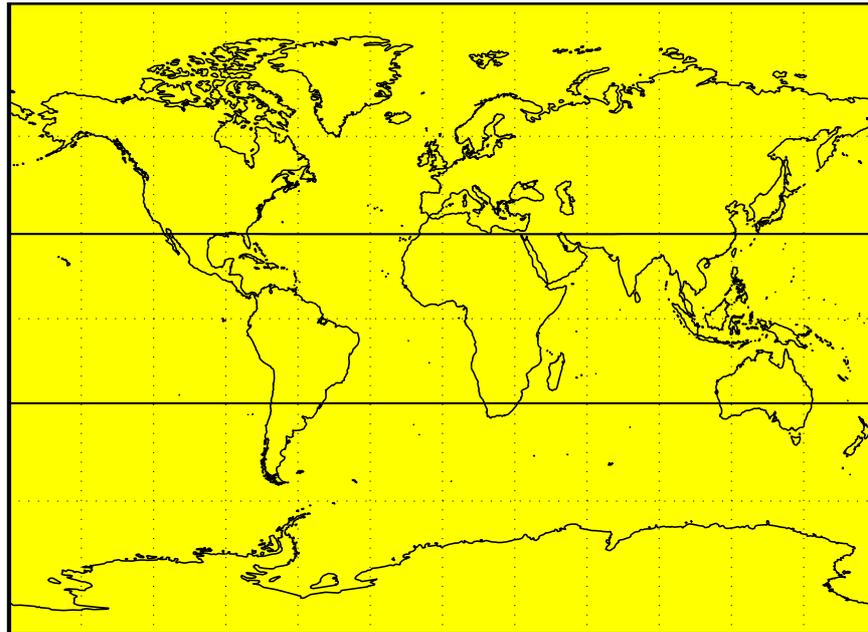
$$A = 90^\circ \quad \alpha = 90^\circ$$

left angular shear

$$\delta = 0^\circ$$

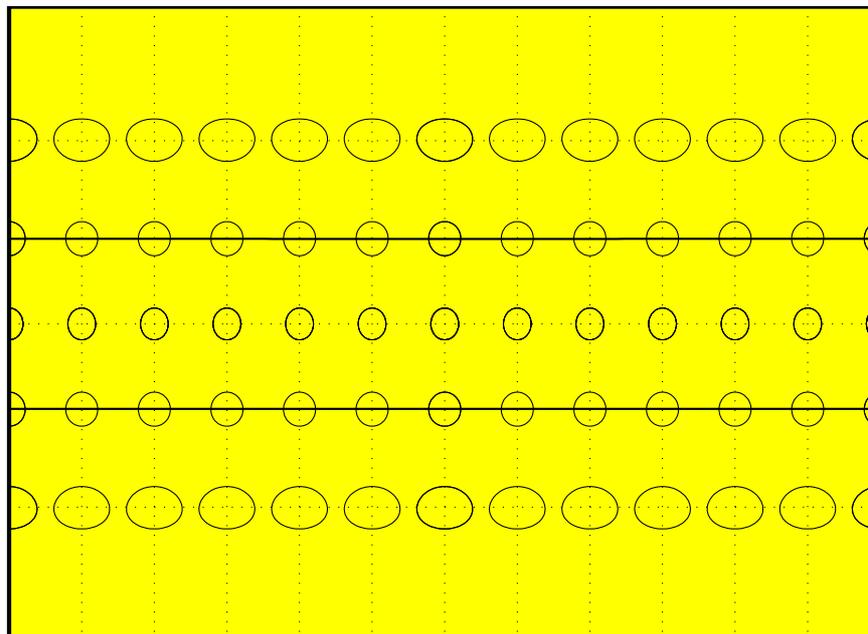


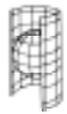
PERSPECTIVE CYLINDRICAL PROJECTION
EQUIDISTANT MAPPING OF
TWO STANDARD PARALLELS Φ_1, Φ_2



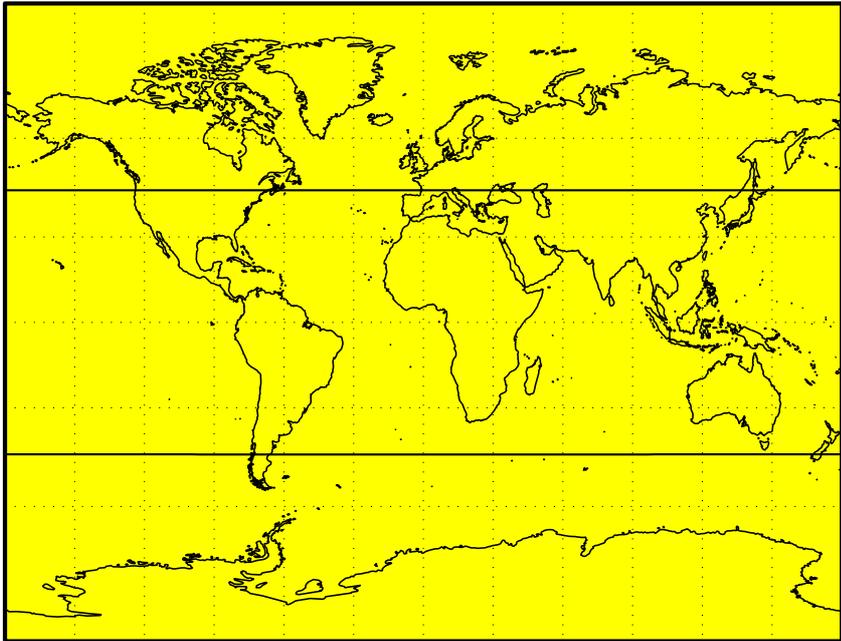
BSAM projection: world map and left Tissot indicatrices

(30° - graticule, standard parallels $\Phi_{1,2} = \pm 30^\circ$)



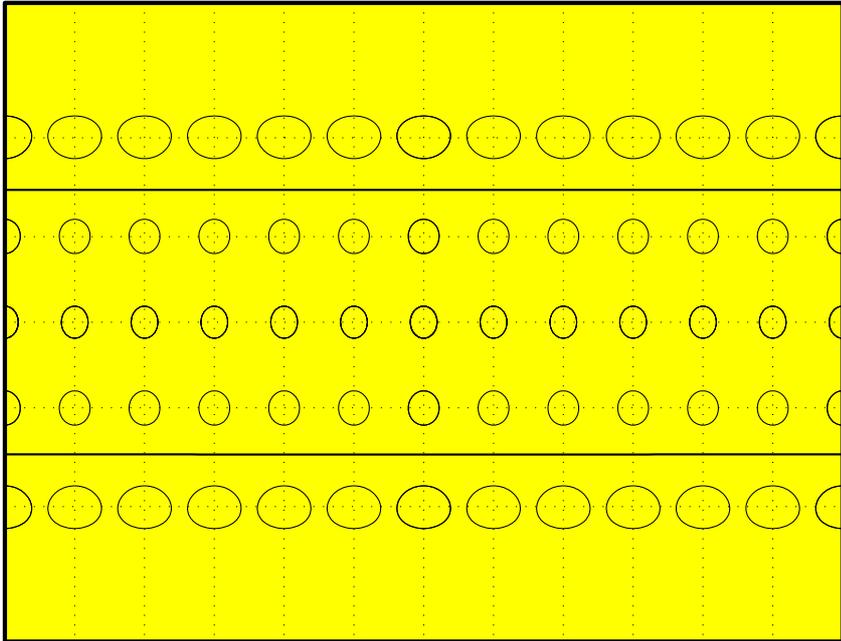


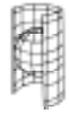
PERSPECTIVE CYLINDRICAL PROJECTION
EQUIDISTANT MAPPING OF
TWO STANDARD PARALLELS Φ_1, Φ_2



Gall's Stereographic projection: world map and left Tissot indicatrices

(30° - graticule, standard parallels $\Phi_{1,2} = \pm 45^\circ$)





PERSPECTIVE CYLINDRICAL PROJECTION EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF THE STANDARD PARALLEL

CENTRAL CYLINDRICAL OR PANORAMA PROJECTION

direct equations, cartesian coordinates

$$\begin{aligned} x &= R(\Lambda - \Lambda_0) \\ y &= R \tan \Phi \end{aligned}$$

left Jacobi matrix

$$\mathbf{J}_l = \begin{pmatrix} x_\Lambda & x_\Phi \\ y_\Lambda & y_\Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & \frac{R}{\cos^2 \Phi} \end{pmatrix}$$

left Cauchy-Green deformation tensor

$$[c_{KL}] = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & \frac{R^2}{\cos^4 \Phi} \end{pmatrix}$$

left distance function

$$ds^2 = R^2 d\Lambda^2 + \frac{R^2}{\cos^4 \Phi} d\Phi^2$$

left principal stretches

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \frac{1}{\cos \Phi} \\ \Lambda_2 &= \frac{1}{\cos^2 \Phi} \end{aligned}$$

left eigenvectors

$$\mathbf{U}_1 = \frac{1}{R \cos \Phi} \mathbf{G}_1 \quad \mathbf{U}_2 = \frac{1}{R} \mathbf{G}_2$$

maximum angular deformation

$$\Omega = 2 \arcsin \left| \frac{\cos \Phi - 1}{\cos \Phi + 1} \right| = 2 \arcsin \left| \tan^2 \frac{\Phi}{2} \right|$$



PERSPECTIVE CYLINDRICAL PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF THE
STANDARD PARALLEL

inverse equations

$$\Lambda = \frac{x}{R} + \Lambda_0$$

$$\Phi = \arctan \frac{y}{R}$$

right Jacobi matrix

$$\mathbf{J}_r = \begin{pmatrix} \Lambda_x & \Lambda_y \\ \Phi_x & \Phi_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R} & 0 \\ 0 & \frac{R}{R^2 + y^2} \end{pmatrix}$$

right Cauchy-Green deformation tensor

$$[\mathbf{C}_{kl}] = \begin{pmatrix} \frac{R^2}{R^2 + y^2} & 0 \\ 0 & \left(\frac{R^2}{R^2 + y^2} \right)^2 \end{pmatrix}$$

right distance function

$$dS^2 = \frac{R^2}{R^2 + y^2} dx^2 + \left(\frac{R^2}{R^2 + y^2} \right)^2 dy^2$$

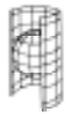
right principal stretches

$$\lambda_1 = \frac{R}{\sqrt{R^2 + y^2}}$$

$$\lambda_2 = \frac{R^2}{R^2 + y^2}$$

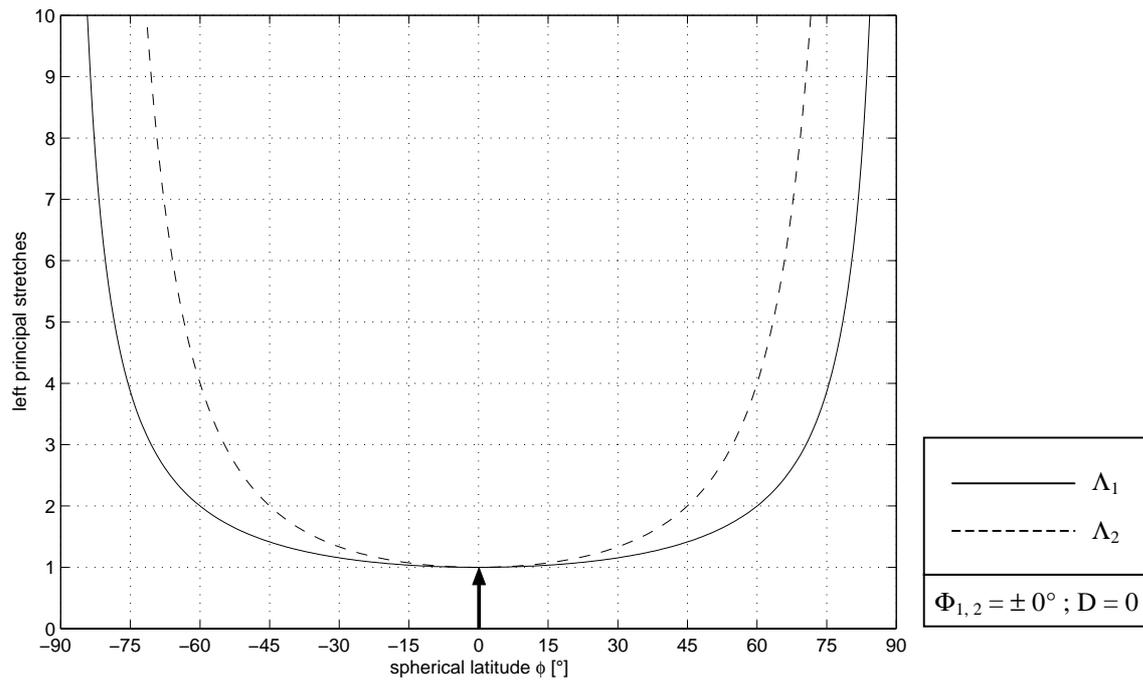
right eigenvectors

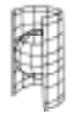
$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{g}_1 \qquad \mathbf{u}_2 = \mathbf{g}_2$$



PERSPECTIVE CYLINDRICAL PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF THE
STANDARD PARALLEL

left principal stretches as function of the spherical latitude Φ





PERSPECTIVE CYLINDRICAL PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF THE
STANDARD PARALLEL

minimum cartesian coordinate y_{\min}

$$y_{\min} = y\left(\Phi = -\frac{\pi}{2}\right) = -\infty$$

maximum cartesian coordinate y_{\max}

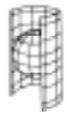
$$y_{\max} = y\left(\Phi = \frac{\pi}{2}\right) = \infty$$

angle of intersection of coordinate lines, left versus right

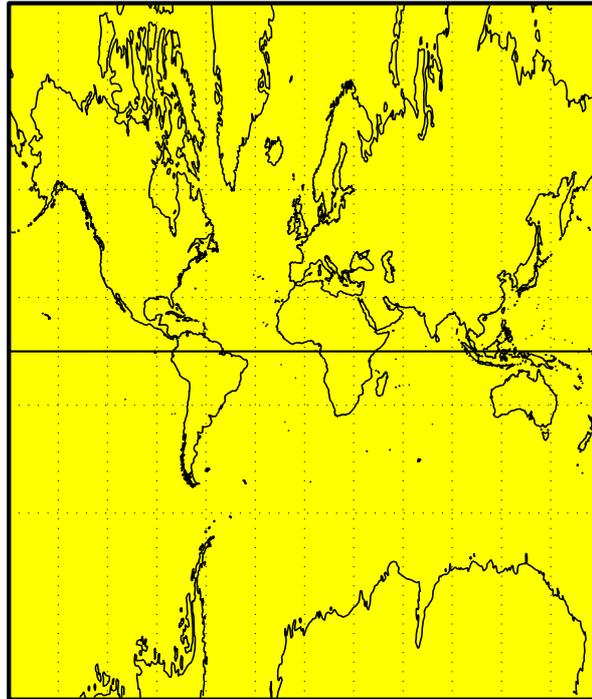
$$A = 90^\circ \quad \alpha = 90^\circ$$

left angular shear

$$\delta = 0^\circ$$

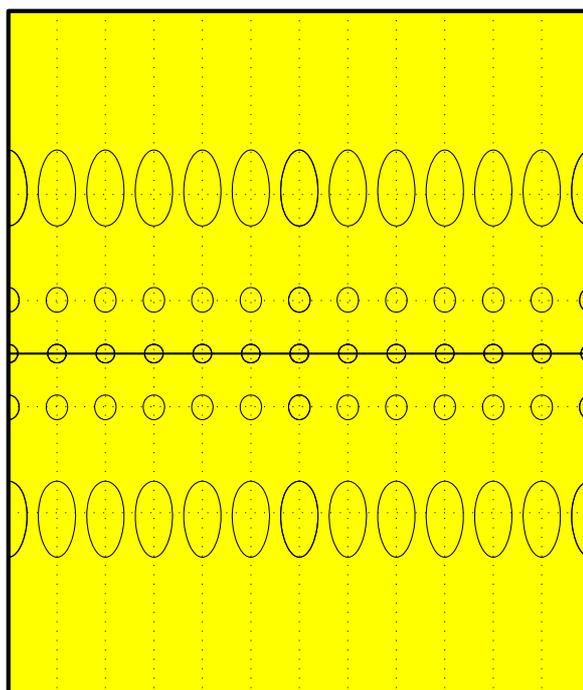


PERSPECTIVE CYLINDRICAL PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF THE
STANDARD PARALLEL



Central cylindrical projection: world map and left Tissot indicatrices

(30° - graticule, standard parallel $\Phi_{1,2} = 0^\circ$)





