
Lokale Schwerefeldbestimmung mit Hilfe der Randelementemethode und radialer Basisfunktionen

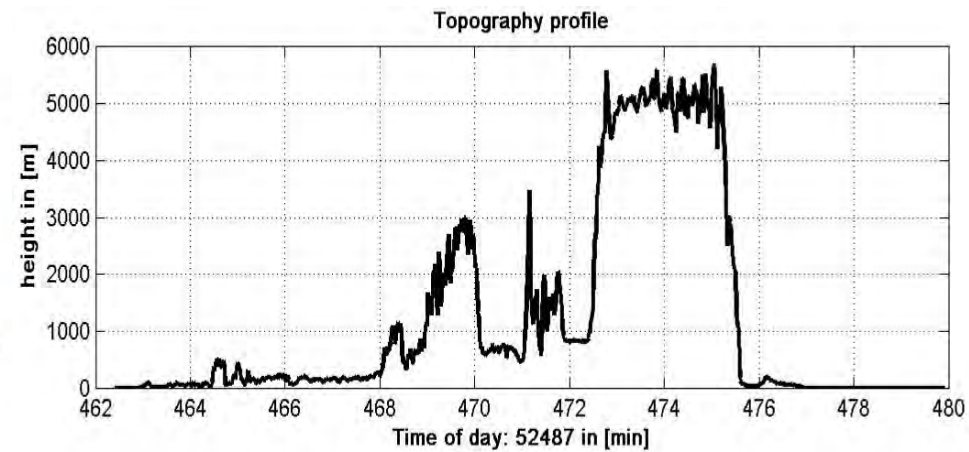
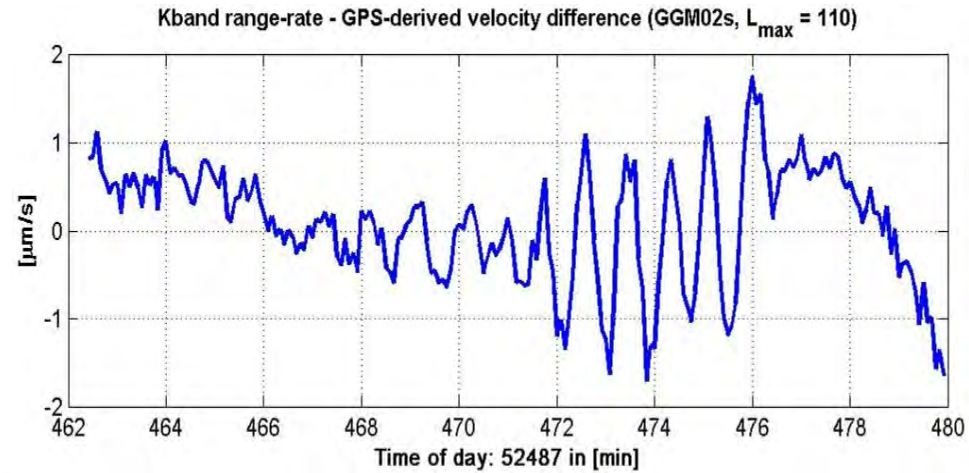
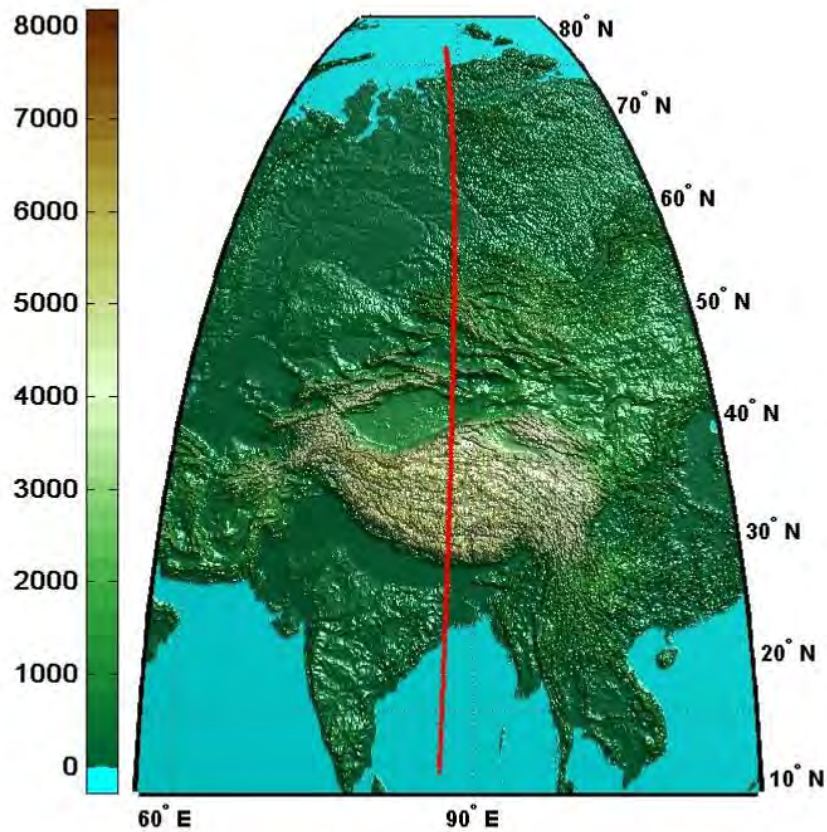
M. Weigelt, W. Keller, M. Antoni

