Markus Antoni, Wolfgang Keller, Matthias Weigelt markus.antoni@gis.uni-stuttgart.de

Geodätisches Institut der Universität Stuttgart

Karlsruhe, 22.09.2009





Fazit

Schwerefeldmodell = Kugelfunktionen + lokale Basisfunktionen

Ziel: Bestimmung residualer Parameter aus relativen Positionen

klassische Lösung: Variationsgleichungen

$$\frac{\partial}{\partial p} \left\{ \ddot{\vec{x}} \right\} = \frac{\partial}{\partial p} \left\{ f(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}}) \right\} \quad \Rightarrow \iint \frac{\partial}{\partial p} \left\{ \ddot{\vec{x}} \right\} = \dots$$

Nichtlineare Optimierung erfordert viele Integrationen!

- je Parameter
- in jeder Iteration
- vergleichbare Genauigkeit

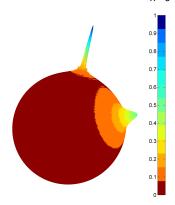




## Radiale Basisfunktionen

#### Potential einer Basis

$$\Psi_b(\vec{x}, \underline{\psi_b}) = \frac{GM}{R} \underline{\eta_b} \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \underline{\sigma_b(n)} P_n(\cos \varpi_b(\underline{\lambda_b, \vartheta_b}, \vec{x}))$$



Optimierung aller Parameter  $\psi_b$ 

- Position  $(\lambda_b, \vartheta_b)$
- individueller Formparameter  $\sigma_b(n) := (\sigma_b)^n$
- Skalierungsfaktor η<sub>b</sub>

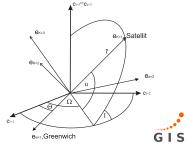




### Darstellung des Potentials

$$\Psi_b = \frac{GM}{R} \eta_b \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sigma_b(n) P_n(\cos \varpi_b)$$

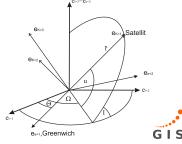
Additionstheorem



#### Darstellung des Potentials

$$\Psi_b = \frac{GM}{R} \eta_b \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sigma_b(n) \frac{2}{2n+1} \sum_{m=-n}^{n} \widehat{Y}_{nm}^*(\lambda_b, \vartheta_b) \widehat{Y}_{nm}(\lambda, \vartheta)$$

- Additionstheorem
- SO(3)-Gruppe (Kreisbahn!)



## adiale basisiunklionen

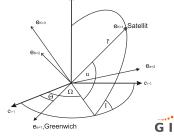
#### Darstellung des Potentials

$$\Psi_b = \frac{GM}{R} \eta_b \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sigma_b(n) \frac{2}{2n+1} \sum_{m=-n}^{n} \widehat{Y}_{nm}^*(\lambda_b, \vartheta_b)$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} d_{km}^n(-l) \widehat{P}_{nk}(0) e^{i(ku+\frac{\pi}{2})} e^{im(\Omega-\Theta-\frac{\pi}{2})}$$

Additionstheorem

k=-n

- SO(3)-Gruppe (Kreisbahn!)
- Definition:  $B_{km}^n(\psi_b)$



## Störkraft einer Basisfunktion

$$\Psi_b = \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=-n}^{n} \sum_{k=-n}^{n} B_{km}^{n}(\psi_b) \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} d_{km}^{n}(-I) e^{\imath m\Omega} \underbrace{e^{\imath ku - \imath m\Theta}}_{f(t)}$$

#### Gradient

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial u}, \frac{1}{r} \left[ \sin u \frac{\partial}{\partial I} + \cos u \left( \cot I \frac{\partial}{\partial u} - \frac{1}{\sin I} \frac{\partial}{\partial \Omega} \right) \right] \right)^{\perp}$$





$$\Psi_b = \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=-n}^{n} \sum_{k=-n}^{n} B_{km}^n(\psi_b) \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} d_{km}^n(-I) e^{\imath m\Omega} \underbrace{e^{\imath ku - \imath m\Theta}}_{f(t)}$$

Gradient

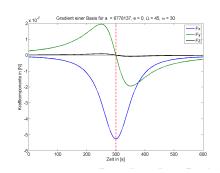
$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial u}, \frac{1}{r} \left[ \sin u \frac{\partial}{\partial I} + \cos u \left( \cot I \frac{\partial}{\partial u} - \frac{1}{\sin I} \frac{\partial}{\partial \Omega} \right) \right] \right)^{\top}$$

Faktoren in der Reihe  $\nabla \Psi_b$ :

• 
$$F_X : \frac{-(n+1)}{r}$$

$$igotimes F_y: rac{\imath k}{r}$$

• 
$$F_z(1) : \frac{i}{r} \left( k \cot I - m \frac{1}{\sin I} \right) \cos u$$
  
 $F_z(2) : \frac{1}{r} \sin u \frac{\partial d_{km}^n (-I)}{\partial I}$ 



# Bahnänderungen

Motivation

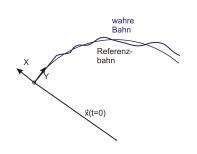
Abweichung von der Referenzbahn:

$$x'' - 2\overline{n}y' - 3\overline{n}^2x = F_x$$
  
 $y'' + 2\overline{n}x' = F_y$   
 $z'' + \overline{n}^2z = F_z$ 

Parametrisierung in t

$$\Theta = \dot{\Theta}t + \Delta\Theta$$

$$u = \overline{n}t + v$$



Inhomogene Lösung durch Laplace-Transformation

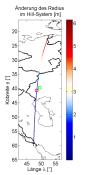
$$ec{\mathbf{x}}_{inh} = \sum_{t} \mathbf{A} + \mathbf{B}t + \mathbf{C}\mathrm{e}^{\pm\imath\overline{n}t} + \mathbf{D}\mathrm{e}^{\imath(k\overline{n}-m\dot{\Theta})t} + \mathbf{E}\mathrm{e}^{\imath t((k\overline{n}-m\dot{\Theta})\pm\overline{n})} + \mathbf{RES}(t)$$



# Beispiel

Motivation

- Orbitintegration: Basis + EGM96 bis N = 100 $\Rightarrow$  aktuelle Keplerelemente  $(I, u, \Omega, r...)$
- Beobachtung: Abweichung im Hill-System
- Linearisierung mit genäherten Basisparametern
- partielle Ableitungen:  $B_{km}^n(\psi_b) \to \frac{\dot{\partial} B_{km}^n(\psi_b)}{\partial (\lambda_b, \vartheta_b, \eta_b, \sigma_b)}$
- iterative Ausgleichung



	Start	opt. Wert	wahrer Wert
$\overline{\lambda_b}$	49.4120	48.4121	48.4120
$artheta_{m b}$	39.7160	40.7162	40.7160
$\sigma_{m b}$	0.9999	0.9800	0.9800
$\frac{\eta_{b}}{10^{-7}}$	0.8275	0.9999	1.0000





- Vereinfachungen (Kreisbahn, gleichmäßige Bewegung)
- Inkonsistenz (Kreisbahn vs. Referenzfeld)





Motivation

- Vereinfachungen (Kreisbahn, gleichmäßige Bewegung)
- Inkonsistenz (Kreisbahn vs. Referenzfeld)

- geschlossene Lösung mit partiellen Ableitungen
- keine Variationsgleichung
- vektorisierbar
- Differentiation der Lösung
  - ⇒ resiudale Range-Rate als Funktion der Basisparameter