PERSPECTIVE CYLINDRICAL PROJECTION EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF THE STANDARD PARALLEL

BRAUN'S STEREOGRAPHIC PROJECTION

direct equations, cartesian coordinates

$$\begin{aligned} x &= R(\Lambda - \Lambda_0) \\ y &= 2R \tan \frac{\Phi}{2} \end{aligned}$$

left Jacobi matrix

$$\mathbf{J}_l = \begin{pmatrix} x_\Lambda & x_\Phi \\ y_\Lambda & y_\Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & \frac{R}{\cos^2 \frac{\Phi}{2}} \end{pmatrix}$$

left Cauchy-Green deformation tensor

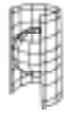
$$[c_{KL}] = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & \frac{R^2}{\cos^4 \frac{\Phi}{2}} \end{pmatrix}$$

left distance function

$$ds^2 = R^2 d\Lambda^2 + \frac{R^2}{\cos^4 \frac{\Phi}{2}} d\Phi^2$$

left principal stretches

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \frac{1}{\cos \Phi} \\ \Lambda_2 &= \frac{1}{\cos^2 \frac{\Phi}{2}} \end{aligned}$$



PERSPECTIVE CYLINDRICAL PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF THE
STANDARD PARALLEL

left eigenvectors

$$U_1 = \frac{1}{R \cos \Phi} G_1 \quad U_2 = \frac{1}{R} G_2$$

maximum angular deformation

$$\Omega = 2 \arcsin \left| \frac{\cos^2 \frac{\Phi}{2} - \cos \Phi}{\cos^2 \frac{\Phi}{2} + \cos \Phi} \right|$$



PERSPECTIVE CYLINDRICAL PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF THE
STANDARD PARALLEL

inverse equations

$$\Lambda = \frac{x}{R} + \Lambda_0$$

$$\Phi = 2 \arctan \frac{y}{2R}$$

right Jacobi matrix

$$\mathbf{J}_r = \begin{pmatrix} \Lambda_x & \Lambda_y \\ \Phi_x & \Phi_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R} & 0 \\ 0 & \frac{4R}{4R^2 + y^2} \end{pmatrix}$$

right Cauchy-Green deformation tensor

$$[C_{kl}] = \begin{pmatrix} \left(\frac{4R^2 - y^2}{4R^2 + y^2} \right)^2 & 0 \\ 0 & \left(\frac{4R^2}{4R^2 + y^2} \right)^2 \end{pmatrix}$$

right distance function

$$dS^2 = \left(\frac{4R^2 - y^2}{4R^2 + y^2} \right)^2 dx^2 + \left(\frac{4R^2}{4R^2 + y^2} \right)^2 dy^2$$

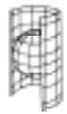
right principal stretches

$$\lambda_1 = \frac{4R^2 - y^2}{4R^2 + y^2}$$

$$\lambda_2 = \frac{4R^2}{4R^2 + y^2}$$

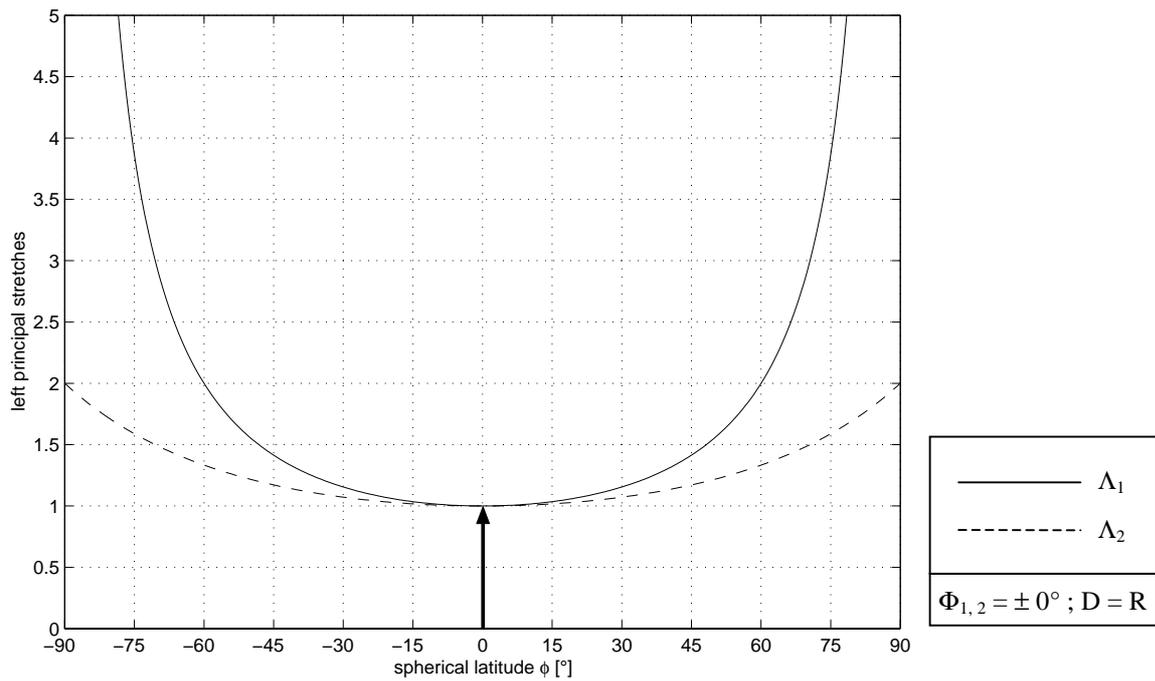
right eigenvectors

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{g}_1 \qquad \mathbf{u}_2 = \mathbf{g}_2$$



PERSPECTIVE CYLINDRICAL PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF THE
STANDARD PARALLEL

left principal stretches as function of the spherical latitude Φ





PERSPECTIVE CYLINDRICAL PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF THE
STANDARD PARALLEL

minimum cartesian coordinate y_{\min}

$$y_{\min} = y\left(\Phi = -\frac{\pi}{2}\right) = -2R$$

maximum cartesian coordinate y_{\max}

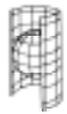
$$y_{\max} = y\left(\Phi = \frac{\pi}{2}\right) = 2R$$

angle of intersection of coordinate lines, left versus right

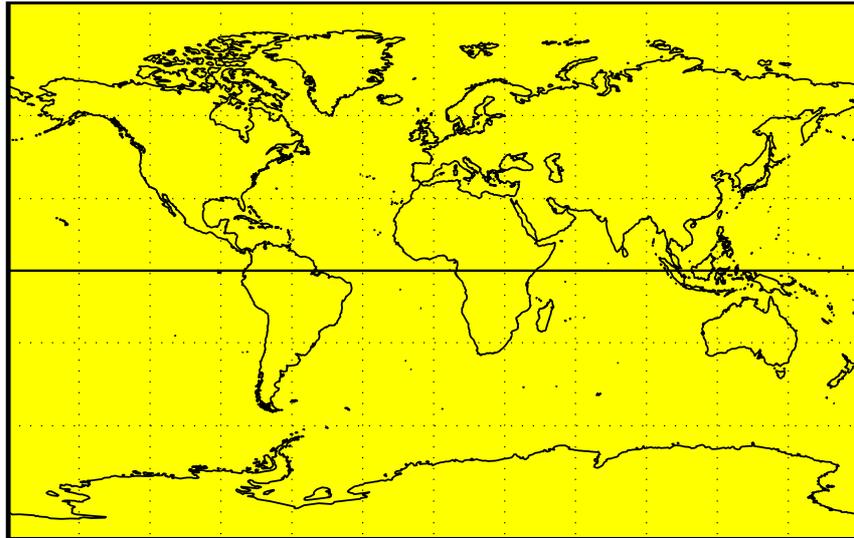
$$A = 90^\circ \quad \alpha = 90^\circ$$

left angular shear

$$\delta = 0^\circ$$

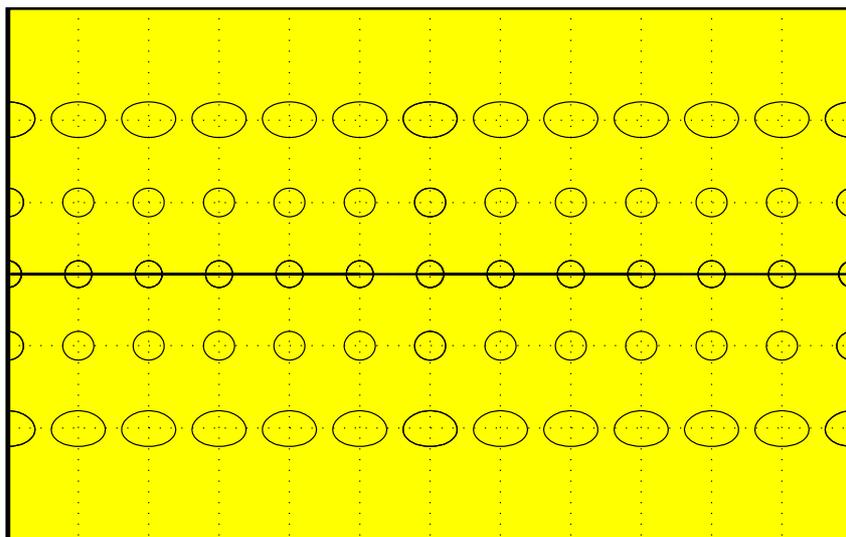


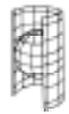
PERSPECTIVE CYLINDRICAL PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF THE
STANDARD PARALLEL



Braun's Stereographic projection: world map and left Tissot indicatrices

(30° - graticule, standard parallel $\Phi_{1,2} = 0^\circ$)





3-5. SPEZIELLE ZYLINDERABBILDUNGEN DER KUGEL

Im Zusammenhang mit diesem Abschnitt 3-5. wird auf den Abschnitt 3-2. 'Konforme Zylinderabbildungen der Kugel' verwiesen. Die in diesem Abschnitt beschriebenen Abbildungen sind im wesentlichen eine Verallgemeinerung der unter 3-2. dargestellten Mercator Abbildungen. Für die inverse Abbildung können hier leider nur die Abbildungsgleichungen und die Jakobi-Matrix angegeben werden.

SPEZIELLE ZYLINDERABBILDUNG, ÄQUIDISTANT UND KONFORM AUF DEM STANDARDPARALLELKREIS	
<i>Die Abbildungsgleichungen nach Miller sind denen der Mercator Abbildung sehr ähnlich. Im wesentlichen entstehen sie aus den Gleichungen für die Mercator Abbildung durch Einführen eines konstanten Faktors. Im Falle, dass der Faktor zu 1 gewählt wird, erhält man wieder die Gleichungen nach Mercator.</i>	
Andere Bezeichnung	→ MILLER I / MILLER II Abbildung (Miller's cylindrical projections)
Eigenschaften	Wie bereits in vorherigen Abschnitten gezeigt, treten bei konformen bzw. flächentreuen Abbildungen beträchtliche Verzerrungen zu den Polgebieten hin auf. So stellt die Mercator Abbildung Flächen in polaren Regionen viel zu groß dar und die flächentreue Abbildung nach Lambert weist extreme maßstäbliche Verzerrungen auf. Die Miller Abbildung ist als ein Kompromiss zwischen diesen beiden unterschiedlichen Verzerrungserscheinungen zu sehen. Sie reduziert für steigende Werte der Konstanten C die Flächenverzerrung auf Kosten der Winkeltreue. Man erhält die Miller I Abbildung für $C = 1.25$ und die Miller II Abbildung für $C = 1.50$. Bei beiden Abbildungen wird der Äquator äquidistant wiedergegeben. Zusätzlich gilt Konformität am Äquator. Die Miller I Abbildung lässt sich aufgrund ihrer ähnlichen Eigenschaften mit der Mercator Abbildung vergleichen, die Miller II mit der Stereographischen Projektion nach Gall.
Einsatzgebiete	Die Miller I Abbildung wird häufig in amerikanischen Atlanten verwendet. Miller II hat nie den Bekanntheitsgrad der ersten Abbildung erreicht. Beide Abbildungen werden gelegentlich eingesetzt, um vektorielle Darstellungen von Ozeanströmungen oder Windrichtungen zu geben.
Ursprung	Der Ursprung dieser Abbildungen geht auf Miller um 1942 zurück.



SPECIAL CYLINDRICAL PROJECTION EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF THE STANDARD PARALLEL

MILLER'S CYLINDRICAL PROJECTION

direct equations, cartesian coordinates

$$\begin{aligned} x &= R(\Lambda - \Lambda_0) \\ y &= CR \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Phi}{2C}\right)\right) \end{aligned}$$

left Jacobi matrix

$$\mathbf{J}_l = \begin{pmatrix} x_\Lambda & x_\Phi \\ y_\Lambda & y_\Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & \frac{R}{\cos \frac{\Phi}{C}} \end{pmatrix}$$

left Cauchy-Green deformation tensor

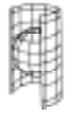
$$[c_{KL}] = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & \frac{R^2}{\cos^2 \frac{\Phi}{C}} \end{pmatrix}$$

left distance function

$$ds^2 = R^2 d\Lambda^2 + \frac{R^2}{\cos^2 \frac{\Phi}{C}} d\Phi^2$$

left principal stretches

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \frac{1}{\cos \Phi} \\ \Lambda_2 &= \frac{1}{\cos \frac{\Phi}{C}} \end{aligned}$$



SPECIAL CYLINDRICAL PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF THE
STANDARD PARALLEL

left eigenvectors

$$U_1 = \frac{1}{R \cos \Phi} G_1 \quad U_2 = \frac{1}{R} G_2$$

maximum angular deformation

$$\Omega = 2 \arcsin \left| \frac{\cos \frac{\Phi}{C} - \cos \Phi}{\cos \frac{\Phi}{C} + \cos \Phi} \right|$$

inverse equations

$$\Lambda = \frac{x}{R} + \Lambda_0$$

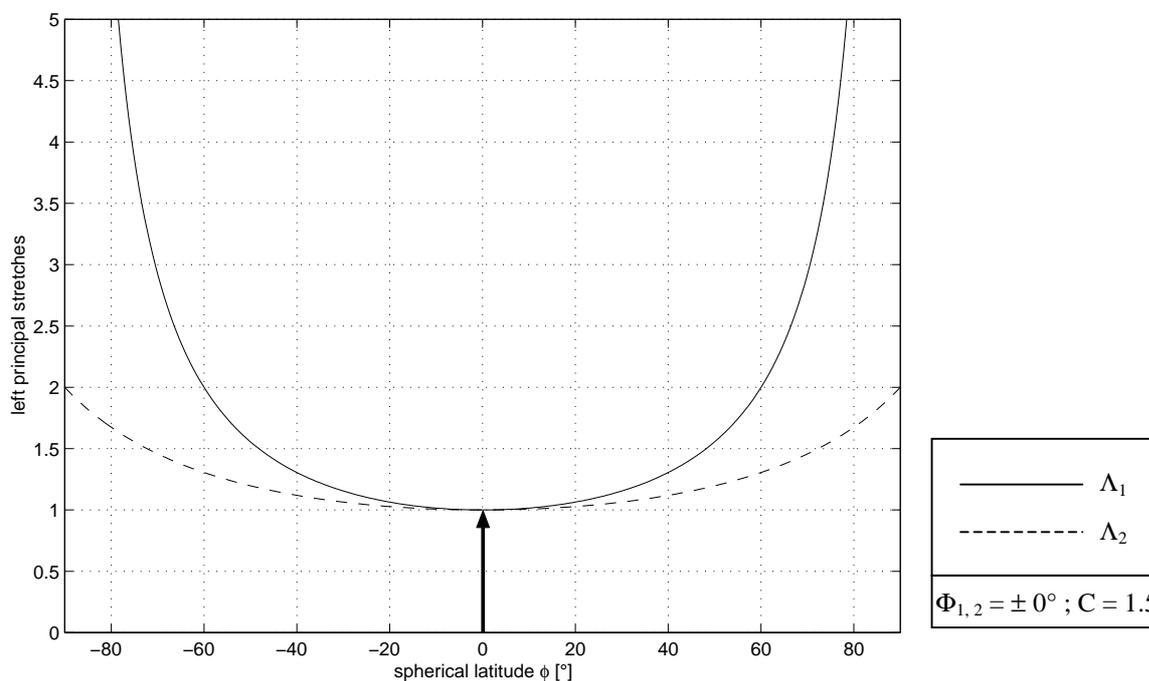
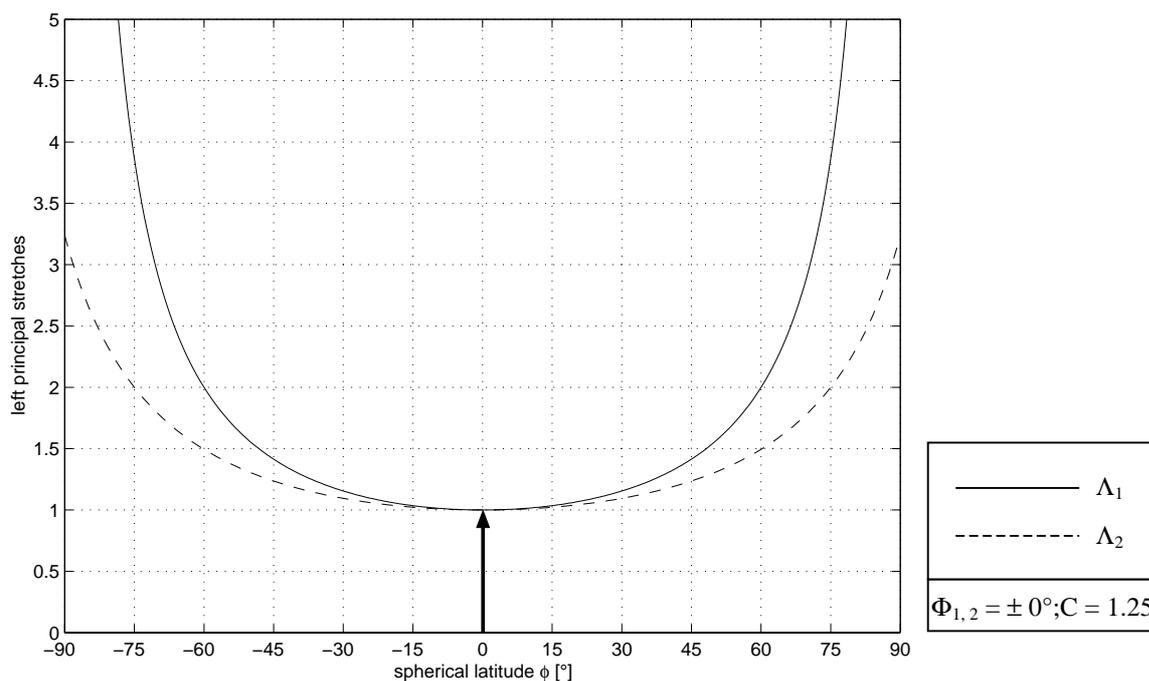
$$\sin \frac{\Phi}{C} = \tanh \frac{y}{CR}$$