weigelt@gis.uni-stuttgart.de

22. September, 2009

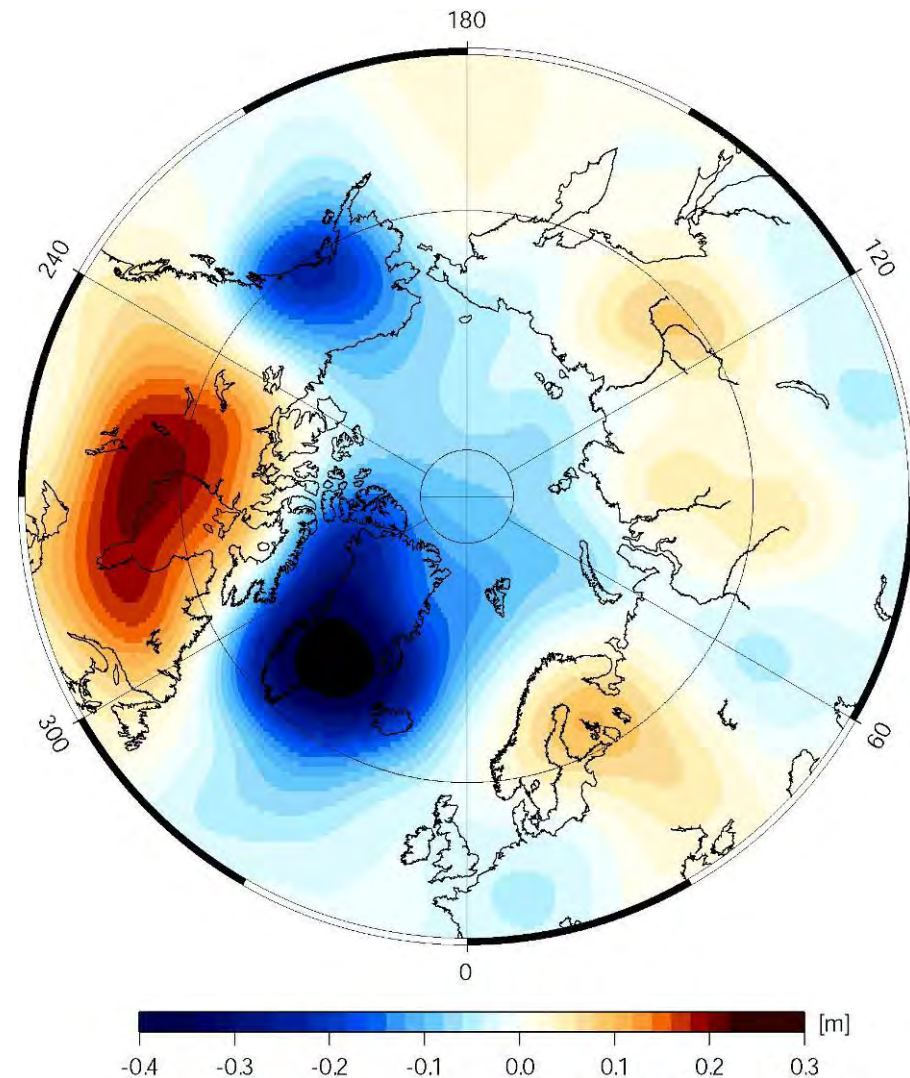
Motivation

- Restsignal



Motivation

- Leakage – Problem:
*Keine Funktion kann zugleich
bandbegrenzt und
raumbegrenzt sein*
- Beispiel:
 - CSR GRACE-Lösung, 6 Jahre
 - Massenveränderung ausgedrückt in äquivalenter Wasserhöhe
 - Gauss Filter: Radius 500km.