right Jacobi matrix

$$J_r = \begin{pmatrix} \Lambda_x & \Lambda_y \\ \Phi_x & \Phi_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R} & 0 \\ 0 & \frac{1}{CR \cosh \frac{y}{CR}} \end{pmatrix}$$



SPECIAL CYLINDRICAL PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF THE
STANDARD PARALLEL





SPECIAL CYLINDRICAL PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF THE
STANDARD PARALLEL

minimum cartesian coordinate y_{\min}

$$y_{\min} = y\left(\Phi = -\frac{\pi}{2}\right) = CR \ln\left(\tan\left(\frac{C\pi - \pi}{4C}\right)\right)$$

$$C=1.25 \quad y_{\min} = -2.3034R$$

$$C=1.50 \quad y_{\min} = -1.9754R$$

maximum cartesian coordinate y_{\max}

$$y_{\max} = y\left(\Phi = \frac{\pi}{2}\right) = CR \ln\left(\tan\left(\frac{C\pi + \pi}{4C}\right)\right)$$

$$C=1.25 \quad y_{\max} = 2.3034R$$

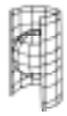
$$C=1.50 \quad y_{\max} = 1.9754R$$

angle of intersection of coordinate lines, left versus right

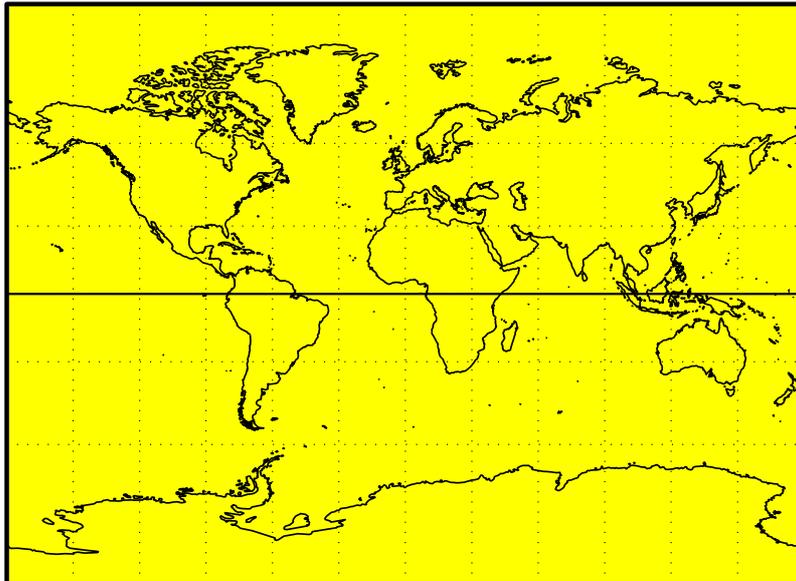
$$A = 90^\circ \quad \alpha = 90^\circ$$

left angular shear

$$\delta = 0^\circ$$

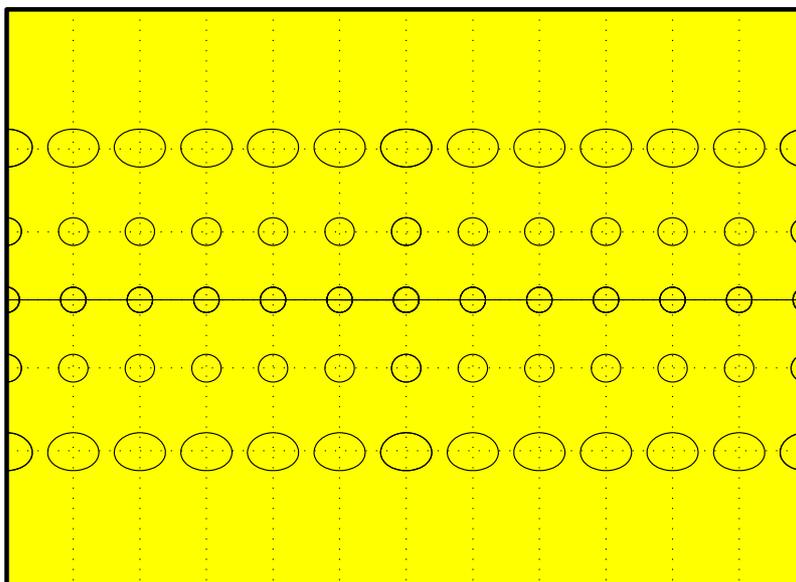


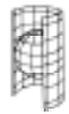
SPECIAL CYLINDRICAL PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF THE
STANDARD PARALLEL



Miller I projection: world map and left Tissot indicatrices

(30° - graticule, standard parallel $\Phi_{1,2} = 0^\circ$)





3-6. ZYLINDERABBILDUNGEN DER KUGEL MIT POLYNOMANSATZ

Die in diesem Abschnitt 3-6. vorgestellten Abbildungen mit Polynomansatz sind aus der Notwendigkeit heraus entstanden Abbildungen zu generieren, welche völlig unkonventionelle Verzerrungseigenschaften haben. Hierzu sei auf [4] verwiesen.

ZYLINDERABBILDUNG MIT POLYNOMANSATZ, ÄQUIDISTANT AUF DEN BEIDEN STANDARDPARALLELKREISEN Φ_1 UND Φ_2	
<i>Diese Abbildungsgleichungen sind die Erweiterung der Gleichungen, aus dem von Urmaev entwickelten Polynomansatz, für den Fall eines Schnitzzylinders anstelle eines Berührzylinders.</i>	
Andere Bezeichnung	→ KHARCHENKO-SHABANOVA Abbildung (für $\Phi_{1,2} = \pm 10^\circ$)
Eigenschaften	Die Meridiane und die Breitenkreise werden als Geraden abgebildet. Die Abstände der Meridiane sind gleich, die der Parallelkreise nehmen zu den Polen hin zu. Diese Abbildung ist weder konform noch flächentreu. Die beiden Standardparallelen werden äquidistant dargestellt, es liegt dort aber keine Konformität vor.
Einsatzgebiete	
Ursprung	Diese Abbildung geht maßgeblich auf Shabanova (1951-52) zurück.



ZYLINDERABBILDUNG MIT POLYNOMANSATZ, ÄQUIDISTANT UND KONFORM AUF DEM STANDARDPARALLELKREIS	
<p><i>Die Abbildungsgleichungen nach Pavlov haben dieselbe Form wie die unten angeführten Gleichungen nach Urmaev. Ein Unterschied besteht nur in der Wahl der Koeffizienten, wodurch sich allerdings völlig unterschiedliche Verzerrungseigenschaften ergeben. Deshalb werden diese beiden Abbildungen hier auch getrennt aufgeführt.</i></p>	
Andere Bezeichnung	→ PAVLOV Abbildung (Pavlov's cylindrical projection)
Eigenschaften	Die Meridiane und die Breitenkreise werden als Geraden abgebildet. Die Abstände der Meridiane sind gleich, die der Parallelkreise nehmen zu den Polen hin ab. Diese Abbildung ist also mit einer flächentreuen Abbildung zu vergleichen, allerdings wird die Eigenschaft der konsequenten Flächentreue zu Gunsten der Reduzierung von Winkelverzerrungen aufgegeben. Diese Abbildung hat den Nachteil, dass es für höhere Breiten zu größeren Verzerrungen in Ost-West Richtung kommt, was sie für den Gebrauch von Weltkarten einschränkt. Am Äquator liegt Konformität und Äquidistanz vor.
Einsatzgebiete	Diese Abbildung wird heutzutage gerne in der Kartographie zur Herstellung allgemein gebräuchlicher Karten in Atlanten verwendet.
Ursprung	Diese Abbildung wurde von A. A. Pavlov eingeführt.

ZYLINDERABBILDUNG MIT POLYNOMANSATZ, ÄQUIDISTANT AUF DEM STANDARDPARALLELKREIS	
<p><i>Die Abbildungsgleichungen nach Urmaev haben dieselbe Form wie die oben angeführten Gleichungen nach Pavlov. Ein Unterschied besteht nur in der Wahl der Koeffizienten, wodurch sich allerdings völlig unterschiedliche Verzerrungseigenschaften ergeben. Deshalb werden diese beiden Abbildungen hier auch getrennt aufgeführt.</i></p>	
Andere Bezeichnung	→ URMAEV III Abbildung (Urmaev's cylindrical projection)
Eigenschaften	Die Meridiane und die Breitenkreise werden wie üblich als Geraden abgebildet. Die Abstände der Meridiane sind gleich, die der Parallelkreise nehmen zu den Polen hin zu. Diese Abbildung hat die interessante Eigenschaft, dass sie an vier Breitenkreisen $\Phi_{1,2} = \pm 20^\circ$ und $\Phi_{3,4} = \pm 65^\circ$ Konformität aufweist, dagegen wird aber der Äquator nur äquidistant wiedergegeben. Am Äquator liegt also keine Winkeltreue mehr vor. Insgesamt weist diese Abbildung nur kleine Winkelverzerrungen auf. Dafür werden aber Flächen in mittleren und höheren Breiten zu groß dargestellt.
Einsatzgebiete	Diese Abbildung wurde 1947 für eine politische Weltkarte im Atlas 'Ofitsera' verwendet-
Ursprung	Diese Abbildung wurde von N. A. Urmaev, einem Mitglied der Russischen Schule für Mathematische Kartographie, 1947 eingeführt.



POLYNOMIAL CYLINDRICAL PROJECTION
EQUIDISTANT MAPPING OF
TWO STANDARD PARALLELS Φ_1, Φ_2

KHARCHENKO-SHABANOVA PROJECTION

direct equations, cartesian coordinates

$$\begin{aligned} x &= R \cos \Phi_1 (\Lambda - \Lambda_0) \\ y &= R \left(a_0 \Phi + \frac{a_2}{3} \Phi^3 + \frac{a_4}{5} \Phi^5 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= 10^\circ & a_2 &= -0.0007879 \\ a_0 &= +0.9900000 & a_4 &= -5.3660000 \end{aligned}$$

left Jacobi matrix

$$\mathbf{J}_l = \begin{pmatrix} x_\Lambda & x_\Phi \\ y_\Lambda & y_\Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos \Phi_1 & 0 \\ 0 & R(a_0 + a_2 \Phi^2 + a_4 \Phi^4) \end{pmatrix}$$

left Cauchy-Green deformation tensor

$$[c_{KL}] = \begin{pmatrix} R^2 \cos^2 \Phi_1 & 0 \\ 0 & R^2 (a_0 + a_2 \Phi^2 + a_4 \Phi^4)^2 \end{pmatrix}$$

left distance function

$$ds^2 = R^2 \cos^2 \Phi_1 d\Lambda^2 + R^2 (a_0 + a_2 \Phi^2 + a_4 \Phi^4)^2 d\Phi^2$$

left principal stretches

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \frac{\cos \Phi_1}{\cos \Phi} \\ \Lambda_2 &= a_0 + a_2 \Phi^2 + a_4 \Phi^4 \end{aligned}$$

left eigenvectors

$$\mathbf{U}_1 = \frac{1}{R \cos \Phi} \mathbf{G}_1 \quad \mathbf{U}_2 = \frac{1}{R} \mathbf{G}_2$$

maximum angular deformation

$$\Omega = 2 \arcsin \left| \frac{\cos \Phi_1 - \cos \Phi (a_0 + a_2 \Phi^2 + a_4 \Phi^4)}{\cos \Phi_1 + \cos \Phi (a_0 + a_2 \Phi^2 + a_4 \Phi^4)} \right|$$



POLYNOMIAL CYLINDRICAL PROJECTION
EQUIDISTANT MAPPING OF
TWO STANDARD PARALLELS Φ_1, Φ_2

inverse equations

$$\Lambda = \frac{x}{R \cos \Phi_1} + \Lambda_0$$

$$\Phi = \frac{1}{R} \left(b_0 y + \frac{1}{R^2} b_2 y^3 + \frac{1}{R^4} b_4 y^5 \right)$$

$$\begin{array}{ll} \Phi_1 = 10^\circ & b_2 = 0.000273 \\ b_0 = 1.010101 & b_4 = 1.139907 \end{array}$$

right Jacobi matrix

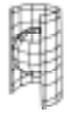
$$\mathbf{J}_r = \begin{pmatrix} \Lambda_x & \Lambda_y \\ \Phi_x & \Phi_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R \cos \Phi_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \left(b_0 + \frac{3}{R^2} b_2 y^2 + \frac{5}{R^4} b_4 y^4 \right) \end{pmatrix}$$

right Cauchy-Green deformation tensor

$$[C_{kl}] = \begin{pmatrix} \frac{\cos^2 \left(\frac{1}{R} \left(b_0 y + \frac{1}{R^2} b_2 y^3 + \frac{1}{R^4} b_4 y^5 \right) \right)}{\cos^2 \Phi_1} & 0 \\ 0 & \left(b_0 + \frac{3}{R^2} b_2 y^2 + \frac{5}{R^4} b_4 y^4 \right)^2 \end{pmatrix}$$

right distance function

$$dS^2 = \frac{\cos^2 \left(\frac{1}{R} \left(b_0 y + \frac{1}{R^2} b_2 y^3 + \frac{1}{R^4} b_4 y^5 \right) \right)}{\cos^2 \Phi_1} d\Lambda^2 + \left(b_0 + \frac{3}{R^2} b_2 y^2 + \frac{5}{R^4} b_4 y^4 \right)^2 d\Phi^2$$



POLYNOMIAL CYLINDRICAL PROJECTION
EQUIDISTANT MAPPING OF
TWO STANDARD PARALLELS Φ_1, Φ_2

right principal stretches

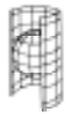
$$\lambda_1 = \frac{\cos\left(\frac{1}{R}\left(b_0 y + \frac{1}{R^2} b_2 y^3 + \frac{1}{R^4} b_4 y^5\right)\right)}{\cos\Phi_1}$$

$$\lambda_2 = b_0 + \frac{3}{R^2} b_2 y^2 + \frac{5}{R^4} b_4 y^4$$

right eigenvectors

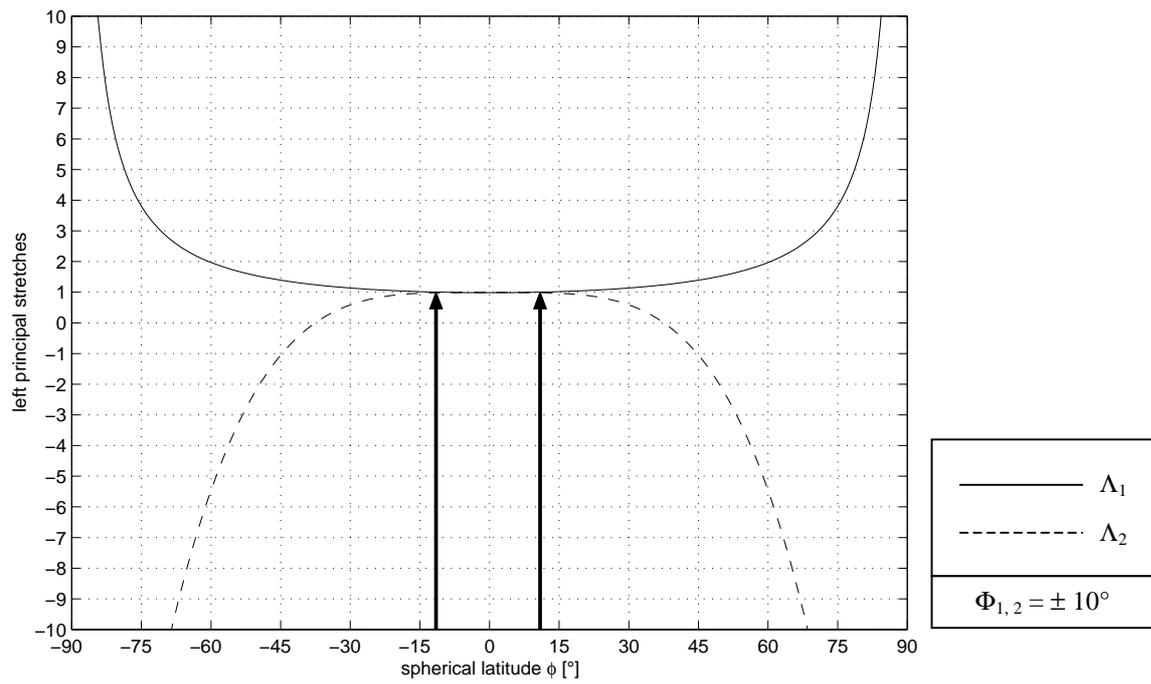
$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{g}_1$$

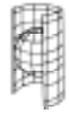
$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{g}_2$$



POLYNOMIAL CYLINDRICAL PROJECTION
 EQUIDISTANT MAPPING OF
 TWO STANDARD PARALLELS Φ_1, Φ_2

left principal stretches as function of the spherical latitude Φ





POLYNOMIAL CYLINDRICAL PROJECTION
EQUIDISTANT MAPPING OF
TWO STANDARD PARALLELS Φ_1, Φ_2

minimum cartesian coordinate y_{\min}

$$y_{\min} = y(\Phi = \frac{\pi}{2}) = -8.7091R$$

maximum cartesian coordinate y_{\max}

$$y_{\max} = y(\Phi = -\frac{\pi}{2}) = 8.7091R$$

angle of intersection of coordinate lines, left versus right

$$A = 90^\circ \quad \alpha = 90^\circ$$

left angular shear

$$\delta = 0^\circ$$



**POLYNOMIAL CYLINDRICAL PROJECTION
EQUIDISTANT MAPPING OF THE
STANDARD PARALLEL**

PAVLOV / URMAEV PROJECTION

direct equations, cartesian coordinates

$$\begin{aligned} x &= R(\Lambda - \Lambda_0) \\ y &= R\left(a_0\Phi + \frac{a_2}{3}\Phi^3 + \frac{a_4}{5}\Phi^5\right) \end{aligned}$$

Coefficients for Pavlov

$$\begin{aligned} a_0 &= +1.00000 \\ a_2 &= -0.15306 \\ a_4 &= -0.02673 \end{aligned}$$

Coefficients for Urmaev

$$\begin{aligned} a_0 &= +0.92813 \\ a_2 &= +1.11426 \\ a_4 &= 0 \end{aligned}$$

left Jacobi matrix

$$\mathbf{J}_l = \begin{pmatrix} x_\Lambda & x_\Phi \\ y_\Lambda & y_\Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R(a_0 + a_2\Phi^2 + a_4\Phi^4) \end{pmatrix}$$

left Cauchy-Green deformation tensor

$$[c_{KL}] = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2(a_0 + a_2\Phi^2 + a_4\Phi^4)^2 \end{pmatrix}$$

left distance function

$$ds^2 = R^2 d\Lambda^2 + R^2(a_0 + a_2\Phi^2 + a_4\Phi^4)^2 d\Phi^2$$



POLYNOMIAL CYLINDRICAL PROJECTION
EQUIDISTANT MAPPING OF THE
STANDARD PARALLEL

left principal stretches

$$\Lambda_1 = \frac{1}{\cos \Phi}$$

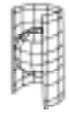
$$\Lambda_2 = a_0 + a_2 \Phi^2 + a_4 \Phi^4$$

left eigenvectors

$$U_1 = \frac{1}{R \cos \Phi} \mathbf{G}_1 \quad U_2 = \frac{1}{R} \mathbf{G}_2$$

maximum angular deformation

$$\Omega = 2 \arcsin \left| \frac{1 - \cos \Phi (a_0 + a_2 \Phi^2 + a_4 \Phi^4)}{1 + \cos \Phi (a_0 + a_2 \Phi^2 + a_4 \Phi^4)} \right|$$



POLYNOMIAL CYLINDRICAL PROJECTION
EQUIDISTANT MAPPING OF THE
STANDARD PARALLEL

inverse equations

$$\Lambda = \frac{x}{R} + \Lambda_0$$

$$\Phi = \frac{1}{R} \left(b_0 y + \frac{1}{R^2} b_2 y^3 + \frac{1}{R^4} b_4 y^5 \right)$$

Coefficients for Pavlov

$$b_0 = +1.000000$$

$$b_2 = +0.051020$$

$$b_4 = +0.013155$$

Coefficients for Urmaev

$$b_0 = +1.077435$$

$$b_2 = -0.500523$$

$$b_4 = 0$$

right Jacobi matrix

$$\mathbf{J}_r = \begin{pmatrix} \Lambda_x & \Lambda_y \\ \Phi_x & \Phi_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \left(b_0 + \frac{3}{R^2} b_2 y^2 + \frac{5}{R^4} b_4 y^4 \right) \end{pmatrix}$$

right Cauchy-Green deformation tensor

$$[C_{kl}] = \begin{pmatrix} \cos^2 \left(\frac{1}{R} \left(b_0 y + \frac{1}{R^2} b_2 y^3 + \frac{1}{R^4} b_4 y^5 \right) \right) & 0 \\ 0 & \left(b_0 + \frac{3}{R^2} b_2 y^2 + \frac{5}{R^4} b_4 y^4 \right)^2 \end{pmatrix}$$



POLYNOMIAL CYLINDRICAL PROJECTION
EQUIDISTANT MAPPING OF THE
STANDARD PARALLEL

right distance function

$$dS^2 = \cos^2 \left(\frac{1}{R} \left(b_0 y + \frac{1}{R^2} b_2 y^3 + \frac{1}{R^4} b_4 y^5 \right) \right) d\Lambda^2 + \left(b_0 + \frac{3}{R^2} b_2 y^2 + \frac{5}{R^4} b_4 y^4 \right)^2 d\Phi^2$$

right principal stretches

$$\lambda_1 = \cos \left(\frac{1}{R} \left(b_0 y + \frac{1}{R^2} b_2 y^3 + \frac{1}{R^4} b_4 y^5 \right) \right)$$

$$\lambda_2 = b_0 + \frac{3}{R^2} b_2 y^2 + \frac{5}{R^4} b_4 y^4$$

right eigenvectors

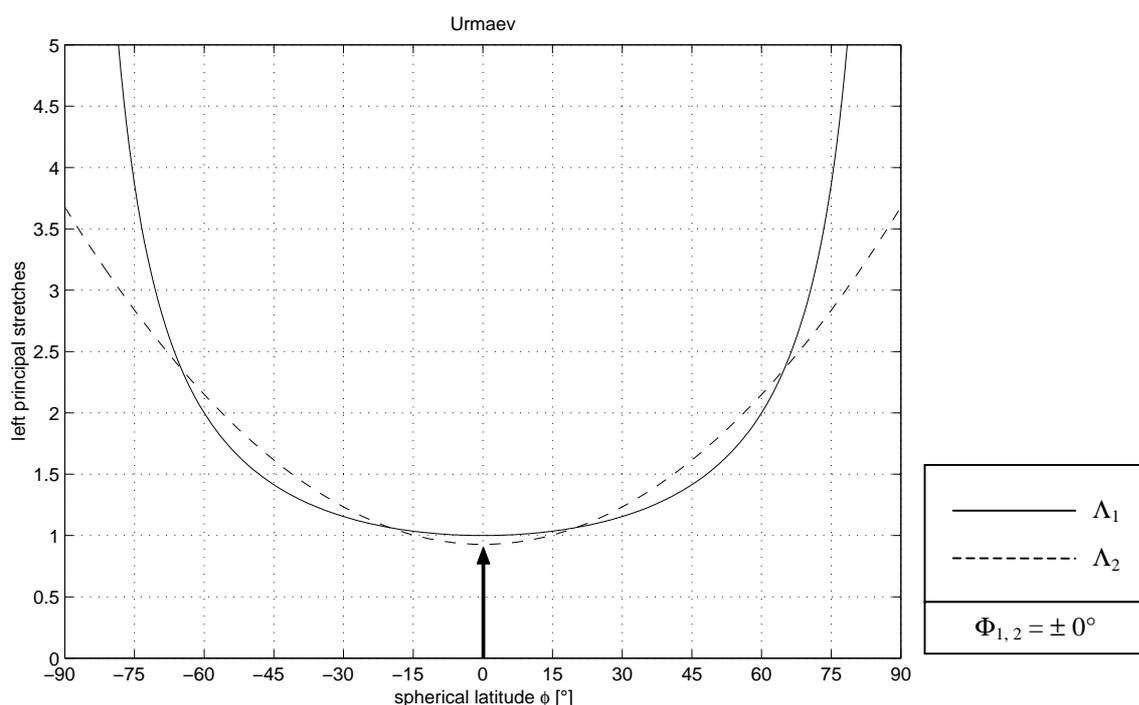
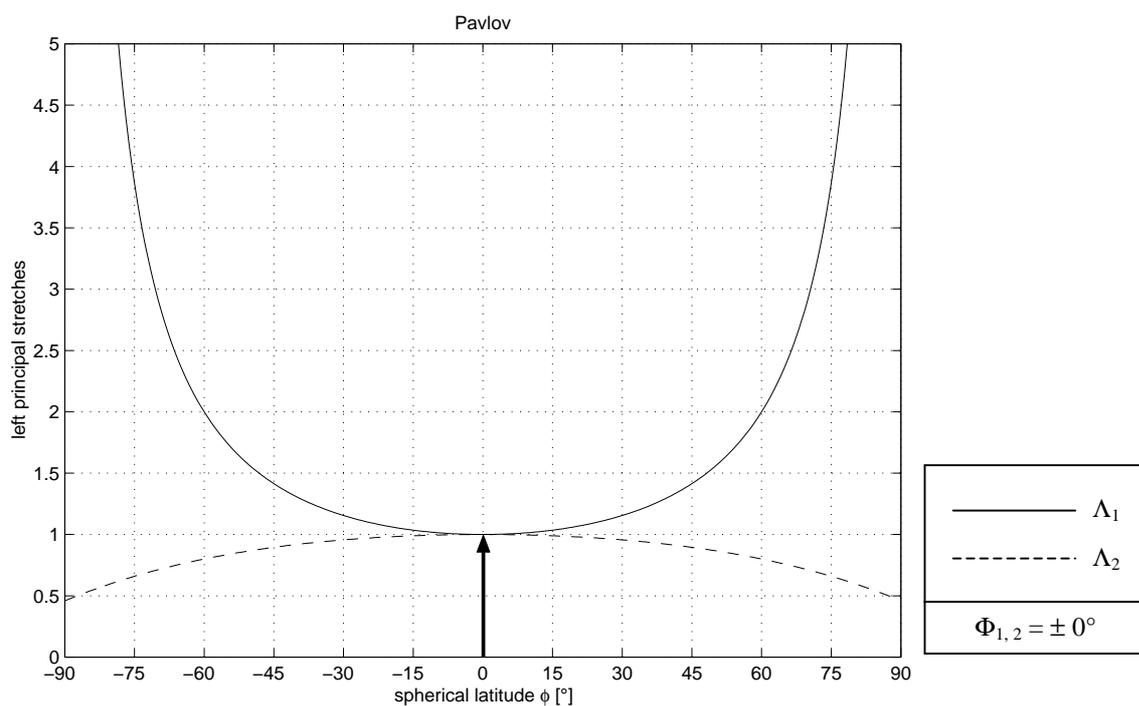
$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{g}_1$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{g}_2$$



POLYNOMIAL CYLINDRICAL PROJECTION
EQUIDITANT MAPPING OF THE
STANDARD PARALLEL

left principal stretches as function of the spherical latitude Φ





POLYNOMIAL CYLINDRICAL PROJECTION
EQUIDISTANT MAPPING OF THE
STANDARD PARALLEL

Pavlov**minimum cartesian coordinate y_{\min}**

$$y_{\min} = y\left(\Phi = -\frac{\pi}{2}\right) = -1.3219R$$

maximum cartesian coordinate y_{\max}

$$y_{\max} = y\left(\Phi = \frac{\pi}{2}\right) = +1.3219R$$

Urmaev**minimum cartesian coordinate y_{\min}**

$$y_{\min} = y\left(\Phi = -\frac{\pi}{2}\right) = -2.8974R$$

maximum cartesian coordinate y_{\max}

$$y_{\max} = y\left(\Phi = \frac{\pi}{2}\right) = +2.8974R$$

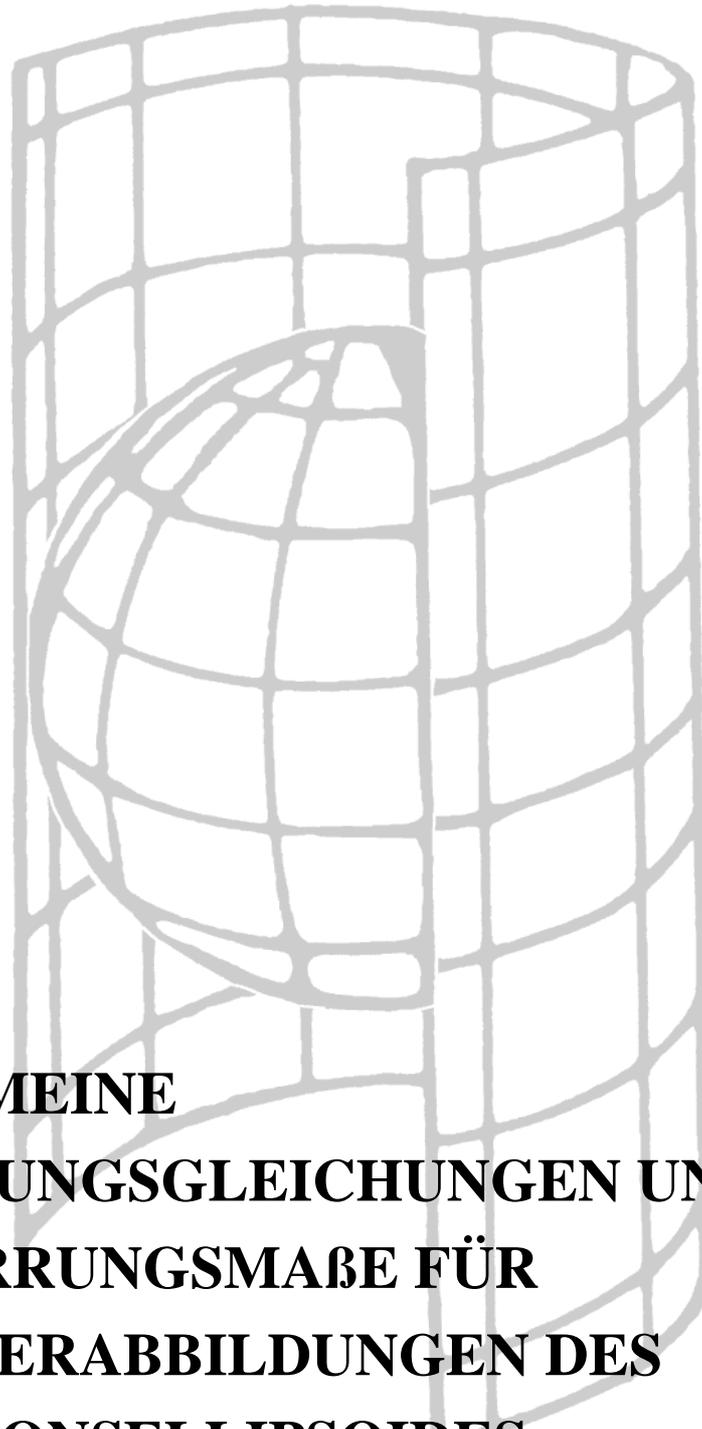
angle of intersection of coordinate lines, left versus right

$$A = 90^\circ \quad \alpha = 90^\circ$$

left angular shear

$$\delta = 0^\circ$$

KAPITEL 4



ALLGEMEINE ABBILDUNGSGLEICHUNGEN UND VERZERRUNGSMÄÙE FÜR ZYLINDERABBILDUNGEN DES ROTATIONSELLIPSOIDES



Die Aussagen, welche in Kapitel 2 über Zylinderabbildungen der Kugel getroffen wurden, gelten im wesentlichen ebenso für die Zylinderabbildungen des Rotationsellipsoides. Insbesondere ist die Unterscheidung der gegenseitigen Lage von Urbild- und Bildfläche in normalständig, transversal und schiefachsigt analog zu Kapitel 2, und wird hier nicht nochmals ausgeführt. Bei Zylinderabbildungen des Rotationsellipsoides werden ebenfalls Berühr- und Schnitzzylinder unterschieden. Bei dem allgemeineren Fall eines Schnitzzylinders treten die beiden Standardparallelen unter den ellipsoidischen Breiten B_1 (nördlich) und B_2 (südlich) auf. Es liegt wiederum Symmetrie zum Äquator vor, woraus $B_1 = -B_2$ folgt.