Oli Baur, Geodätisches Institut Stuttgart

Methoden

- **Positions-optimierte radiale Basisfunktionen**
- **Randelementmethode**

Methoden

- **Positions-optimierte radiale Basisfunktionen**
- Randelementmethode

Positions-optimierte radiale Basisfunktionen

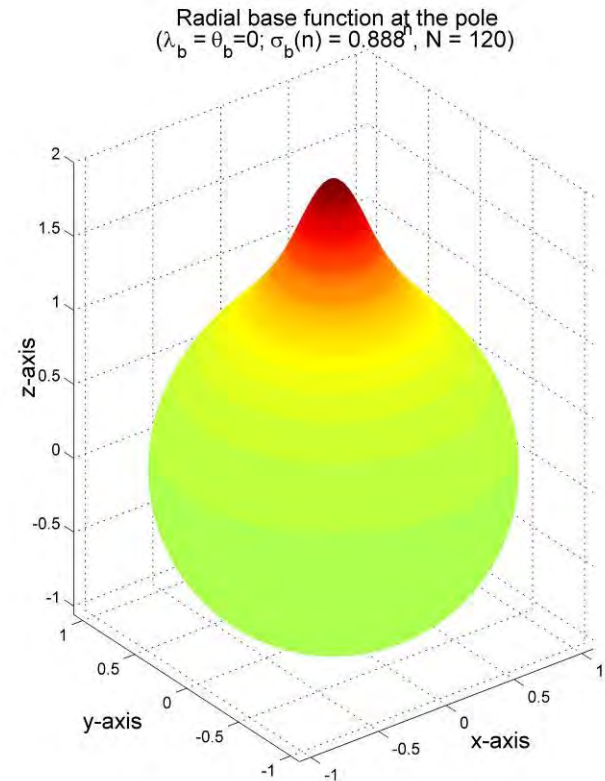
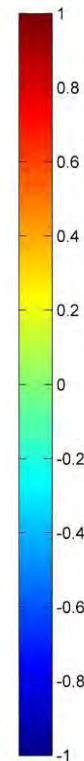
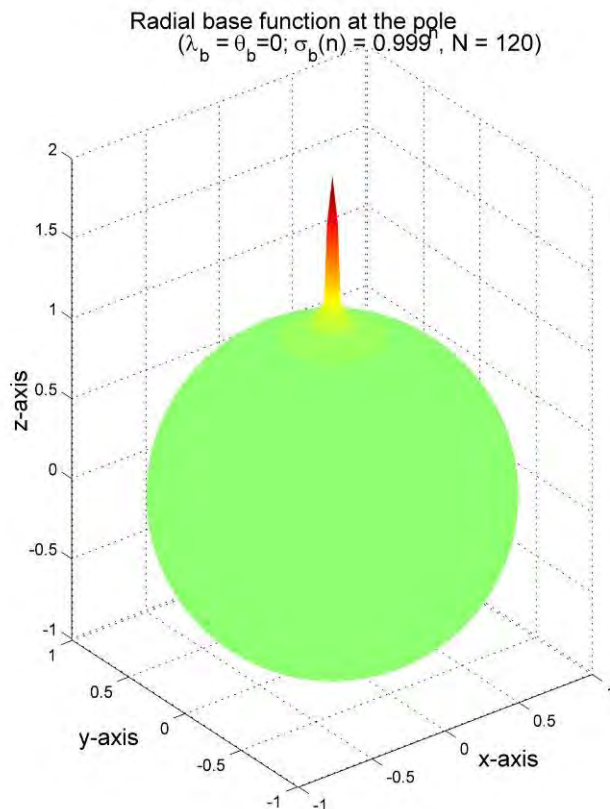
Modellierung durch Überlagerung von lokalen radialen Basisfunktionen

$$\begin{aligned}\delta V(\lambda, \theta, r) &= \frac{GM}{R} \sum_{b=1}^B \eta_b \Psi(\sigma_b, \varpi_b, r) \\ &= \frac{GM}{R} \sum_{b=1}^B \eta_b \sum_{n=1}^N \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sigma_b(n) P_n(\cos \varpi_b)\end{aligned}$$

mit:	η_b	Skalierung
	$\sigma_b(n)$	Formparameter
	ϖ_b	sphärische Distanz zum Zentrum der Basisfunktion
	$P_n(\cos \varpi_b)$	Legendre Polynome
	λ, θ, r	sphärischen Koordinaten
	GM	Gravitationskonstante · Masse
	R	Erdradius

Eigenschaften

- System lokalisierender Basisfunktionen
- isotrop = symmetrisch zum Zentrum
- Parameter $\sigma_b(n)$ bestimmt die Form



Methoden

- Positions-optimierte radiale Basisfunktionen
- **Randelementmethode**

Randelementmethode

- Einfachschichtpotential

$$V(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \frac{\sigma(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} d\Omega$$

- Zerlegung des Randes in Teilelemente:

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^N \Omega_i$$

- Annahme: $\sigma|_{\Omega_i} = \sigma_i = \text{const.}$

- Modellierung:
$$V(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \sigma_i \int_{\Omega_i} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} d\Omega_i$$

Randelementmethode

- Ansatz von Lemoine et al. (2007), Rowlands et al. (2007):
MASCON
 - Modellierung der monatlichen GRACE Variationen mittels eines zusätzlichen (zeitlich variablen) Schicht

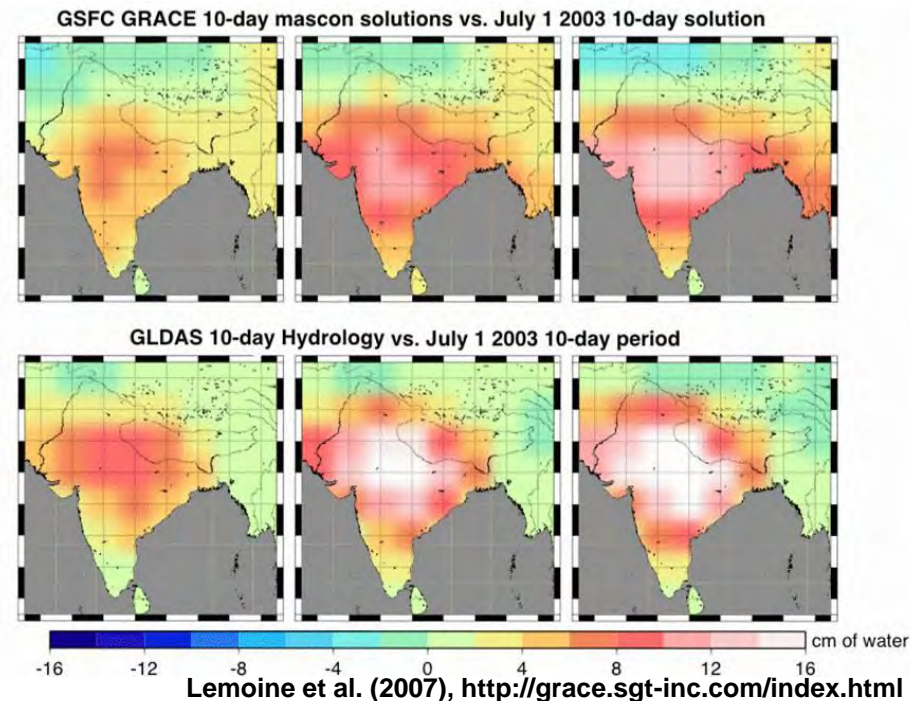
$$\Delta A_{lm}(t) = \frac{(1 + k'_1) R^2 \sigma(t)}{M(2l + 1)} \int_{\Omega} Y_{lm} d\Omega$$