Die allgemeinen direkten Abbildungsgleichungen für Zylinderabbildungen des Rotationsellipsoides ergeben sich aus den Forderungen, dass die Bildkoordinate y nur von der ellipsoidischen Breite B abhängen soll, und die Bildkoordinate x nur von der ellipsoidischen Länge L . Im Falle eines Schnitzzylinders sollen zusätzlich die unter der nördlichen Breite B_1 bzw. unter der südlichen Breite B_2 erscheinenden Standardparallelen äquidistant abgebildet werden. Im Falle eines Berührzylinders soll der Äquator äquidistant abgebildet werden. Damit folgt für die direkten Abbildungsgleichungen

$$\begin{aligned} x &= N_1 \cos B_1 (L - L_0) \\ y &= f(B) \end{aligned}$$

Für L_0 ist wiederum die Länge des Bezugsmeridians einzusetzen. Wird als Bezugsmeridian der Meridian von Greenwich gewählt, entfällt L_0 . N_1 ist der zu B_1 zugehörige Normalkrümmungsradius.

Die allgemeinen inversen Abbildungsgleichungen für Zylinderabbildungen des Rotationsellipsoides erhält man formal durch Invertieren der obigen Gleichungen

$$\begin{aligned} L &= \frac{x}{N_1 \cos B_1} + L_0 \\ B &= f^{-1}(y) = g(y) \end{aligned}$$

Allerdings wird sich später zeigen, dass die Invertierung mit erheblichem Aufwand verbunden ist. Deshalb wird im Rahmen dieser Arbeit auf die Behandlung inverser Zylinderabbildungen des Rotationsellipsoides verzichtet und nur der direkte Aspekt behandelt.



Deformationsanalyse für die allgemeinen Abbildungsgleichungen von Zylinderabbildungen des Rotationsellipsoides

Der Metriktensor des Urbildes (Rotationsellipsoid) lautet (vgl. 1-2.)

$$[G_{KL}] = \begin{pmatrix} \frac{A^2 \cos^2 B}{1 - E^2 \sin^2 B} & 0 \\ 0 & \frac{A^2 (1 - E^2)^2}{(1 - E^2 \sin^2 B)^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N^2 \cos^2 B & 0 \\ 0 & M^2 \end{pmatrix}$$

wobei für den Normalkrümmungsradius N und den Meridiankrümmungsradius M folgendes gilt

$$N = \frac{A}{\sqrt{1 - E^2 \sin^2 B}} \quad M = \frac{A(1 - E^2)}{(1 - E^2 \sin^2 B)^{3/2}}$$

Der Metriktensor einer ebenen Fläche, in welche sich der Zylinder abwickeln lässt, lautet für den Fall kartesischer Koordinaten (vgl. 1-3.)

$$[g_{kl}] = \delta_{kl} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ausgehend von den folgenden allgemeinen direkten und inversen Abbildungsgleichungen für Zylinderabbildungen des Rotationsellipsoides,

$$\begin{aligned} x &= N_1 \cos B_1 (L - L_0) \\ y &= f(B) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L &= \frac{x}{N_1 \cos B_1} + L_0 \\ B &= f^{-1}(y) = g(y) \end{aligned}$$

welche sich, wie bereits angeführt, aus der Forderung ergeben, dass die Bildkoordinate y nur von der ellipsoidischen Breite B und die Bildkoordinate x nur von der ellipsoidischen Länge L abhängen soll, ergibt sich für die linke bzw. für die rechte Jakobi-Matrix (vgl. 1-6.)

$$\mathbf{J}_l = \begin{pmatrix} N_1 \cos B_1 & 0 \\ 0 & \frac{df}{dB} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{J}_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{N_1 \cos B_1} & \frac{dg}{dy} \end{pmatrix}$$



sowie für den linken bzw. rechten Cauchy-Greenschen-Deformationstensor

$$[c_{KL}] = \mathbf{J}_l^T [g_{kl}] \mathbf{J}_l \qquad [C_{kl}] = \mathbf{J}_r^T [G_{KL}] \mathbf{J}_r$$

$$[c_{KL}] = \begin{pmatrix} (N_1 \cos B_1)^2 & 0 \\ 0 & \left(\frac{df}{dB}\right)^2 \end{pmatrix} \qquad [C_{kl}] = \begin{pmatrix} \frac{(N_{(g(y))} \cos g(y))^2}{(N_1 \cos B_1)^2} & 0 \\ 0 & M_{(g(y))}^2 \left(\frac{dg}{dy}\right)^2 \end{pmatrix}.$$

Dabei steht $N_{(g(y))}$ und $M_{(g(y))}$ für

$$N_{(g(y))} = \frac{A}{\sqrt{1 - E^2 \sin^2 g(y)}} \qquad M_{(g(y))} = \frac{A(1 - E^2)}{(1 - E^2 \sin^2 g(y))^{3/2}}.$$

Spätestens mit dem Aufstellen des rechten Cauchy-Greenschen-Deformationstensors wird sich herausstellen, dass sich die Behandlung des inversen Problems, aufgrund der notwendig werdenden Invertierungen, äußerst anspruchsvoll gestaltet. Im weiteren wird deshalb auf die Behandlung der inversen Abbildung verzichtet.

Das Bogenelement ds^2 des Bildes, als Funktion der Urbildkoordinaten Λ und Φ , ergibt sich zu

$$ds^2 = (N_1 \cos B_1)^2 dL^2 + \left(\frac{df}{dB}\right)^2 dB^2$$

Da die Parameterlinien sowohl im Urbild als auch im Bild senkrecht zueinander stehen, entsprechen die Hauptstreckungen den Streckungen entlang der Parameterlinien und somit ergeben sich die linken Hauptstreckungen zu (vgl. 1-6.)

$$\Lambda_1 = \sqrt{\frac{c_{11}}{G_{11}}} = N_1 \cos B_1 \frac{\sqrt{1 - E^2 \sin^2 B}}{A \cos B} = \frac{N_1 \cos B_1}{N \cos B}$$

$$\Lambda_2 = \sqrt{\frac{c_{22}}{G_{22}}} = \frac{(1 - E^2 \sin^2 B)^{3/2}}{A(1 - E^2)} \left(\frac{df}{dB}\right) = \frac{1}{M} \left(\frac{df}{dB}\right).$$

Wie unter 1-6. Gezeigt, ergeben sich die Eigenvektoren zu

$$U_1 = \frac{1}{\sqrt{G_{11}}} \mathbf{G}_1 = \frac{\sqrt{1 - E^2 \sin^2 B}}{A \cos B} \mathbf{G}_1 = \frac{1}{N \cos B} \mathbf{G}_1$$

$$U_2 = \frac{1}{\sqrt{G_{22}}} \mathbf{G}_2 = \frac{(1 - E^2 \sin^2 B)^{3/2}}{A(1 - E^2)} \mathbf{G}_2 = \frac{1}{M} \mathbf{G}_2$$



und die maximale Winkelverzerrung wird definiert als

$$\begin{aligned} \Omega &= 2 \arcsin \left| \frac{\Lambda_1 - \Lambda_2}{\Lambda_1 + \Lambda_2} \right| = 2 \arcsin \left| \frac{N_1 \cos B_1 (1 - E^2) - \cos B (1 - E^2 \sin^2 B) \left(\frac{df}{dB} \right)}{N_1 \cos B_1 (1 - E^2) + \cos B (1 - E^2 \sin^2 B) \left(\frac{df}{dB} \right)} \right| \\ &= 2 \arcsin \left| \frac{N_1 \cos B_1 - \frac{N}{M} \cos B \left(\frac{df}{dB} \right)}{N_1 \cos B_1 + \frac{N}{M} \cos B \left(\frac{df}{dB} \right)} \right|. \end{aligned}$$

Der Winkel A , den die Parameterlinien im Urbild einschließen, berechnet sich zu

$$\cos A = \frac{G_{12}}{\sqrt{G_{11} G_{22}}}.$$

Den Winkel α , welchen die Parameterlinien im Bild einschließen, erhält man aus

$$\cos \alpha = \frac{c_{12}}{\sqrt{c_{11} c_{22}}}.$$

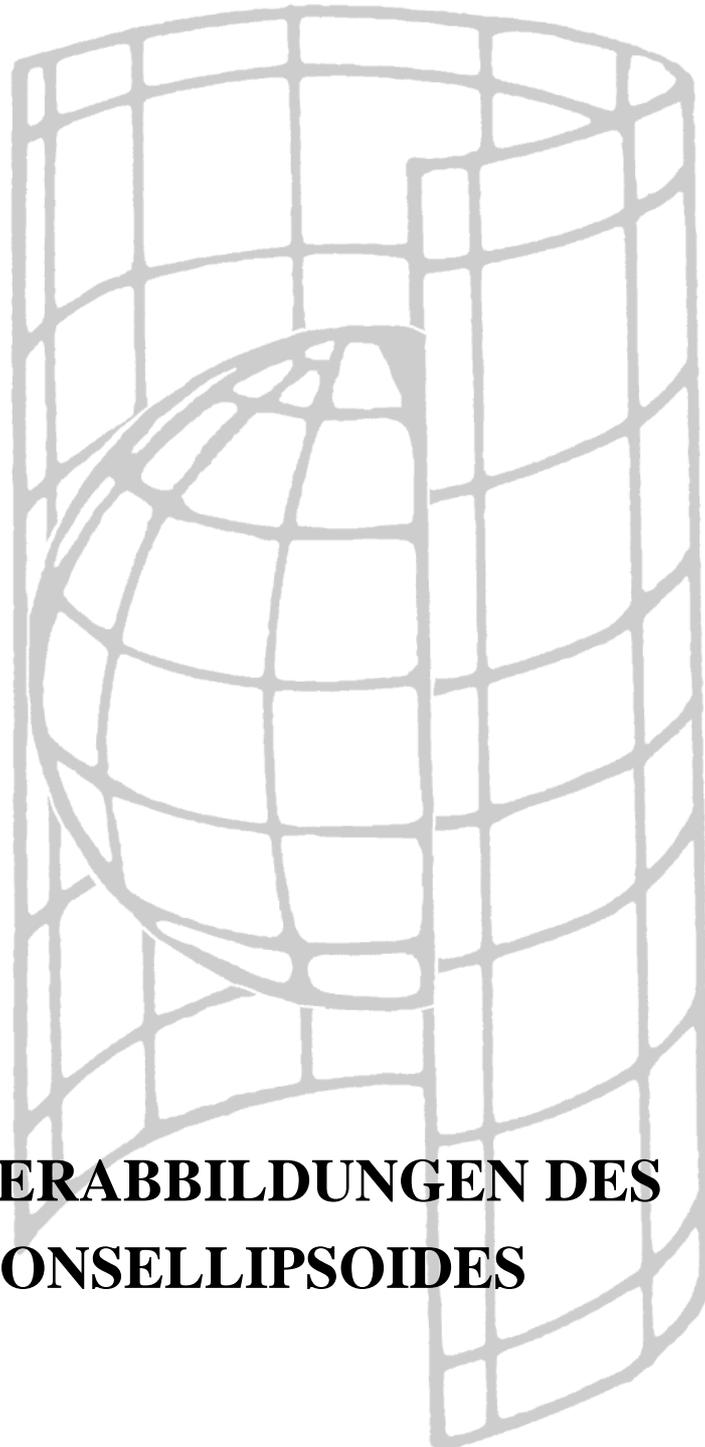
Unter der Scherung versteht man die Differenz

$$\delta = \alpha - A = \arccos \frac{c_{12}}{\sqrt{c_{11} c_{22}}} - \arccos \frac{G_{12}}{\sqrt{G_{11} G_{22}}}$$

der beiden obigen Winkel α und A . Im Falle orthogonaler Parametrisierung, wie sie hier sowohl im Urbild als auch im Bild (G_{12} und $c_{12} = 0$) vorliegt, ergibt sich folglich die Scherung für alle betrachteten Zylinderabbildungen zu 0.

In Kapitel 5 sollen der Vollständigkeit wegen die direkte äquidistante, die direkte konforme und die direkte flächentreue Zylinderabbildung des Rotationsellipsoids für den Fall eines schneidenden Zylinders (2 Standardparallelen) entsprechend Kapitel 4 behandelt werden. Eine Einschränkung auf diese drei Abbildungen soll in dieser Arbeit ausreichend sein, zumal den Zylinderabbildungen des Rotationsellipsoids ohnehin wenig praktische Bedeutung zukommt, abgesehen einiger spezieller Anwendungen. Es werden wieder die Hauptstreckungen Λ_1 und Λ_2 in Abhängigkeit der ellipsoidischen Breite B dargestellt. Mit Hilfe der Mapping Toolbox von MatLab werden zusätzlich die einzelnen Abbildungen (in Form einer Weltkarte) und deren Verzerrungseigenschaften durch Tissot Ellipsen veranschaulicht.

KAPITEL 5



ZYLINDERABBILDUNGEN DES ROTATIONSELLIPSOIDES



5-1. ÄQUIDISTANTE ZYLINDERABBILDUNGEN DES ROTATIONSELLIPSOIDES

Im folgenden Kapitel 5 werden die wichtigsten, nämlich die direkte äquidistante, die direkte konforme und die direkte flächentreue Zylinderabbildung des Rotationsellipsoides vorgestellt. Dabei wird, wie in Kapitel 4 bereits erläutert, aus Gründen der Komplexität auf die Behandlung der inversen Abbildungen verzichtet. Die Auswahl der Abbildungen beschränkt sich nur auf die drei oben genannten, da, wie ebenfalls bereits erwähnt, Zylinderabbildungen des Rotationsellipsoides allgemein weniger gebräuchlich sind. Hinzu kommt, dass sie auch in der Literatur seltener vertreten sind. Demzufolge muss in diesem Kapitel auf die Vorstellung der Abbildungen hinsichtlich anderer Bezeichnungen, Einsatzgebiete und Ursprung in tabellarischer Form verzichtet werden.

In diesem Abschnitt 5-1. soll die normalständige äquidistante Zylinderabbildung des Rotationsellipsoides mit 2 Standardparallelkreisen behandelt werden. Die beiden Standardparallelkreise ergeben sich unter der nördlichen ellipsoidischen Breite B_1 bzw. unter der südlichen ellipsoidischen Breite $B_2 (= -B_1)$. Diese Standardparallelkreise werden längentreu abgebildet, und da es sich in diesem Abschnitt um eine äquidistante Abbildung handelt, werden zusätzlich alle Meridiane äquidistant wiedergegeben. Daraus folgt die Bedingung $\Lambda_2 = 1$ für die Streckung entlang der Meridiane. Aus dieser Bedingung und aus der allgemeinen Form für Λ_2 , wie sie in Kapitel 4 eingeführt wurde, ergibt sich ein elliptisches Integral 2. Art zur Bestimmung der Abbildungsgleichung für y (vgl. Seite 118). Im weiteren sollen einige weitere Eigenschaften dieser Abbildung vorgestellt werden. Außerdem wird auf den wesentlichen Unterschied zwischen der Abbildung der Kugel und der des Rotationsellipsoides eingegangen.

Die Meridiane und die Breitenkreise werden bei der Abbildung vom Rotationsellipsoid auf den Zylinder ebenfalls als Geraden dargestellt. Es herrscht Äquidistanz und Konformität für die beiden Standardparallelkreise. Die Pole werden als Streifen wiedergegeben. Bei der äquidistanten Zylinderabbildung der Kugel mit 2 Standardparallelkreisen (Plate Carrée) ergab die Darstellung der Meridiane und der Breitenkreise in der Karte ein Gitternetz mit gleich großen rechteckigen Maschen. Bei der äquidistanten Zylinderabbildung des Rotationsellipsoides mit 2 Standardparallelen hingegen, wächst der Abstand der Breitenkreise zu den Polen hin an. Wie stark dies der Fall ist, hängt ausschließlich von der Exzentrizität des Rotationsellipsoides ab. Um zwischen den durch MatLab erzeugten Darstellungen überhaupt ein Unterschied für Zylinderabbildungen der Kugel bzw. des Rotationsellipsoides zu sehen, wurde die Exzentrizität zu $e = 0.5$ gewählt. In diesem Fall ist die kleine Halbachse gerade halb so lang wie die Große. Tatsächlich verwendete Werte für die Exzentrizität liegen eigentlich bei etwa 1 : 300. Es soll hier noch angemerkt werden, dass die Wahl der Exzentrizität zu 0.5 zwar sehr gut den Unterschied zwischen Abbildungen des Rotationsellipsoides und der Kugel deutlich macht, da dieser Wert reale Werte allerdings stark übertrifft, treten einige Schwierigkeiten in Zusammenhang mit MatLab auf. So kann zum Beispiel MatLab die Tissot Ellipsen nur bis zu einer Exzentrizität von 0.2 mit ausreichend guter Genauigkeit darstellen. Dies hat unter anderem zur Folge, dass die Tissot Ellipsen für die Standardparallelen keine exakten Kreise sind, obwohl eigentlich Konformität vorliegen würde. Für die Hervorhebung der wesentlichen Eigenschaften dieser Abbildungen sind die Darstellungen allerdings ausreichend.



EQUIDISTANT CYLINDRICAL PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF
TWO STANDARD PARALLELS B_1, B_2

direct equations, cartesian coordinates

$$\begin{aligned} x &= N_1 \cos B_1 (\Lambda - \Lambda_0) \\ y &= f(B) \end{aligned}$$

$$f(B) = A(1 - E^2) \int_0^B \frac{1}{(1 - E^2 \sin^2 B')^{3/2}} dB'$$

$$\begin{aligned} f(B) = A [& (1 - \frac{E^2}{4} - \frac{3E^4}{64} - \frac{5E^6}{256} - \frac{175E^8}{16384} - \frac{441E^{10}}{65536}) B + \\ & + (-\frac{3E^2}{8} - \frac{3E^4}{32} - \frac{1024}{4096} - \frac{2205E^{10}}{131072}) \sin(2B) + \\ & + (+\frac{15E^4}{256} + \frac{45E^6}{1024} + \frac{525E^8}{16384} + \frac{1575E^{10}}{65536}) \sin(4B) + \\ & + (-\frac{35E^6}{3072} - \frac{175E^8}{12288} - \frac{3675E^{10}}{262144}) \sin(6B) + \\ & + (+\frac{315E^8}{131072} + \frac{2205E^{10}}{524288}) \sin(8B) + \\ & + (-\frac{693E^{10}}{1310720}) \sin(10B)] + o(E^{12}) \end{aligned}$$

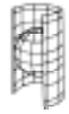
$f(B)$ is a solution for an elliptical integral of the second kind. The result is the length of a meridian arc from the equator ($B = 0$) to a parallel with ellipsoidal latitude B .

left Jacobi matrix

$$J_l = \begin{pmatrix} x_\Lambda & x_B \\ y_\Lambda & y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1 \cos B_1 & 0 \\ 0 & \frac{A(1 - E^2)}{(1 - E^2 \sin^2 B)^{3/2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1 \cos B_1 & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}$$

left Cauchy-Green deformation tensor

$$[c_{KL}] = \begin{pmatrix} (N_1 \cos B_1)^2 & 0 \\ 0 & \left(\frac{A(1 - E^2)}{(1 - E^2 \sin^2 B)^{3/2}} \right)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (N_1 \cos B_1)^2 & 0 \\ 0 & M^2 \end{pmatrix}$$



EQUIDISTANT CYLINDRICAL PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF
TWO STANDARD PARALLELS B_1, B_2

left distance function

$$ds^2 = (N_1 \cos B_1)^2 dL^2 + \left(\frac{A(1-E^2)}{(1-E^2 \sin^2 B)^{3/2}} \right)^2 dB^2 = (N_1 \cos B_1)^2 dL^2 + M^2 dB^2$$

left principal stretches

$$\Lambda_1 = N_1 \cos B_1 \frac{\sqrt{1-E^2 \sin^2 B}}{A \cos B} = \frac{N_1 \cos B_1}{N \cos B}$$

$$\Lambda_2 = 1$$

left eigenvectors

$$U_1 = \frac{1}{N \cos B} G_1 \quad U_2 = \frac{1}{M} G_2$$

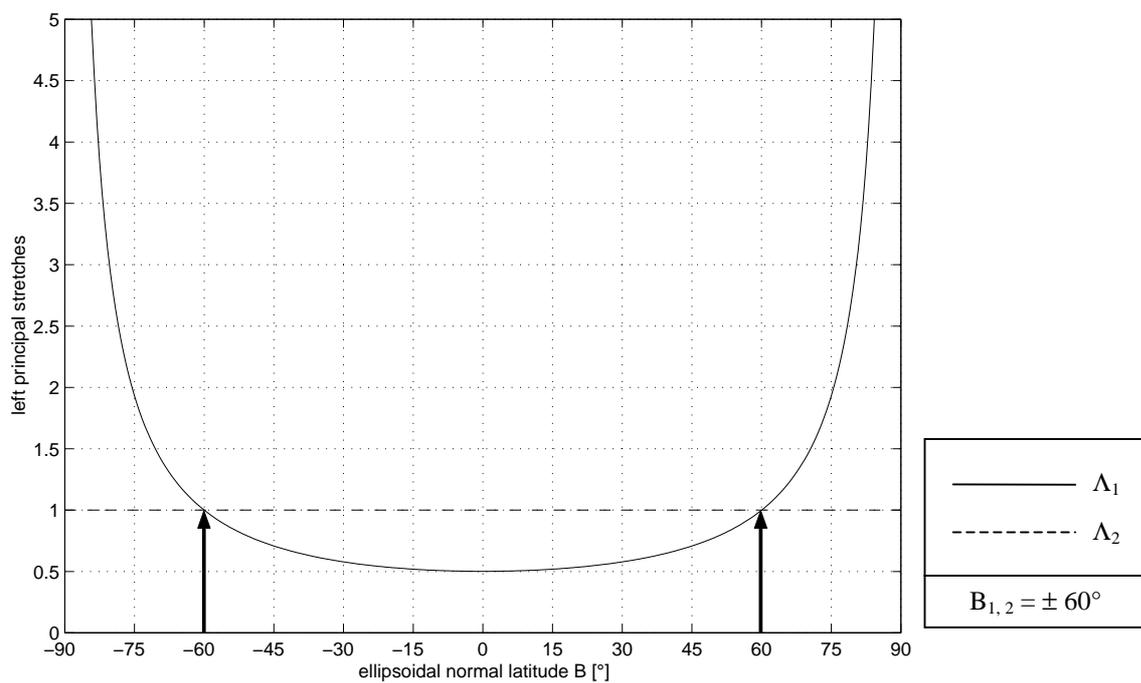
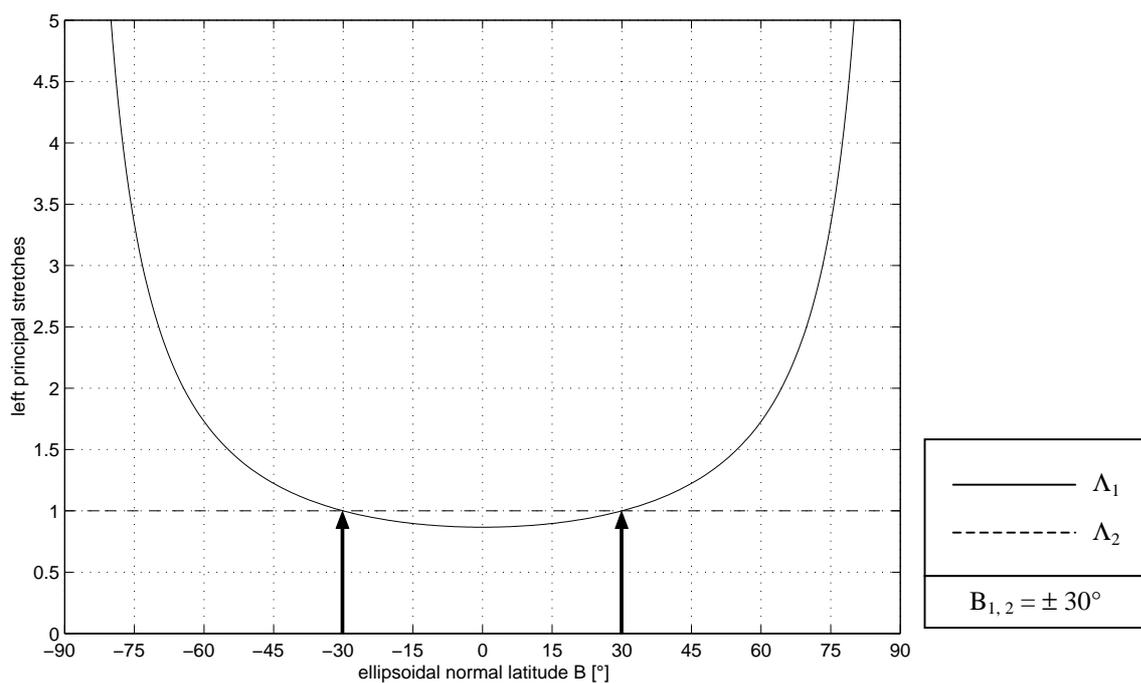
maximum angular deformation

$$\Omega = 2 \arcsin \left| \frac{N_1 \cos B_1 \sqrt{1-E^2 \sin^2 B} - A \cos B}{N_1 \cos B_1 \sqrt{1-E^2 \sin^2 B} + A \cos B} \right| = 2 \arcsin \left| \frac{N_1 \cos B_1 - N \cos B}{N_1 \cos B_1 + N \cos B} \right|$$



EQUIDISTANT CYLINDRICAL PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF
TWO STANDARD PARALLELS B_1, B_2

left principal stretches as function of the ellipsoidal latitude B





EQUIDISTANT CYLINDRICAL PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF
TWO STANDARD PARALLELS B_1, B_2

minimum cartesian coordinate y_{\min}

$$y_{\min} = y(B = -\frac{\pi}{2}) = -A \left(1 - \frac{E^2}{4} - \frac{3E^4}{64} - \frac{5E^6}{256} - \frac{175E^8}{16384} - \frac{441E^{10}}{65536} \right) \frac{\pi}{2}$$

maximum cartesian coordinate y_{\max}

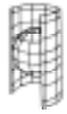
$$y_{\max} = y(B = \frac{\pi}{2}) = A \left(1 - \frac{E^2}{4} - \frac{3E^4}{64} - \frac{5E^6}{256} - \frac{175E^8}{16384} - \frac{441E^{10}}{65536} \right) \frac{\pi}{2}$$

angle of intersection of coordinate lines, left versus right

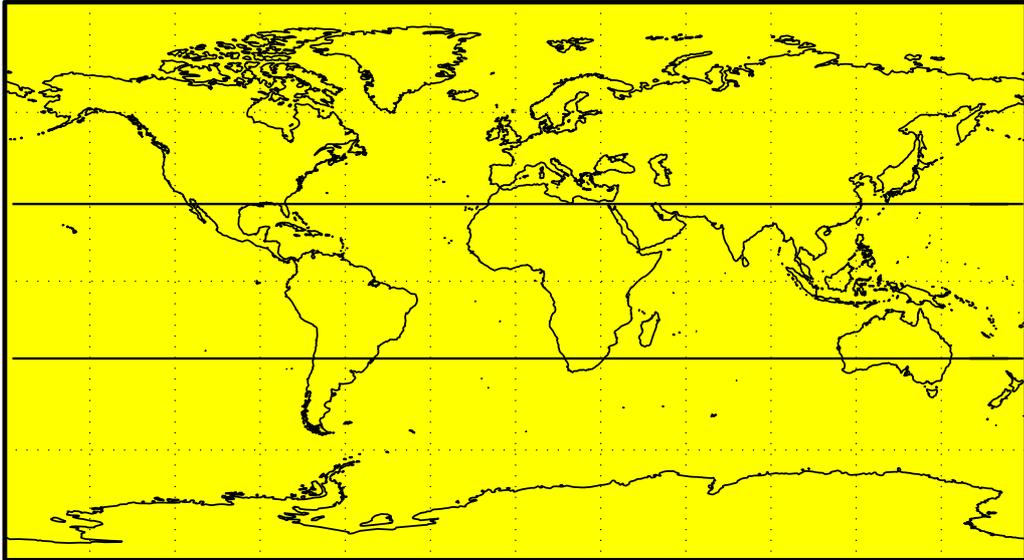
$$A = 90^\circ \quad \alpha = 90^\circ$$

left angular shear

$$\delta = 0^\circ$$

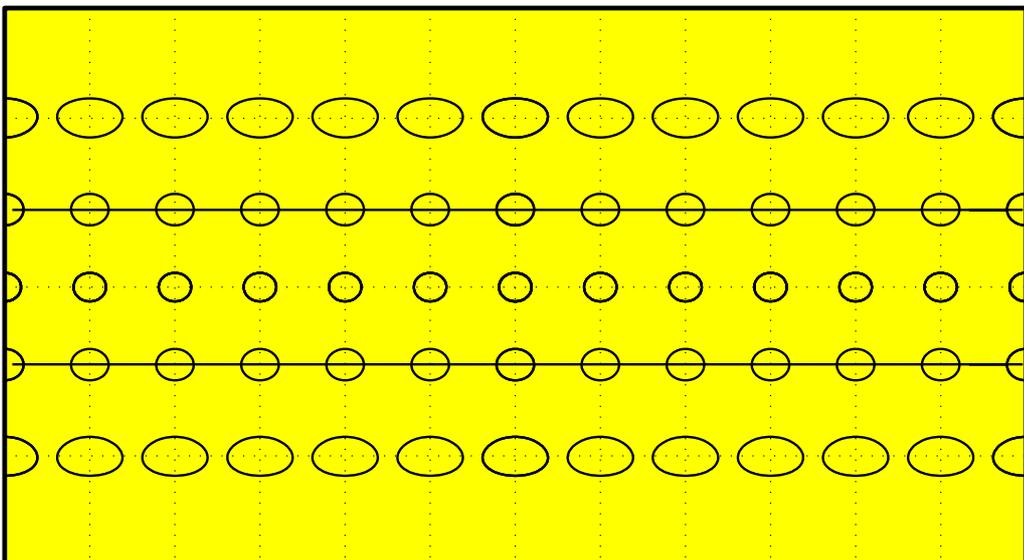


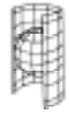
EQUIDISTANT CYLINDRICAL PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF
TWO STANDARD PARALLELS B_1, B_2



Equidistant projection: world map and left Tissot indicatrices

(30° - graticule, standard parallels $B_{1,2} = \pm 30^\circ$)

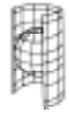




5-2. KONFORME ZYLINDERABBILDUNGEN DES ROTATIONSELLIPSOIDES

In diesem Abschnitt 5-2. soll die normalständige konforme Zylinderabbildung des Rotationsellipsoides mit 2 Standardparallelkreisen behandelt werden. Dabei werden einige Eigenschaften dieser Abbildung vorgestellt. Außerdem wird auf den wesentlichen Unterschied zwischen der Abbildung der Kugel und der des Rotationsellipsoides eingegangen.