- Berechnung mittels partieller Ableitungen bezügl. SH-Koeffizienten:

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \sigma_i} = \sum_{lm} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \Delta C_{lm}} \frac{\partial \Delta C_{lm}}{\partial \sigma_i} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \Delta S_{lm}} \frac{\partial \Delta S_{lm}}{\partial \sigma_i}$$

- Verbesserungsmöglichkeiten

- direkte Nutzung von $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \sigma_i}$
- Nutzung von streng lokalisierenden Elementen



Rechteckelemente

- Zerlegung des Randes in Rechtecke

$$\Omega_i = \{(\lambda, \phi) \mid \lambda_i \leq \lambda \leq \lambda_i + \Delta\lambda_i, \phi_i \leq \phi \leq \phi_i + \Delta\phi_i\}$$

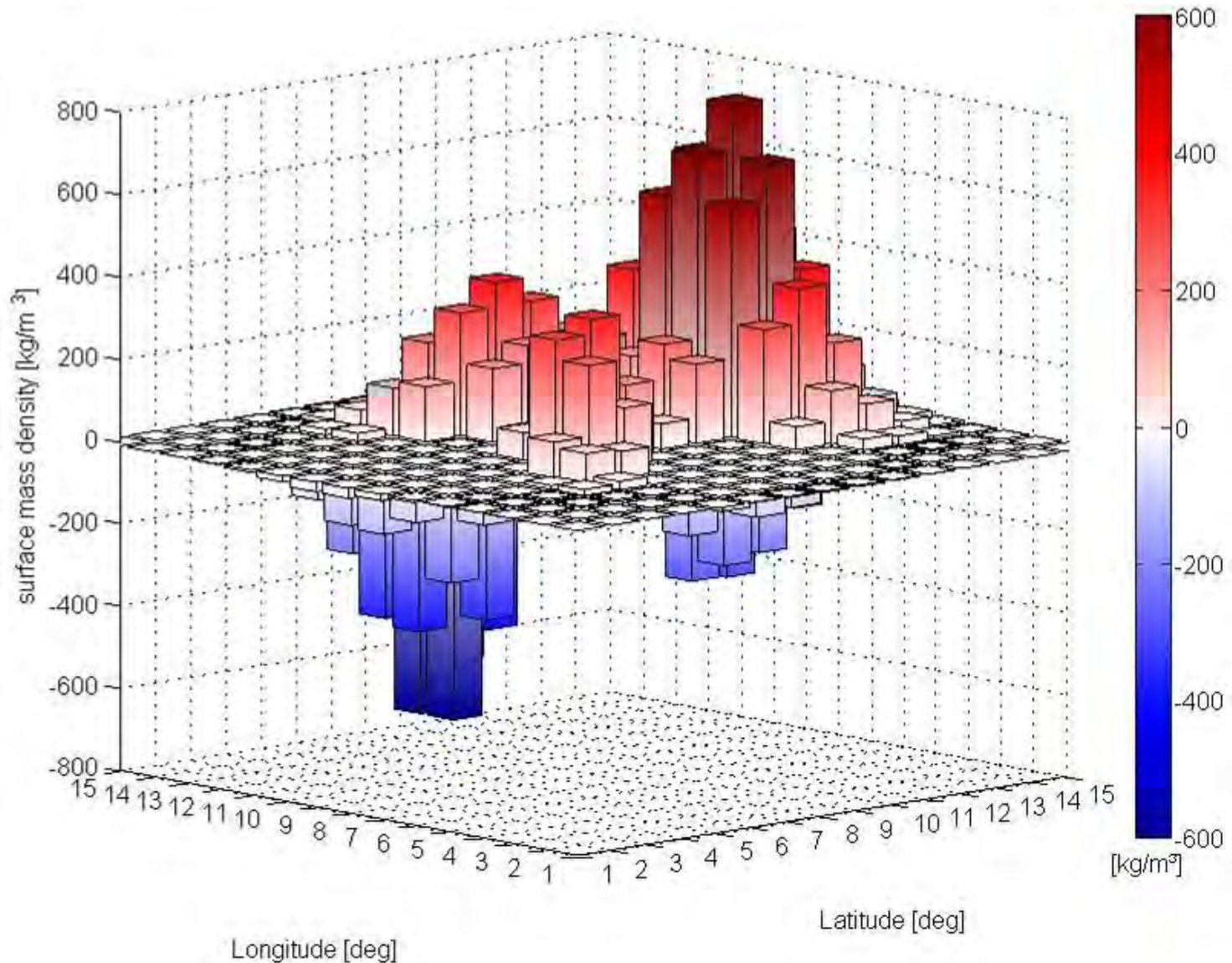
- Potential:

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^N \sigma_i \int_{\Omega_i} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} d\Omega_i \\ &= \sum_{i=1}^N \sigma_i \int_{\lambda_i}^{\lambda_i + \Delta\lambda_i} \int_{\phi_i}^{\phi_i + \Delta\phi_i} \frac{R^2 \cos \phi d\phi_i d\lambda_i}{\|\mathbf{x} - (R \cos \phi \cos \lambda, R \cos \phi \sin \lambda, R \cos \phi)^T\|} \end{aligned}$$

- Nicht-stetig, nicht-differenzierbar
- Integration mittels numerischer Quadratur
- Viele Elemente für „glatten“ Rand \Leftrightarrow Regularisierung

Rechteckelemente

- Beispiel



Dreieckselemente

- Linear Interpolation der Oberflächendichten und des Integralkerns

$$\kappa_i(\mathbf{x}, \lambda, \phi) = \frac{\sigma_{i,1}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}(\phi_{i,1}, \lambda_{i,1})\|} \Phi_{i,1} + \frac{\sigma_{i,2}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}(\phi_{i,2}, \lambda_{i,2})\|} \Phi_{i,2} + \frac{\sigma_{i,3}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}(\phi_{i,3}, \lambda_{i,3})\|} \Phi_{i,3}$$

- Potential:
$$V(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \frac{\sigma_i}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}_i\|} d\Omega_i$$
$$= \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^3 \frac{\sigma_k}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}(\lambda_k, \phi_k)\|} \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \Phi_{ik} |J| d\eta d\xi$$

- mit

$$\Phi_{i,1}(\lambda(\xi, \eta), \phi(\xi, \eta)) = 1 - \xi - \eta$$

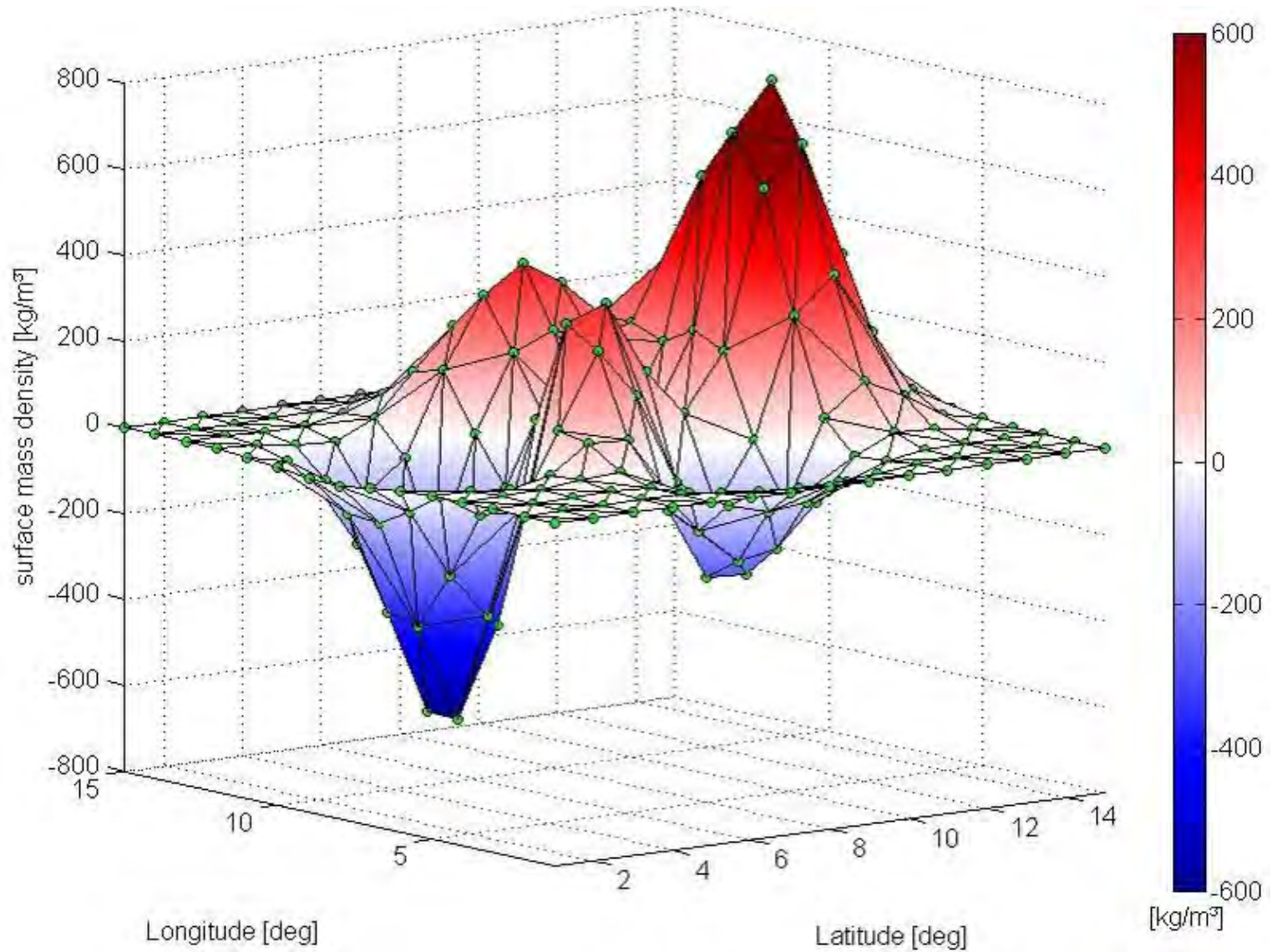
$$\Phi_{i,2}(\lambda(\xi, \eta), \phi(\xi, \eta)) = \xi$$

$$\Phi_{i,3}(\lambda(\xi, \eta), \phi(\xi, \eta)) = \eta$$

- Stetig aber nicht-differenzierbar
- Analytische Integration mittels Normaldreiecke