Die wesentliche Eigenschaft dieser Abbildung ist wiederum, dass die Loxodrome als Gerade abgebildet wird. Die Meridiane und die Breitenkreise werden ebenfalls geradlinig dargestellt. Die Meridiane werden in gleichen Abständen, die Breitenkreise mit wachsenden Abständen wiedergegeben. Die Verzerrungen in Richtung der Pole nehmen stark zu. Dies hat zur Folge, dass die Pole überhaupt nicht dargestellt werden können. Die Standardparallelen werden äquidistant abgebildet und nahe diesen sind die Verzerrungen minimal. Der Unterschied zwischen der Zylinderabbildung des Rotationsellipsoides und derjenigen der Kugel ist, dass das Drahtmodell (Gitternetz) des Rotationsellipsoides gedrungener erscheint. Infolgedessen sind die Abstände der Breitenkreise im Falle des Rotationsellipsoides kleiner als bei der Kugel.



CONFORMAL CYLINDRICAL PROJECTION EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF TWO STANDARD PARALLELS B_1, B_2

direct equations, cartesian coordinates

$$\begin{aligned}x &= N_1 \cos B_1 (\Lambda - \Lambda_0) \\y &= N_1 \cos B_1 \ln \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{B}{2} \right) \frac{(1 - E \sin B)^{E/2}}{1 + E \sin B} \right) = A(\operatorname{artanh}(\sin B) - E \operatorname{artanh}(E \sin B))\end{aligned}$$

left Jacobi matrix

$$\mathbf{J}_l = \begin{pmatrix} x_\Lambda & x_B \\ y_\Lambda & y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1 \cos B_1 & 0 \\ 0 & \frac{N_1 \cos B_1}{\cos B} \frac{(1 - E^2)}{1 - E^2 \sin^2 B} \end{pmatrix}$$

left Cauchy-Green deformation tensor

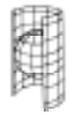
$$[c_{KL}] = \begin{pmatrix} (N_1 \cos B_1)^2 & 0 \\ 0 & \left(\frac{N_1 \cos B_1}{\cos B} \frac{(1 - E^2)}{1 - E^2 \sin^2 B} \right)^2 \end{pmatrix}$$

left distance function

$$ds^2 = (N_1 \cos B_1)^2 dL^2 + \left(\frac{N_1 \cos B_1}{\cos B} \frac{(1 - E^2)}{1 - E^2 \sin^2 B} \right)^2 dB^2$$

left principal stretches

$$\begin{aligned}\Lambda_1 &= N_1 \cos B_1 \frac{\sqrt{1 - E^2 \sin^2 B}}{A \cos B} = \frac{N_1 \cos B_1}{N \cos B} \\ \Lambda_2 &= N_1 \cos B_1 \frac{\sqrt{1 - E^2 \sin^2 B}}{A \cos B} = \frac{N_1 \cos B_1}{N \cos B}\end{aligned}$$



CONFORMAL CYLINDRICAL PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF
TWO STANDARD PARALLELS B_1, B_2

left eigenvectors

$$U_1 = \frac{1}{N \cos B} G_1 \qquad U_2 = \frac{1}{M} G_2$$

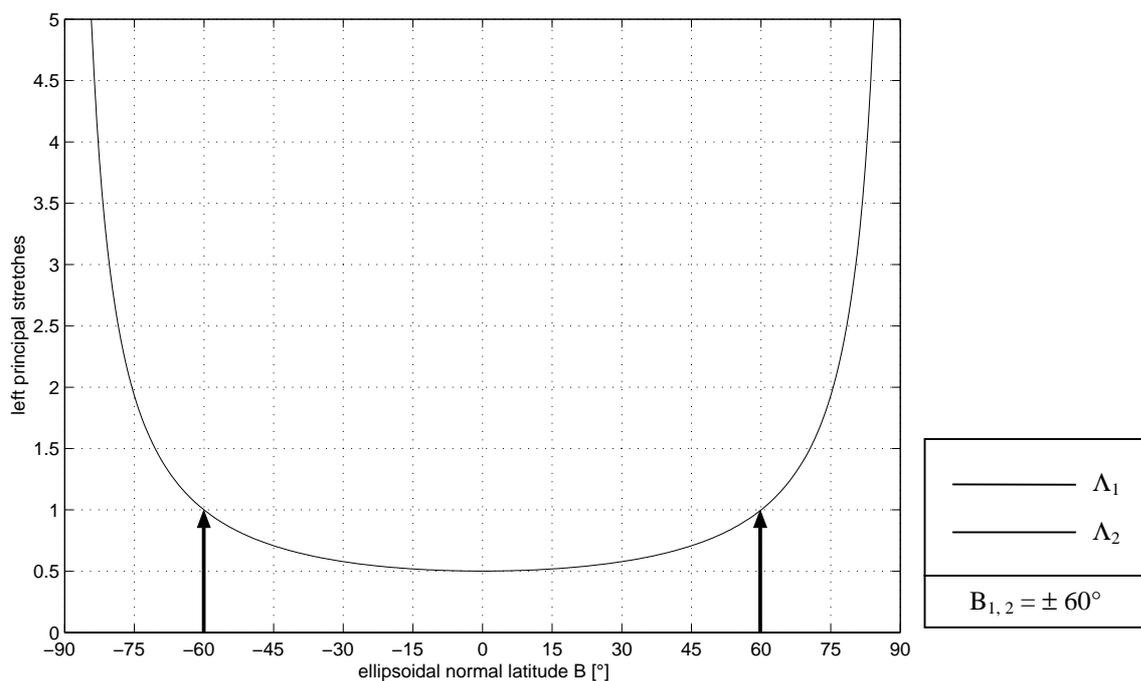
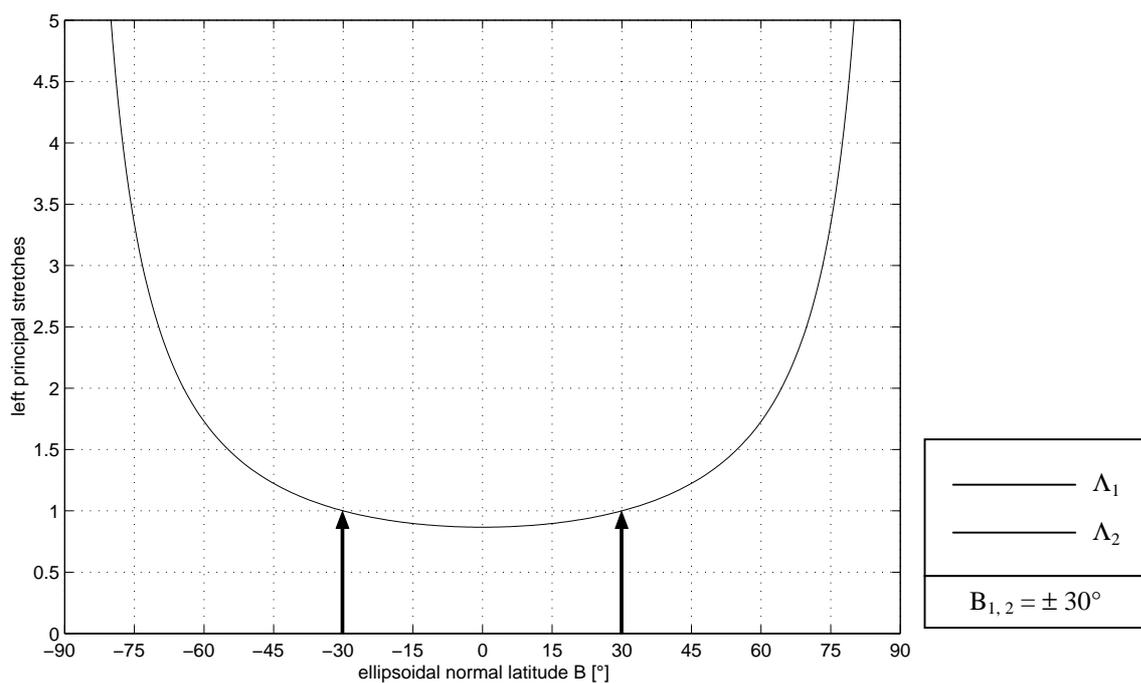
maximum angular deformation

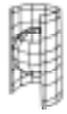
$$\Omega = 0$$



CONFORMAL CYLINDRICAL PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF
TWO STANDARD PARALLELS B_1, B_2

left principal stretches as function of the ellipsoidal latitude B





CONFORMAL CYLINDRICAL PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF
TWO STANDARD PARALLELS B_1, B_2

minimum cartesian coordinate y_{\min}

$$y_{\min} = y(B = -\frac{\pi}{2}) = -\infty$$

maximum cartesian coordinate y_{\max}

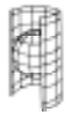
$$y_{\max} = y(B = \frac{\pi}{2}) = \infty$$

angle of intersection of coordinate lines, left versus right

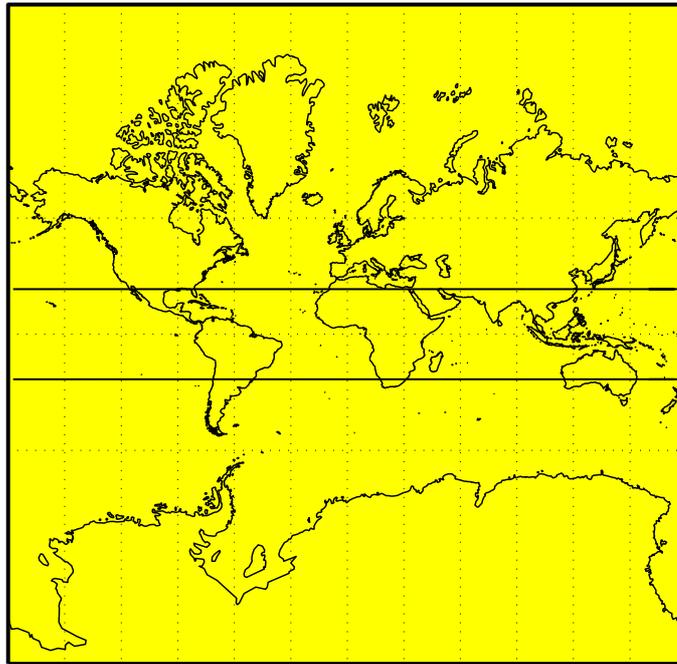
$$A = 90^\circ \quad \alpha = 90^\circ$$

left angular shear

$$\delta = 0^\circ$$

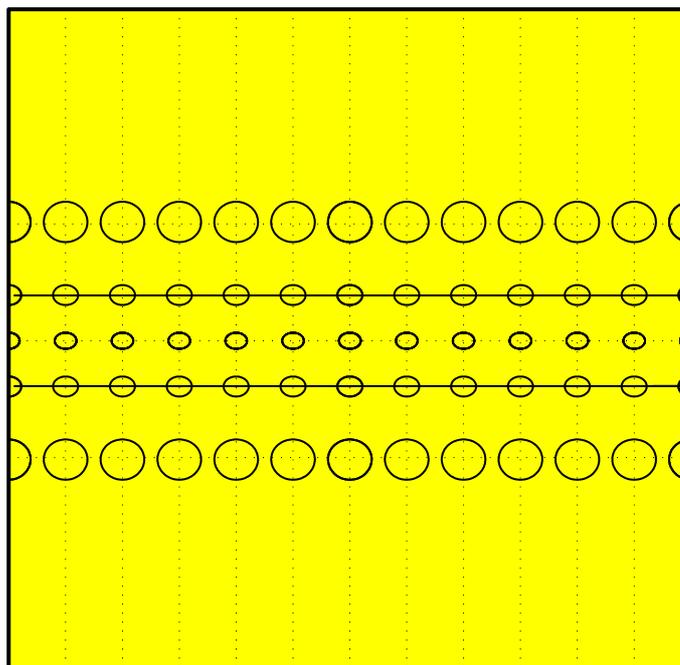


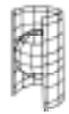
CONFORMAL CYLINDRICAL PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF
TWO STANDARD PARALLELS B_1, B_2



Conformal projection: world map and left Tissot indicatrices

(30° - graticule, standard parallels $B_{1,2} = \pm 30^\circ$)

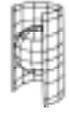




5-3. FLÄCHENTREUE ZYLINDERABBILDUNGEN DES ROTATIONSELLIPSOIDES

In diesem Abschnitt soll die normalständige flächentreue Zylinderabbildung des Rotationsellipsoides mit 2 Standardparallelkreisen behandelt werden. Im weiteren sollen einige Eigenschaften dieser Abbildung vorgestellt werden. Außerdem wird auf den wesentlichen Unterschied zwischen der Abbildung der Kugel und der des Rotationsellipsoides eingegangen.

Die Meridiane und die Breitenkreise werden geradlinig und rechtwinklig zueinander dargestellt. Die Meridiane werden in gleichen Abständen, die Breitenkreise mit abnehmenden Abständen wiedergegeben. Es liegt Äquidistanz und Konformität für die beiden Standardparallelkreise vor. Die Verzerrungsellipsen werden zu den Polen hin in Nord-Süd Richtung gestaucht und in Ost-West Richtung gestreckt. Zum Äquator hin verhalten sich die Verzerrungsellipsen entsprechend umgekehrt. Auf diese Weise wird die Eigenschaft der Flächentreue gewahrt. Der Unterschied zwischen der Zylinderabbildung des Rotationsellipsoides und derjenigen der Kugel ist, dass das Drahtmodell des Rotationsellipsoides engere Abstände der Breitenkreise aufweist.



EQUAL-AREA CYLINDRICAL PROJECTION EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF TWO STANDARD PARALLELS B_1, B_2

direct equations, cartesian coordinates

$$\begin{aligned} x &= N_1 \cos B_1 (\Lambda - \Lambda_0) \\ y &= \frac{A^2(1-E^2)}{4EN_1 \cos B_1} \left(\ln \left(\frac{1+E \sin B}{1-E \sin B} \right) + \frac{2E \sin B}{1-E^2 \sin^2 B} \right) \end{aligned}$$

left Jacobi matrix

$$\mathbf{J}_l = \begin{pmatrix} x_\Lambda & x_B \\ y_\Lambda & y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1 \cos B_1 & 0 \\ 0 & \frac{A^2(1-E^2) \cos B}{N_1 \cos B_1 (1-E^2 \sin^2 B)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1 \cos B_1 & 0 \\ 0 & \frac{NM \cos B}{N_1 \cos B_1} \end{pmatrix}$$

left Cauchy-Green deformation tensor

$$[c_{KL}] = \begin{pmatrix} (N_1 \cos B_1)^2 & 0 \\ 0 & \left(\frac{A^2(1-E^2) \cos B}{N_1 \cos B_1 (1-E^2 \sin^2 B)^2} \right)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (N_1 \cos B_1)^2 & 0 \\ 0 & \left(\frac{NM \cos B}{N_1 \cos B_1} \right)^2 \end{pmatrix}$$

left distance function

$$ds^2 = (N_1 \cos B_1)^2 dL^2 + \left(\frac{A^2(1-E^2) \cos B}{N_1 \cos B_1 (1-E^2 \sin^2 B)^2} \right)^2 dB^2 = (N_1 \cos B_1)^2 dL^2 + \left(\frac{NM \cos B}{N_1 \cos B_1} \right)^2 dB^2$$

left principal stretches

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= N_1 \cos B_1 \frac{\sqrt{1-E^2 \sin^2 B}}{A \cos B} = \frac{N_1 \cos B_1}{N \cos B} \\ \Lambda_2 &= \frac{1}{N_1 \cos B_1} \frac{A \cos B}{\sqrt{1-E^2 \sin^2 B}} = \frac{N \cos B}{N_1 \cos B_1} \end{aligned}$$



EQUAL-AREA CYLINDRICAL PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF
TWO STANDARD PARALLELS B_1, B_2

left eigenvectors

$$U_1 = \frac{1}{N \cos B} G_1 \quad U_2 = \frac{1}{M} G_2$$

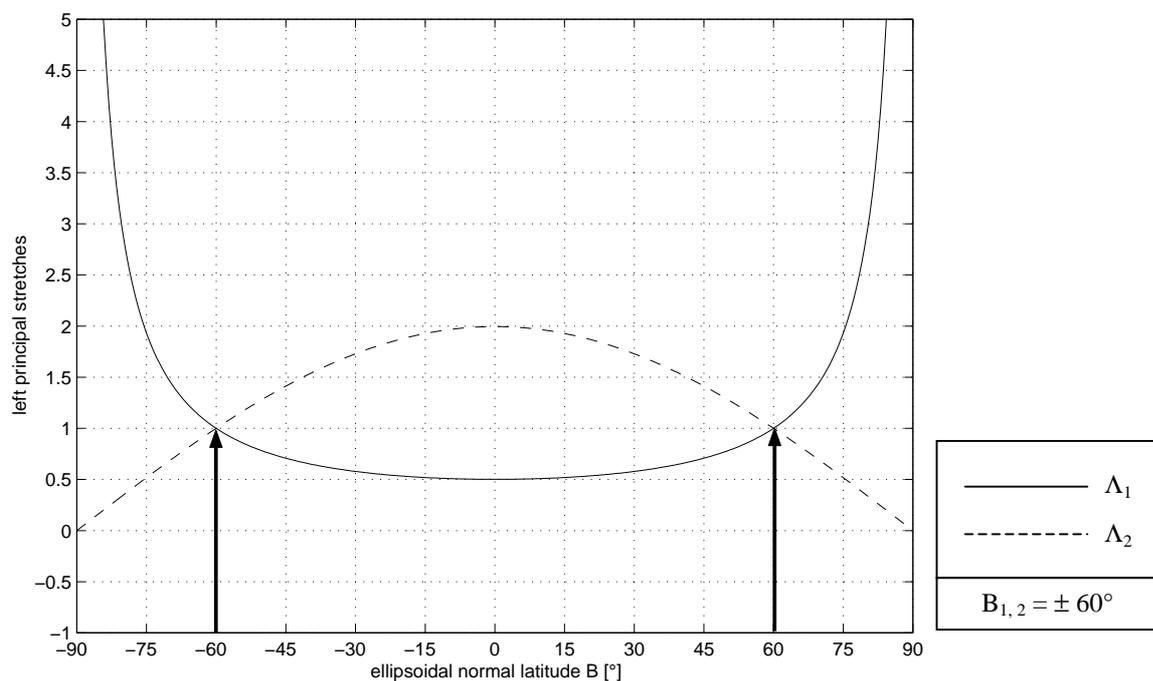
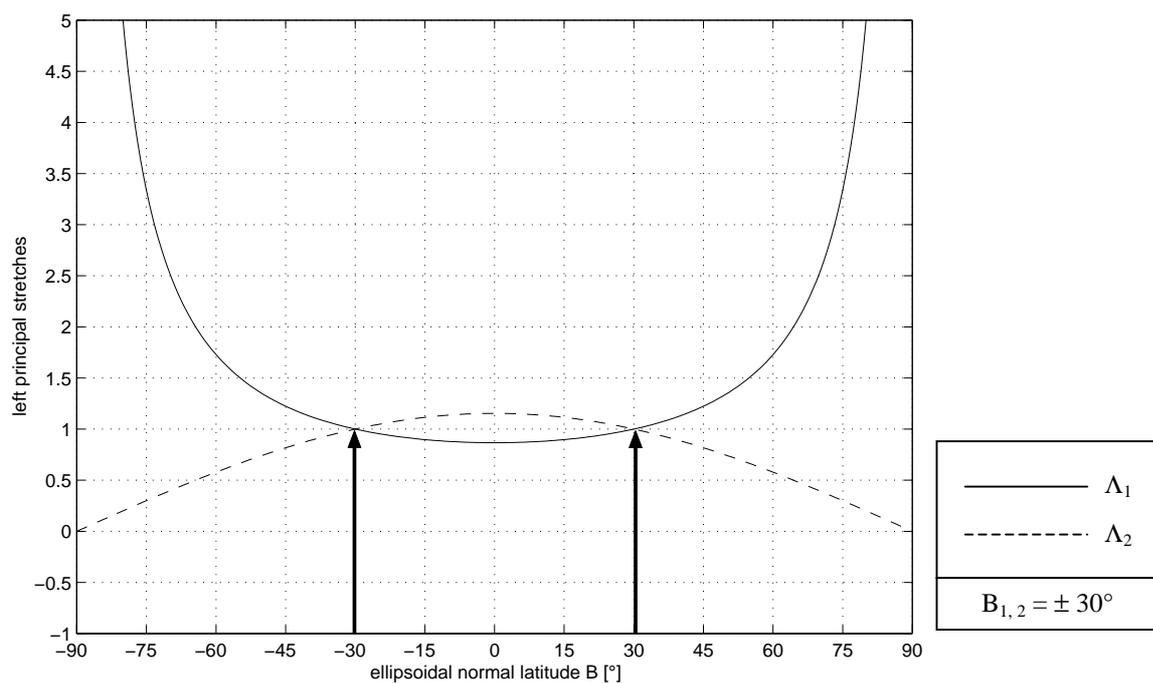
maximum angular deformation

$$\Omega = 2 \arcsin \left| \frac{N_1^2 \cos^2 B_1 (1 - E^2 \sin^2 B) - A^2 \cos^2 B}{N_1^2 \cos^2 B_1 (1 - E^2 \sin^2 B) + A^2 \cos^2 B} \right| = 2 \arcsin \left| \frac{N_1^2 \cos^2 B_1 - N^2 \cos^2 B}{N_1^2 \cos^2 B_1 + N^2 \cos^2 B} \right|$$



EQUAL-AREA CYLINDRICAL PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF
TWO STANDARD PARALLELS B_1, B_2

left principal stretches as function of the ellipsoidal latitude B





EQUAL-AREA CYLINDRICAL PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF
TWO STANDARD PARALLELS B_1, B_2

minimum cartesian coordinate y_{\min}

$$y_{\min} = y\left(B = -\frac{\pi}{2}\right) = \frac{A^2(1-E^2)}{4EN_1 \cos B_1} \ln\left(\frac{1-E}{1+E}\right) - \frac{A^2}{2N_1 \cos B_1}$$

maximum cartesian coordinate y_{\max}

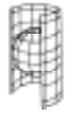
$$y_{\max} = y\left(B = \frac{\pi}{2}\right) = \frac{A^2(1-E^2)}{4EN_1 \cos B_1} \ln\left(\frac{1+E}{1-E}\right) + \frac{A^2}{2N_1 \cos B_1}$$

angle of intersection of coordinate lines, left versus right

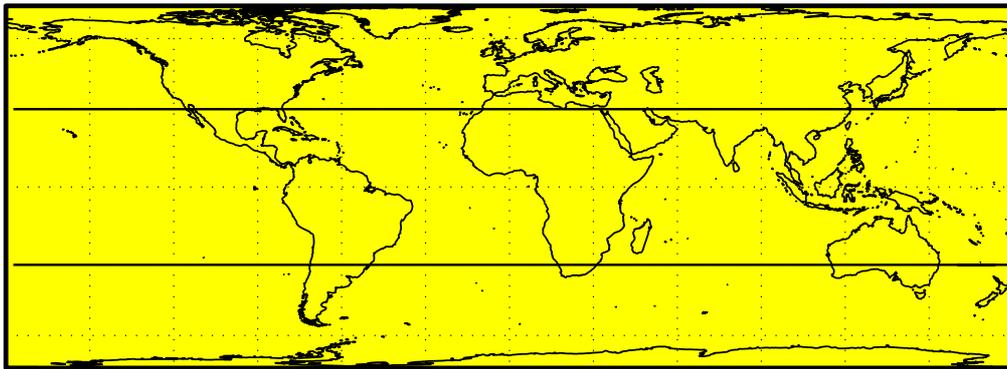
$$A = 90^\circ \quad \alpha = 90^\circ$$

left angular shear

$$\delta = 0^\circ$$

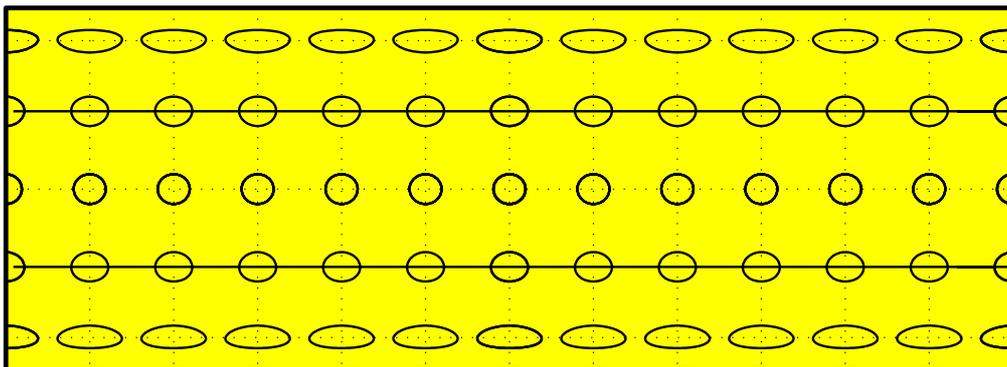


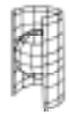
EQUAL-AREA CYLINDRICAL PROJECTION
EQUIDISTANT AND CONFORMAL MAPPING OF
TWO STANDARD PARALLELS B_1, B_2



Equal-Area projection: world map and left Tissot indicatrices

(30° - graticule, standard parallels $B_{1,2} = \pm 30^\circ$)





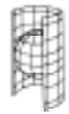
6. LITERATURVERZEICHNIS

- [1] Adams, O. (1927): *Tables for Albers Projection*, U.S. Coast and Geodetic Survey Spec. Pub. 130
- [2] Albers, H. (1805): *Beschreibung einer neuen Kegelprojektion*, Zach's monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmels-Kunde 12 (1805) 450-459
- [3] Braun, C. (1867): *Über zwei neue geographische Entwurfsarten*, Wochenschrift für Astronomie, Meteorologie und Geographie 10 (33) (1867) 259-263; 10 (34) (1867) 269-272; 10 (35) (1867) 276-278
- [4] Canters, F. and H. Declair (1989): *The World in Perspective: A Directory of World Map Projections*, John Wiley & Sons Ltd, Chichester 1989
- [5] Colles, C. (1794): *Geographical Ledger*, John Buel, New York 1794
- [6] De l'Isle, J. N. (1745): *Atlas' Rossiyykoy, sostoyashchey iz' devyatnattsati spetsial'nykh'kart'predstavlyayushchikh' vserossiyskuyu imperiyu's progranichiyami zemlyami*, St. Petersburg 1745
- [7] Euler, L. (1777): *Drei Abhandlungen über Kartenprojection*, Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 93, Verlag Wilhelm Engelmann, Leipzig 1898
- [8] Grafarend, E. and R.Y.You (1995): *The Newton form of a geodesic in Maupertuis gauge on the sphere and the biaxial ellipsoid*, Zeitschrift für Vermessungswesen 120 (1995) 68-80, 509-521
- [9] Grafarend, E. and A. Heidenreich (1995): *The generalized Mollweide projection of the biaxial ellipsoid*, Bulletin Géodésique 69 (1995) 164-172
- [10] Grafarend, E. (1995): *The optimal universal transverse Mercator projection*, manuscripta geodaetica 20 (1995) 421-468
- [11] Grafarend, E., R. Syffus and R. J. You (1995): *Projective heights in geometry and gravity space*, Allgemeine Vermessungsnachrichten 102 (1995) 382-403
- [12] Grafarend, E. and R. Syffus (1995): *The oblique azimuthal projection of geodesic type for the biaxial ellipsoid: Riemann polar and normal coordinates*, Journal of Geodesy 70 (1995) 13-37
- [13] Grafarend, E. and J. Engels (1995): *The oblique Mercator projection of the ellipsoid of revolution $E^2_{A,B}$* , Journal of Geodesy 70 (1995) 38-50



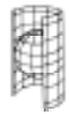
LITERATURVERZEICHNIS

- [14] Grafarend, E., T. Krarup and R. Syffus (1996): *An algorithm for the inverse of a multivariate homogeneous polynomial of degree n* , Journal of Geodesy 70 (1996) 276-286
- [15] Grafarend, E. and R. Syffus (1996): *The optimal Mercator projection and the optimal polycylindric projection of conformal type - case study Indonesia*, Proceedings 18th International Cartographic Conference, editor L. Ottoson, Vol. 3, 1751-1759, Stockholm 1997; Proceedings, GALOS (Geodetic Aspects of the Law of the Sea), 2nd International Conference, Denpasar/Bali/Indonesia, July 1-4 1996, editor S. Mira, pp. 93-103, Institute of Technology, Bandung 1996
- [16] Grafarend, E. and R. Syffus (1997): *Mixed cylindric map projections of the ellipsoid of revolution*, Journal of Geodesy 71 (1997) 685-694
- [17] Grafarend, E. and R. Syffus (1997): *Map projections of project surveying objects and architectural structures, Part I: Projective geometry of the pneu or torus $T^2_{A,B}$ with boundary*, Zeitschrift für Vermessungswesen 122 (1997) 457-465
- [18] Grafarend, E. and R. Syffus (1997): *The Hammer projection of the ellipsoid of revolution (azimuthal, transverse, rescaled equiareal)*, Journal of Geodesy 71 (1997) 736-748
- [19] Grafarend, E. and R. Syffus (1997): *Map projections of project surveying objects and architectural structures, Part II: Projective geometry of the cooling tower of the hyperboloid H^2* , Zeitschrift für Vermessungswesen 122 (1997) 560-566
- [20] Grafarend, E. (1997): *Field lines of gravity, their curvature and torsion, the Lagrange and the Hamilton equations of the plumbline*, Annali di Geofisica 40 (1997) 1233-1247
- [21] Grafarend, E. and R. Syffus (1998): *Map projections of project surveying objects and architectural structures, Part III: projective geometry of the parabolic mirror or the paraboloid P^2 with boundary*, Zeitschrift für Vermessungswesen 123 (1998) 93-97
- [22] Grafarend, E. and R. Syffus (1998): *Map projections of project surveying objects and architectural structures, Part IV: projective geometry of the church tower or the onion Z* , Zeitschrift für Vermessungswesen 123 (1998) 128-132
- [23] Grafarend, E. and R. Syffus (1998): *Optimal Mercator projection and the optimal polycylindric projection of conformal type - case study Indonesia*, Journal of Geodesy 72 (1998) 251-258



LITERATURVERZEICHNIS

- [24] Grafarend, E. and R. Syffus (1998): *The solution of the Korn-Lichtenstein equations of conformal mapping: the direct generation of ellipsoidal Gauss-Krueger conformal coordinates or the Transverse Mercator Projection*, Journal of Geodesy 72 (1998) 282-293
- [25] Grafarend, E. and R. Syffus (1998): *Transformation of conformal coordinates from a local datum (regional, National, European) to a global datum (WGS 84) Part I: The transformation equations*, Allgemeine Vermessungsnachrichten 105 (1998) 134-141
- [26] Grafarend, E. and F. Okeke (1998): *Transformation of conformal coordinates of type mercator from a global datum (WGS 84) to a local datum (regional, national)*, Marine Geodesy 21 (1998) 169-180
- [27] Hinks, A. (1941): *Murdoch's Third Projection*, Geographical Journal 97 (6) (1941) 358-362
- [28] Kavrayskiy, V. (1934): *Matematischeskaya kartografiya*. Moskau-Leningrad 1934
- [29] Lambert, J. H. (1772): *Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land- und Himmelscharten*, Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 54, Verlag Wilhelm Engelmann, Leipzig 1894
- [30] Maling, D.H. (1992): *Coordinate Systems and Map Projections*, 2nd edition, Pergamon Press
- [31] Mendeleev, D. (1907): *K poznanyu Rossi*, Akademiya Nauk [St. Petersburg], Izvestiya 6 (1) (1907) 141-157
- [32] Murdoch, P. (1758): *On the Best Form of Geographical Maps*, Philosophical Transactions of the Royal Society 50 (2) (1758) 553-562. Reprinted in Philosophical Transactions 11 (1755-63) 215-218. C. and R. Baldwin, London 1809
- [33] Pearson, F., II (1990): *Map Projections: Theory and Applications*, CRC Press Inc., Boca Raton, Florida 1990
- [34] Richardus, P. and R. Adler (1972): *Map Projections for Geodesists, Cartographers and Geographers*, 2nd printing, North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1972
- [35] Snyder, J. (1987): *Map Projections – A Working Manual*, U.S. Geological Survey Professional Paper 1395



LITERATURVERZEICHNIS

- [36] Snyder, J. and P. Voxland (1989): *An Album of Map Projections*, U.S. Geological Survey Professional Paper 1453
- [37] Snyder, J. (1993): *Flattening the Earth: Two Thousand Years of Map Projections*, The University of Chicago Press
- [38] Snyder, J. and L. Bugayevskiy (1995): *Map Projections: A Reference Manual*, Taylor & Francis, London 1995
- [39] Tissot, N. A. (1881): *Mémoire sur la représentation des surfaces et les projections des cartes géographiques*, Gauthier Villars, Paris 1881
- [40] Young, A. (1920): *Some Investigations in the Theory of Map Projections*, Royal Geographical Journal 62, No. 5, Technical Series, (1920) 359-361