Dreieckselemente

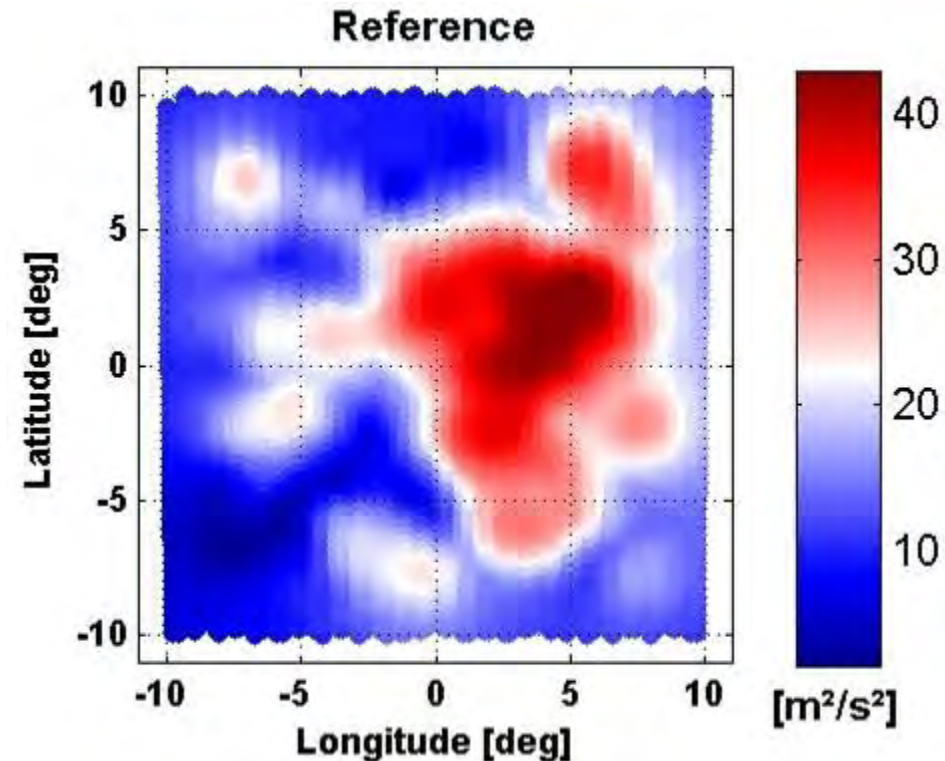
- Beispiel



Simulation

Simulation eines Restsignals

- 4225 Punktmassen in einer Tiefe von 120km – 130km
- Gebietsgröße: 20° x 20°
- Kepler Orbit
 - Höhe = 385 km
 - 30 Tage
 - Sampling: 0.2 Hz
 - 3204 observation

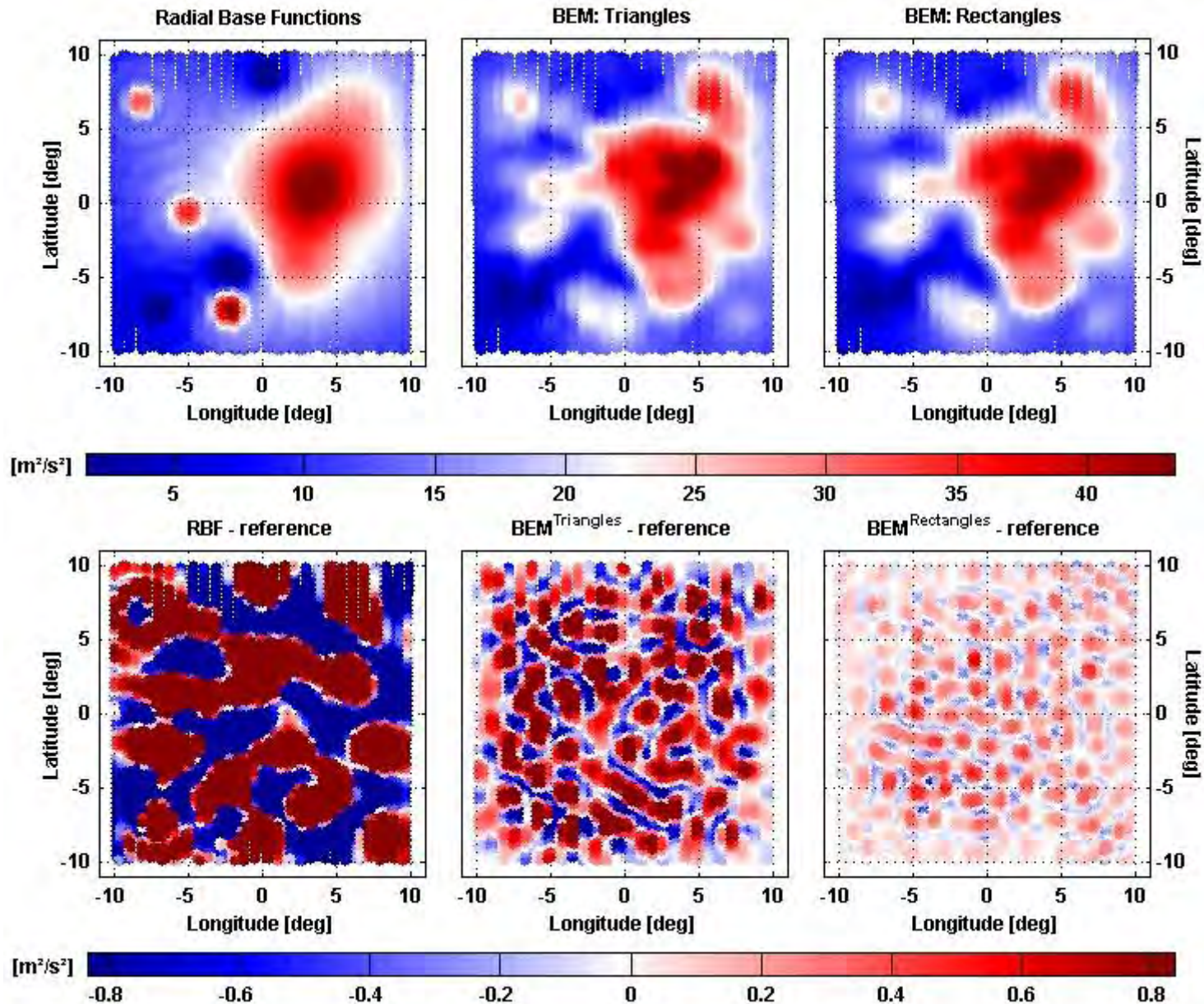
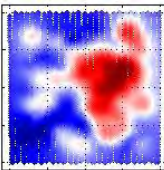


- Potentielle Energie als Pseudobeobachtungen

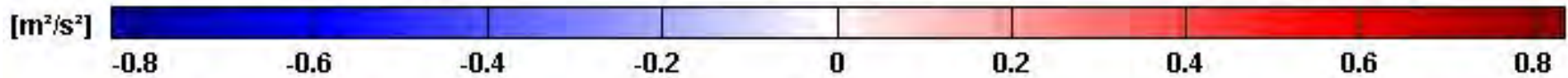
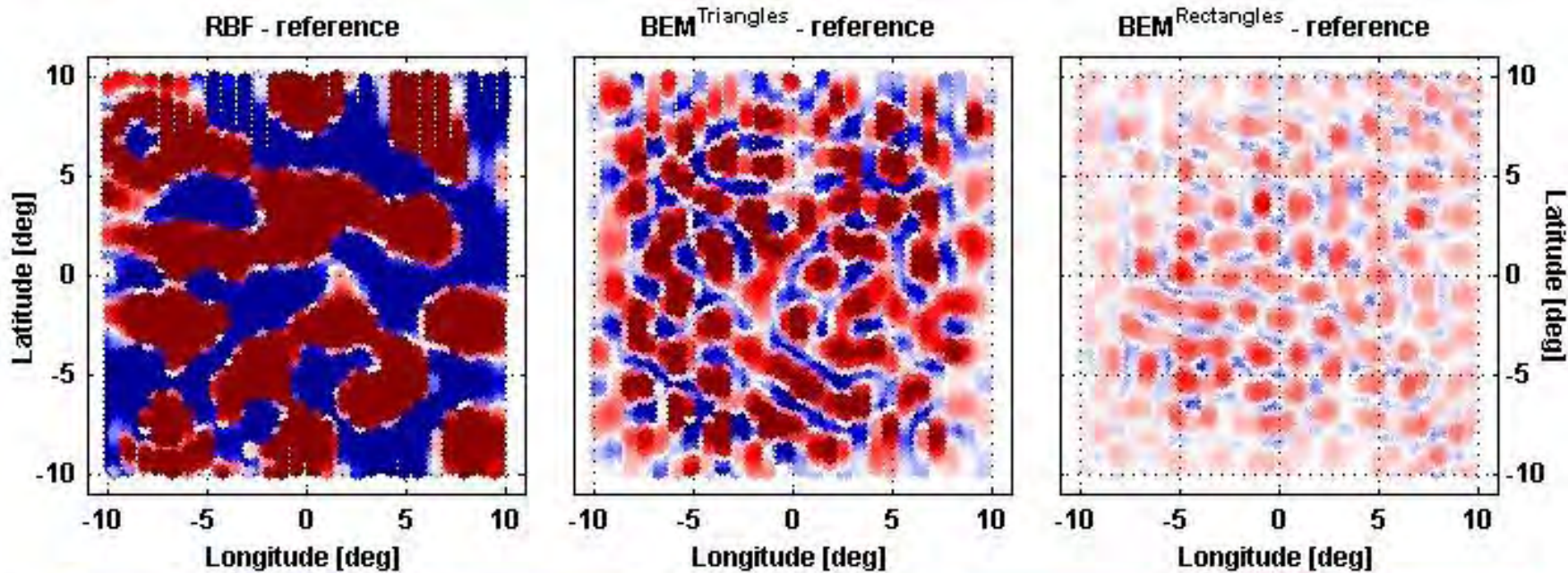
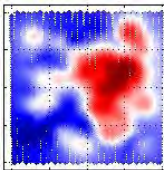
$$V(\lambda, \phi, r) = \sum_{i=1}^{4225} \frac{\sigma_i \cdot GM}{\sqrt{(R - d_i)^2 + r^2 - 2r(R - d_i)\cos\psi_i}}$$

- Randelemente in einer Tiefe von 110km

Simulation

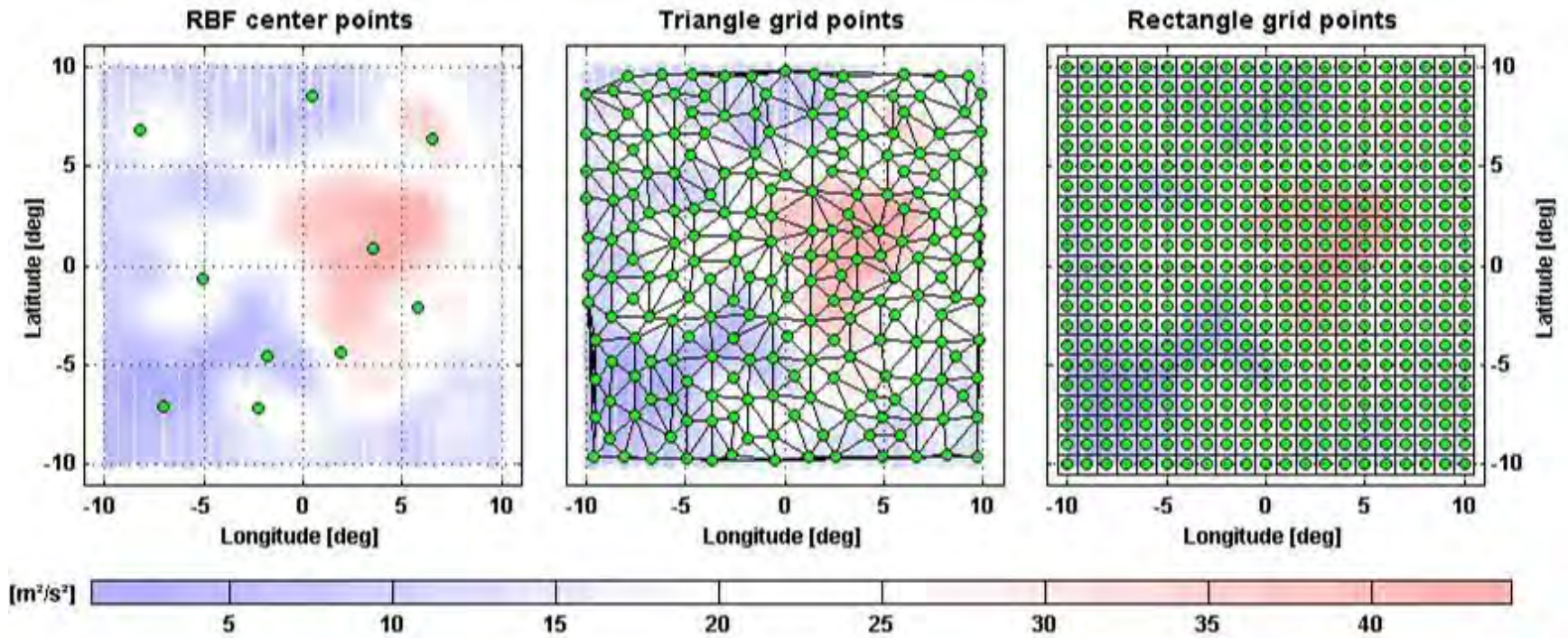
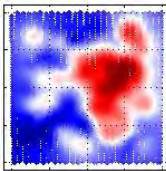


Simulation



Statistik	RMS		Max		Min		Korr. %
	[m ² /s ²]	Rel. %	[m ² /s ²]	Rel. %	[m ² /s ²]	Rel. %	
RBF	3.734	18.00	24.047	54.67	-17.341	996.60	58.3
BEM (Dreiecke)	0.675	3.25	2.703	6.15	-3.368	193.58	92.2
BEM (Rechtecke)	0.153	0.74	0.821	1.87	-0.570	32.74	98.3

Simulation



Anzahl der Elemente

Regularisierung

RBF

10



BEM (Dreiecke)

209



BEM (Rechtecke)

441



(416)

Zusammenfassung

Zusammenfassung:

- Positions-optimierte Basisfunktionen
 - Anzahl der Parameter ist klein (4 x Anzahl des Basen).
 - Problem ist nicht-linear.
- Randelementmethode
 - stetige/differenzierbare Elemente (eventl. keine Regularisierung)
 - Integration analytisch oder mittels numerischer Quadratur

Ausblick:

- Unterteilung der Integration in Nahzone und Fernzone
 - singular, quasi-singular, regular
- Formelemente: Dreiecke und Rechtecke höherer Ordnung (quadrilaterals)
- direkte Nutzung der partiellen Ableitungen der Range-Beobachtungen bezüglich des Oberflächendichten.

Danke für die Aufmerksamkeit

**Lokale Schwerefeldbestimmung
mit Hilfe der Randelementemethode und
radialer Basisfunktionen**

M. Weigelt, W. Keller, M. Antoni

weigelt@gis.uni-stuttgart.de

22. September, 2009